

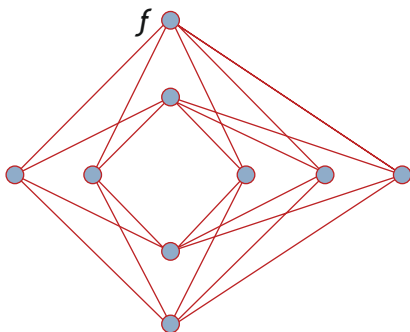
nœuds de toutes les façons possibles (il y en a nm). On note $K_{n,m}$ ce graphe et, bien sûr, on aimerait connaître le nombre minimum de croisements de $K_{n,m}$. C'est à ce graphe et au calcul de $cr(K_{n,m})$ que le mathématicien hongrois Paul Turán s'intéressa dans son camp de travail en 1944.

Voici quelques valeurs de $cr(K_{n,m})$, en fonction de n et de m , connues aujourd'hui :

$n \backslash m$	3	4	5	6	7
3	3	2	4	6	9
4	2	4	8	12	18
5	4	8	16	24	36
6	6	12	24	36	54

En 1952, une solution générale au problème que Turán avait fait connaître autour de lui fut proposée par Kazimierz Urbanik et Kazimierz Zarankiewicz. Ils prétendaient prouver que $cr(K_{n,m})$ est égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. Treize ans après, on s'aperçut que le résultat était faux. Des preuves initiales, seule reste l'inégalité selon laquelle $cr(K_{n,m})$ est inférieur ou égal à l'expression ci-dessus. Si nul n'a réussi à prouver que l'égalité est vraie, aujourd'hui aucun contre-exemple n'en a été proposé, et on a donc... une conjecture de plus.

La démonstration de l'inégalité n'est pas très difficile, car elle consiste à disposer le graphe en plaçant sur une ligne horizontale les n premiers nœuds, et sur une ligne verticale les m autres nœuds, de façon à équilibrer le mieux possible les parties haute et basse et les parties droite et gauche. La figure f ci-dessous est un exemple pour $K_{4,5}$:



Pour illustrer à quel point ces problèmes sont difficiles et les conjectures incertaines, mentionnons encore le cas du graphe Q_n

de l'hypercube à n dimensions. En 1973, R. Guy et Paul Erdős proposèrent la formule : $cr(Q_n) = \{5 \times 4^n / 32 - 2^{n-2} \lfloor (n^2 + 1)/2 \rfloor\}$.

Pendant plus de 40 ans, elle a semblé correcte. Pourtant, Yuansheng Yang, Guoqing Wang, Haoli Wang et Yan Zhou, de l'Université de Dalian en Chine, trouvèrent en 2012 un contre-exemple pour $n = 7$ et toutes les valeurs supérieures. La conjecture est donc archaïque !

Imposer aux arcs d'être des segments de droite, nous l'avons dit, conduit à un problème différent, celui du calcul de $cr(G)$. Il se trouve qu'il est un peu plus facile, car le nombre de dessins différents à envisager est plus petit. Dans le cas du graphe K_n , les valeurs calculées et vérifiées vont jusqu'à $n = 27$ et on connaît en plus la valeur pour $n = 30$.

Peu d'espoir de pouvoir aller loin

En fait, les difficultés rencontrées sont peu étonnantes, car on sait depuis longtemps que le problème du calcul de $cr(G)$ est un problème de la classe NP-difficile. Cela signifie que si l'on savait le résoudre efficacement, alors on saurait aussi résoudre efficacement une grande famille de problèmes combinatoires difficiles, ce qui est plus qu'improbable. Cela n'empêche pas des progrès concrets en matière d'algorithmes.

On sait maintenant produire des dessins utiles en pratique pour des graphes de circuits comportant plusieurs centaines de nœuds. L'une des méthodes utilisées est la « planarisation » : on extrait du graphe un graphe planaire aussi grand que possible en ne retenant que certains arcs, et on ajoute ensuite avec précaution les arcs qui manquent en tentant de minimiser le nombre de croisements créés.

L'énigme du croisement des arcs d'un graphe montre que des thèmes de recherche que tout le monde peut comprendre concentrent parfois en eux toutes les difficultés possibles, et prouve une fois de plus que le monde mathématique, même là où on s'y attend le moins, comporte des obstacles surprenants... et peut-être insurmontables. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

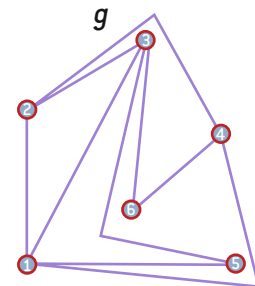
C. Buchheim *et al.*, *Crossings and planarization*, *Handbook of Graph Drawing and Visualization* (éd. R. Tamassia), Chapman & Hall/CRC, 2013.

Y. Yang *et al.*, *The Erdős and Guy conjectured equality on the crossing number of hypercubes*, 2012 : <http://arxiv.org/abs/1201.4700>

L. Beinke et R. Wilson, *The early history of the brick factory problem*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), pp. 41-47, 2010.

P. Erdős et R. Guy, *Crossing number problem*, *American Mathematical Monthly*, vol. 80, pp. 52-58, 1973.

K. Zarankiewicz, *On a problem of P. Turán concerning graphs*, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 41, pp. 137-145, 1954.



Solution de la question posée au début de l'article

□ SCIENCE & FICTION

Pour quelques pattes de plus...



1. LE TRIPÈDE, curieux extraterrestre imaginé par Damon Knight en 1954, a un corps à symétrie radiale, avec trois jambes, trois bras et six yeux.

Les extraterrestres de science-fiction ayant une paire de pattes surnuméraires seraient plus stables, mais ils auraient des difficultés à coordonner les mouvements de tous leurs membres.

**Jean-Sébastien STEYER
et Roland LEHOUCQ**

Face à l'étonnante diversité du vivant sur Terre, comment imaginer une espèce extraterrestre originale ? Une solution souvent adoptée consiste à prendre un vertébré à quatre pattes et à lui ajouter une paire de membres supplémentaires. Les exemples les plus récents sont les martiens humanoïdes à quatre bras de la planète Barsoom dans le film *John Carter* (Andrew Stanton, 2012) et la plupart de la faune du film *Avatar* (James Cameron, 2009) où les equidi, les thanators et autres titanothères ont tous six pattes. Remarquons que ce procédé n'est pas nouveau : le centaure, hybride homme-cheval, le griffon, assemblage d'un aigle et d'un lion, et le cheval ailé (tel Pégase) sont présents dès l'Antiquité. À ceux-ci s'ajoutent les anges, les démons et les dragons occidentaux, mais aussi quelques divinités hindoues. Ces êtres à six membres, ou hexapodes, sont-ils plausibles ?

Sur Terre, la plupart des vertébrés ont soit des nageoires (chez les « poissons »), soit des membres (chez les tétrapodes). Même si la plupart des tétrapodes sont dotés de quatre membres, certains ont perdu leurs pattes : c'est le cas des mammifères aqua-

tiques (cétacés, siréniens) qui ne conservent que deux membres transformés en rames à l'avant, ou encore des serpents et des apodes (groupe d'amphibiens peu connu) qui n'ont plus aucune patte. Si, sur Terre, aucun vertébré n'est hexapode, les « six pattes » existent pourtant : ils regroupent entre autres les insectes et les collembolles qui peuplent les sols. Avec plusieurs millions d'espèces, les hexapodes sont même les organismes les plus nombreux.

Pourquoi un vertébré terrestre ne peut-il être doté de trois paires de membres ? Parce que ses pattes sont issues de nageoires charnues de poissons osseux, transformées il y a plus de 370 millions d'années en membres munis de doigts, aussi nommés membres chirodiens. Nageoires charnues et membres chirodiens sont eux-mêmes issus des ceintures pectorale (formant l'épaule) et pelvienne (formant le bassin), à raison de deux nageoires (ou deux membres) par ceinture. Un vertébré à six pattes comme ceux de science-fiction devrait donc posséder une troisième ceinture osseuse au niveau du tronc, c'est-à-dire un segment supplémentaire.

Cela nécessiterait, au cours de l'embryogenèse, une action différente des gènes architectes (les gènes *Hox*) intervenant dans la segmentation du tronc et l'apparition des ceintures. Or l'organisation de ces gènes est bien plus complexe chez les vertébrés que chez les arthropodes, où une segmentation multiple est pourtant possible, entraînant souvent la multiplication des paires de pattes. C'est le cas des crustacés (qui ont jusqu'à dix pattes), des arachnides (huit pattes), sans oublier les scolopendres et les mille-pattes.

La présence d'un ou plusieurs membres surnuméraires est pourtant possible chez les tétrapodes, mais elle relève d'une malformation nommée polymélie. Chez l'homme, cette grave anomalie touche environ un enfant sur un million. Mais, comme chez l'ischioptère (un fœtus « absorbant » partiellement son jumeau pendant son développement *in utero*), le ou les membres surnuméraires, souvent hypertrophiés ou déformés, ne sont pas des membres fonctionnels. Ainsi, il faudrait des mutations

génétiques considérables pour obtenir un tétrapode à trois ceintures et six membres. De surcroît, une hexapodie fonctionnelle chez un vertébré nécessiterait des changements notables des systèmes musculaire et nerveux, pour coordonner ces membres surnuméraires : comment un cheval hexapode se comporterait-il au galop ?

Les robots à trois pieds

La question de la coordination de six membres est d'ailleurs d'une grande importance pour les roboticiens qui cherchent à réaliser des robots mobiles hexapodes. Chez les cyborgs humanoïdes, le déplacement reste classique : dans *Star Wars*, le général Greivous, féroce ennemi des Jedis, se



2. UN THARK, MARTIEN à six membres du film *John Carter*. Il est doté de deux paires de bras et d'une paire de jambes, ce qui n'est pas la configuration la plus stable, laquelle est celle du trépied.

déplace sur ses deux jambes, mais dispose de deux paires de bras robotiques armés de sabres laser.

Dans le domaine des transports, il y a beaucoup de roues, mais peu de pattes. En roulant sans glisser, la roue consomme peu d'énergie. Si les pattes sont moins économes, elles présentent néanmoins l'avantage de

s'adapter à de nombreux types de terrains. Les robots qui ont six pattes, plutôt que deux ou quatre, sont plus stables durant les déplacements : trois des pattes préparent le pas suivant, tandis que les trois autres stabilisent le robot. Trois pieds permettent d'être stable sur n'importe quel support, aussi irrégulier soit-il. Un tabouret à trois pieds est bien plus stable qu'une chaise à quatre pieds. Damon Knight, critique et auteur de science-fiction, l'avait bien compris : dans *Règle d'or*, une nouvelle publiée en 1954, il crée les « tripèdes », ingénieux extraterrestres hexapodes à symétrie d'ordre trois possédant trois pieds, trois bras et six yeux (voir la figure 1). Notons également que les envahisseurs de *La Guerre des mondes* (H.G. Wells, 1898), les « tripodes », se déplacent sur trois pattes, comme les Raméens si l'on en croit les héros du roman *Rendez-vous avec Rama* d'Arthur Clarke (1972).

Mais revenons aux robots : le biomimétisme est utile pour optimiser leur locomotion. Les insectes sont source d'inspiration, et l'étude de leur comportement et de leur système nerveux apporte de précieuses informations. Ainsi, la marche des insectes est gérée par deux types de contrôle nerveux : le premier commande les mouvements de chacune des pattes, tandis que le second contrôle les différentes allures par le biais des interactions des pattes voisines, les six pattes étant connectées en parallèle.

Les robots hexapodes ont d'ores et déjà montré qu'ils peuvent accomplir des tâches impossibles pour les véhicules équipés de roues. Pourtant les rovers martiens de la NASA ne sont pas encore équipés de pattes ! *Curiosity* est doté de six roues motrices dont quatre sont orientables. La suspension de ce rover et la taille de ces roues lui permettent de franchir des obstacles de 50 centimètres de hauteur ou de profondeur. Mais sa vitesse maximale n'est que de quatre centimètres par seconde... Des robots humanoïdes hexapodes rencontreront-ils un jour les martiens verts de Barsom ? ■

J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. R. LÉHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.

ART & SCIENCE

Origami : de la grue aux structures de l'Univers

L'art japonais du pliage de papier entretient des liens étroits avec les mathématiques, mais aussi avec l'exploration spatiale, les airbags et même la matière noire !

Loïc MANGIN

L'origami est un art ancestral japonais, celui du pliage du papier. Il serait né en Chine et aurait conquis le pays du Soleil levant au VI^e siècle grâce à des moines bouddhistes. Il fut d'abord réservé à des cérémonies religieuses, le prix du papier à cette époque en interdisant un usage courant. Aujourd'hui, l'origami s'est démocratisé et les enfants japonais apprennent à confectionner très tôt l'une des plus célèbres figures, la grue. Cet animal symbolise la paix et une légende locale stipule que : « Quiconque plie 1 000 grues en papier verra son vœu exaucé. »

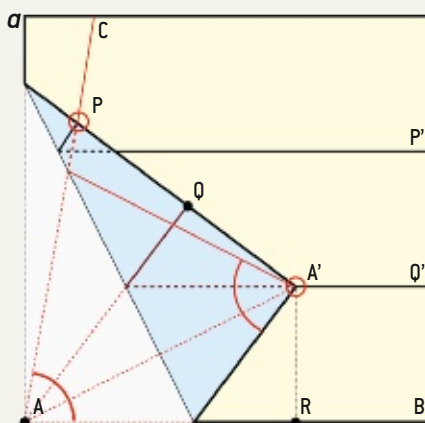
L'origami fut un art de la sculpture réservé aux élites, puis un jeu d'enfants, et est devenu un sujet d'études pour... mathématiciens ! Le point de départ de ce dialogue fructueux entre les deux disciplines fut le langage créé par Akira Yoshizawa (1911-2005) pour coder les pliages en creux, en crête... à l'aide de points, de traits et de flèches. Précisons que Yoshizawa a conçu plus de 50 000 nouveaux modèles d'origami et qu'il fut invité à exposer ses œuvres au Carrousel du Louvre en 1998. Dès lors, on disposait

d'un moyen simple pour transmettre des figures. On pouvait également appliquer des principes mathématiques à l'art du pliage pour en découvrir les lois sous-jacentes. Avant d'en détailler quelques-unes et de voir comment les mathématiques aident à concevoir des figures complexes (voir les

figures e, f, g et h page ci-contre), rappelons que les méthodes de l'origami viennent à bout de trois problèmes géométriques célèbres impossibles à résoudre avec un compas et une règle non graduée : la trisection d'un angle (voir la figure a), la quadrature du cercle et le doublement d'un cube.

Un origami est fondé sur un schéma de pliage (la figure b est celui d'une grue) qui doit obéir à quatre lois : la 2-colorabilité, c'est-à-dire que l'on peut colorier avec deux couleurs toutes les zones sans que deux régions adjacentes aient la même ; à chaque sommet, la différence entre les nombres de crêtes (en noir sur la figure b) et les creux (en marron) est égale à ± 2 ; la somme des angles pris alternativement (1+3+5 ou 2+4+6 sur la figure b) autour d'un sommet est égale à 180 degrés ; enfin, quelle que soit la façon dont s'empilent les différentes parties de la feuille, aucune d'elles ne peut traverser un pli.

Armés de ces quatre lois, abordons un problème pratique : à partir d'un modèle, par exemple un cerf-volant (le coléoptère de la figure c), comment plier une feuille carrée pour en obtenir une représentation (la figure e) ?



LA MÉTHODE DE HISASHI ABE pour la trisection de l'angle CAB. Avant de plier les feuilles, les droites PP' et QQ' sont parallèles à AB, Q et Q' étant les milieux de AP et de BP'. Quand le point P est rabattu sur la droite AC et le point A sur QQ' en A', l'angle A'AB est égal au tiers de CAB.

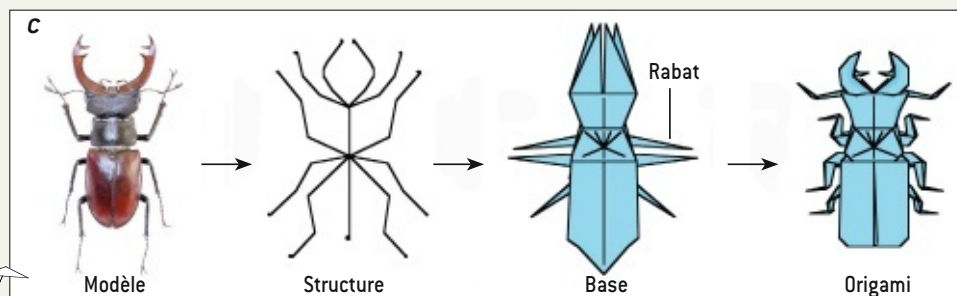
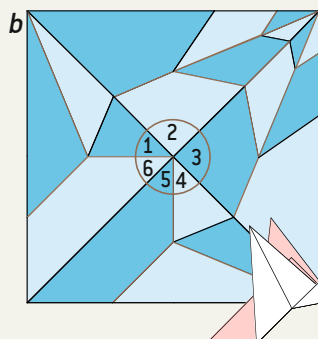


Photo : © Shutterstock/ethyalkohol