

1746, la morte-vivante de la Salpêtrière

Au mois de février 1746, une fille de la campagne d'un tempérament très vigoureux, âgée d'environ 25 ans, partit à pied de l'Hôtel-Dieu de Paris où elle était accouchée la surveillance, et vint à la Salpêtrière. Elle avait craint d'être attaquée d'une maladie qui régnait alors à l'Hôtel-Dieu sur les femmes en couches et qui en fit périr plusieurs. La fatigue du chemin mit cette personne dans un état d'épuisement qui la fit tomber en syncope dès qu'elle fut arrivée et

mise au lit. On la réchauffa extérieurement avec des serviettes chaudes, et on parvint par quelques cordiaux à la faire revenir de sa faiblesse.

Au bout d'une heure, elle retomba dans le même état; et on la crut morte. La sœur du dortoir m'envoya dire qu'il y avait dans son emploi un sujet dont je pouvais disposer pour mes leçons d'anatomie et de chirurgie. Mes élèves ne manquèrent point d'enlever ce sujet, qui enveloppé d'un drap simple, avait déjà passé deux

heures dans une cour, exposé sur un brancard, aux injures de la saison. Ils transportèrent ce corps dans l'amphithéâtre sans l'examiner. Le lendemain matin avant la visite des malades, un jeune chirurgien me dit qu'il avait entendu des sons plaintifs dans l'amphithéâtre, comme si quelqu'un y eut poussé des sanglots et des profonds soupirs; et que la frayeur l'avait empêché de se lever et de venir m'en avertir. J'allai promptement examiner le sujet; je vis avec douleur que

cette pauvre fille, qui alors était véritablement morte, avait fait des efforts pour se débarrasser du drap qui l'enveloppait: elle avait une jambe par terre hors du brancard et un bras appuyé sur la barre du tréteau d'une table à disséquer à côté de laquelle le brancard était posé.

Antoine Louis
Lettres sur la certitude des signes de la mort, où l'on rassure les citoyens de la crainte d'être enterrés vivants, 1752

au diagnostic: déformation ovale de la pupille à la compression (signe de Jodl) ou arrêt de la circulation rétinienne à l'examen à l'ophtalmoscope.

Des épreuves invasives ont aussi été mises au point pour affirmer le diagnostic: piqûres, frictions ou brûlures cutanées dans les régions les plus sensibles du corps visent à produire une réaction douloureuse, signe de vie persistante; la ponction cardiaque consiste à introduire une aiguille en région cardiaque. Immobile, elle témoigne de l'absence de battement cardiaque et donc d'une mort réelle; si au contraire elle s'anime de mouvements – impulsés par les battements du cœur –, l'individu n'est qu'en mort apparente. Parfois même, une incision cardiaque est pratiquée, bien que critiquée: « Un chirurgien qui trouverait le cœur palpitant aurait-il à s'applaudir de son expérience ? » écrit Briand en 1821.

Enfin, des épreuves chimiques font l'objet de publications. Le test à l'hydrogène sulfuré développé par Icard en 1906 consiste à fixer devant les narines du corps un morceau de papier blanc sur lequel ont été tracées à l'avance des inscriptions avec une solution d'acétate neutre de plomb. Initialement invisibles, ces inscriptions se colorent en noir quand l'hydrogène sulfuré produit par le corps en putréfaction débutante (avant même l'apparition de la tache verte abdominale) transforme l'acétate en sulfure de plomb.

La réaction alcaline au tournesol [citée par le médecin légiste Victor Balthazard en 1921] met en évidence l'acidification

des tissus: le médecin réalise une ponction hépatique qu'il dépose sur un papier de tournesol bleu. Ce papier a la propriété de virer au rouge au contact de substances acides. Une ou deux heures après la mort, des taches rose vif commencent à apparaître. La réaction au bleu de bromothymol, citée par Camille Simonin dans son ouvrage *Médecine légale judiciaire* [1946], indique aussi l'acidité des tissus: plus l'acidité est grande, plus le colorant vire au jaune, en passant par le bleu vert et le vert.

Mort cérébrale et arrêt cardiaque

Dans la seconde moitié du XX^e siècle, la définition de la mort évolue. Les connaissances médicales et des techniques de réanimation font entrevoir en la mort un phénomène progressif avec, entre la mort apparente et la mort réelle (qualifiée aussi d'absolue ou de totale), un état intermédiaire: un état de mort apparente où la circulation est suspendue de façon prolongée, sans retour spontané à la vie en l'absence de réanimation. C'est à la même époque qu'est défini l'état de coma dépassé. Se dessine alors la double composante de la mort, que le médecin Léon Dérobert décrit ainsi dans ses *Éléments de médecine légale* [1978]: « L'arrêt des rouages généraux aboutissant à la mort se réduit à deux grands mécanismes: l'arrêt circulatoire et la mort consécutive du cerveau; l'atteinte du cerveau et des centres respiratoires, et l'arrêt secondaire du cœur. »

Le législateur impose des épreuves invasives pour le diagnostic de la mort en milieu hospitalier. Ainsi, la circulaire ministérielle du 3 novembre 1948 stipule que deux médecins doivent, avant de certifier le décès, réaliser une artériotomie radiale, c'est-à-dire sectionner l'artère radiale, avec à disposition tout le matériel pour réaliser une suture artérielle. Le saignement qui en résultait était en jet pulsé si la mort n'était qu'apparente, faible et en nappe en cas de mort réelle. Le médecin devait alors confirmer ce signe avec la section de deux autres artères.

L'épreuve de l'artériotomie était complétée par l'épreuve à la fluorescéine d'Icard. Celle-ci fut remplacée en 1958 par le signe de l'éther de Rebouillat: après injection sous-cutanée de un à deux millilitres d'éther, la solution ressortait en jet lors du retrait de l'aiguille en cas de mort réelle, et diffusait dans les tissus en cas de mort apparente.

Aujourd'hui, ces tests sont tombés en désuétude. Le diagnostic de la mort n'est plus du ressort du médecin légiste, mais du réanimateur, grâce à l'électrocardiogramme, aux tests paracliniques réalisables désormais lors des interventions extra-hospitalières et après manœuvres de réanimation sur une durée qui varie selon le délai de prise en charge, la cause supposée de l'arrêt cardiaque, l'âge du sujet et ses antécédents. La question n'est plus « Est-il bien mort ? », mais « Quand est-il mort ? ». L'intervention du médecin légiste n'a d'intérêt que pour dater la mort et rechercher des signes de mort suspecte. ■

LOGIQUE & CALCUL

Le problème de la fabrique de briques

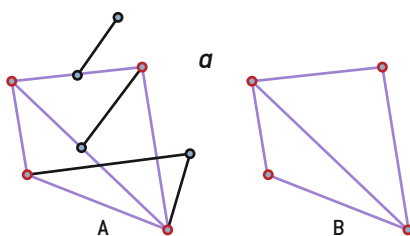
En poussant des chariots de briques, en dessinant des réseaux urbains ou des circuits électroniques, on est confronté au difficile problème du nombre de croisements dans un graphe.

Jean-Paul DELAHAYE

Dessinez cinq points sur une feuille, puis essayez de les joindre deux à deux par des courbes en évitant que deux courbes ne se croisent : vous n'y arrivez pas. Et si vous tentiez plutôt de joindre trois points A, B, C à trois autres D, E, F sans croisement ? Vous n'y arrivez pas non plus ! Et l'on peut démontrer ces impossibilités (voir l'encadré 2)...

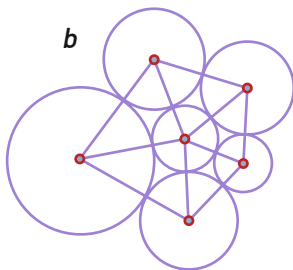
Le premier problème revient à établir que K_5 (le graphe à cinq nœuds où chacun est relié à tous les autres) n'est pas un graphe planaire, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le dessiner sur le plan sans croisement. Le second consiste à démontrer que $K_{3,3}$ (le graphe obtenu en reliant trois points à trois autres de manière systématique) n'est pas un graphe planaire. C'est un vieux problème de divertissement mathématique popularisé par l'Américain Sam Loyd en 1903, mais dont l'origine est sans doute plus ancienne. On le présente en général sous la forme suivante : trois maisons s'abonnent chacune au gaz, à l'électricité et à l'eau ; les canalisations reliant les maisons et les fournisseurs peuvent-elles ne pas se croiser ?

Derrière leur aspect innocent, ces énigmes cachent des problèmes difficiles, des conjectures que personne ne sait prouver et des questions algorithmiques ayant un réel intérêt pratique pour le dessin des circuits électroniques ou la représentation optimale de réseaux en informatique.



Il est tout à fait remarquable que les deux graphes non planaires envisagés plus haut (K_5 et $K_{3,3}$) soient caractéristiques de la « non-planarité ». Un théorème démontré par le Polonais Casimir Kuratowski en 1929 affirme en effet qu'un graphe est planaire si et seulement si l'on ne peut en extraire aucun graphe de type K_5 ou $K_{3,3}$ (un graphe B est extrait d'un graphe A si, en enlevant des arcs et des nœuds à A, on trouve le dessin de B, voir la figure a).

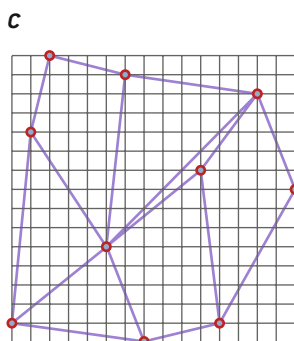
Dit autrement : si un graphe n'est pas planaire, on y trouve l'un des deux graphes K_5 ou $K_{3,3}$ (ou les deux), et si c'est impossible alors il est planaire.



Des cercles tangents

Un théorème très surprenant sur les graphes planaires a été démontré par l'Allemand Paul Koebe en 1936. Il indique qu'un graphe est planaire si et seulement si c'est « un graphe de pièces de monnaie », c'est-à-dire si et seulement si l'on peut trouver des pièces de monnaie de diamètres variés qui, serrées les unes contre les autres, dessinent le graphe en question, les centres des pièces étant les nœuds du graphe et un arc joignant chaque couple de pièces en contact (voir la figure b).

On déduit du théorème de Koebe un autre théorème inattendu démontré indépendamment quelques années plus tôt par le mathématicien d'origine hongroise István Fáry : un graphe est planaire si et seulement si on peut le dessiner sur un plan en reliant



les nœuds par des segments de droite qui ne se croisent pas. Aussi compliqué que soit un graphe planaire, on peut toujours le dessiner sur un plan sans recourir à des arcs courbes.

On connaît des algorithmes rapides (dont le temps de calcul est proportionnel au nombre d'arcs) qui déterminent automatiquement le dessin des graphes planaires avec des segments de droite. De plus, certains d'entre eux n'utilisent, pour poser les nœuds, que les points d'une grille carrée de côté m , où m est le nombre d'arcs du graphe planaire [voir la figure c]. Ces algorithmes sont utiles pour le dessin des circuits électroniques où l'on évite que les fils d'un circuit se croisent.

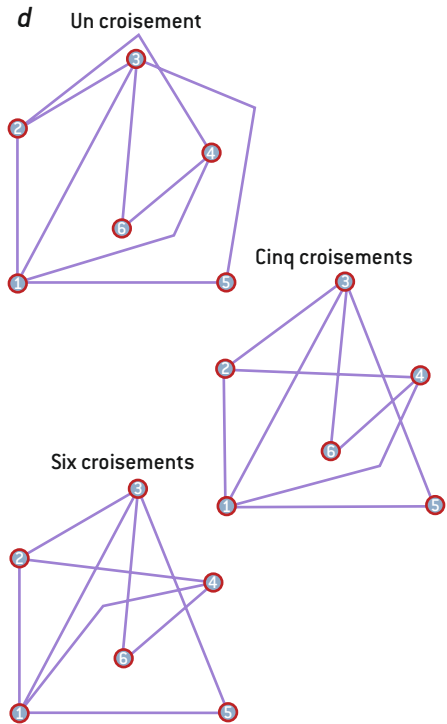
Faire au mieux

Pour les graphes non planaires, se pose une intéressante question : comment le disposer sur le plan de façon à avoir le moins de croisements possibles ? La meilleure disposition d'un graphe G sur le plan possède un nombre minimum de croisements noté $cr[G]$. Le nombre minimum de croisements

de K_5 est 1, de même que celui de $K_{3,3}$ (ils ne sont pas planaires et on sait les disposer de façon à ce qu'il n'y ait qu'un seul croisement). Qu'en est-il pour K_6 , K_7 , et plus généralement pour K_n (le graphe complet à n nœuds) et $K_{n,m}$ (le graphe reliant n points à m autres points des nm façons possibles) ? Nous verrons que ces énigmes sont d'une incroyable difficulté.

Un même graphe peut être dessiné plus ou moins adroitement et présenter un nombre de croisements plus ou moins grand. La figure d ci-contre montre le même graphe dessiné avec un, cinq ou six croisements. Si vous regardez attentivement ce graphe, vous n'y trouverez ni K_5 ni $K_{3,3}$; c'est donc qu'il est planaire et qu'on peut le dessiner sans aucune intersection. Cherchez ce dessin sans croisement [voir la figure g en fin d'article].

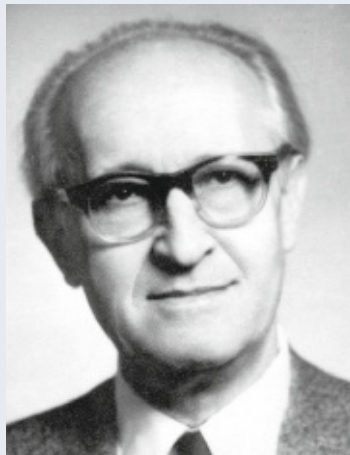
Pour être certain qu'il n'y ait pas de malentendu, nous décrirons les règles de constitution des graphes et du décompte des croisements. Les graphes que nous considérons sont non orientés : l'arc AB, est le même que l'arc BA. Par définition,



1. Turán et le début du problème des intersections

Dans une lettre à son collègue Richard Guy, le mathématicien hongrois Paul Turán (1910-1976) explique comment le problème du nombre de croisements lui est venu à l'esprit, et à quel point il fut concrètement important pour lui à un certain moment de son existence.

« En 1944, notre groupe de travail [...] travaillait dans une fabrique de briques près de Budapest. Notre tâche consistait à transporter des briques à l'aide de petits wagons qui roulaient sur des rails, pour les déplacer des fours où elles étaient cuites vers des entrepôts disposant de places pour les recevoir. Comme il était impossible de savoir à l'avance quels entrepôts seraient libres, chaque four était relié à chaque entrepôt. Nous devions déplacer un nombre fixé de wagons chaque jour, aussi avions-nous intérêt à être aussi efficaces que possible. Après avoir chargé les



wagons dans la chaleur des fours, nous les déplaçons doucement et sans trop d'effort.

Le seul problème provenait des croisements, car ils provoquaient des déraillements qui faisaient tomber les briques, ce qui nous donnait du travail supplémentaire et nous faisait



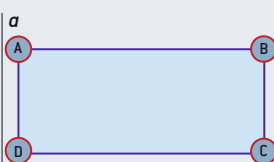
perdre du temps. Ayant eu à pâtir de cela, je me demandais vraiment pourquoi le réseau de rails avait été dessiné de manière aussi peu économique en nombre de croisements. Diminuer leur nombre aurait grandement amélioré la productivité de la fabrique. »

La question du nombre minimum de croisements d'un graphe devint un sujet de recherche mathématique sérieux. Une bibliographie recensant 566 articles liés à ce sujet a été publiée en 2007. Depuis, quelques dizaines d'articles sont venus s'ajouter à l'énorme liste.

2. Aucun des graphes K_5 et $K_{3,3}$ n'est planaire

Démontrons que le graphe K_5 n'est pas planaire. Commençons par placer quatre nœuds A, B, C et D sur le plan. Traçons des arcs de A à B, de B à C, de C à D et de D à A, sans croisement. C'est bien sûr possible, mais cela impose de créer deux zones distinctes du plan, l'une intérieure en bleu clair sur la figure a ci-contre, l'autre extérieure (en gris).

En joignant maintenant B à D, nous divisons l'une des zones en deux, et nous obtenons trois zones (figure b). Tout en traçant ces cinq premiers arcs découpe de la même façon le plan en trois zones (faites des essais pour constater que toutes les méthodes conduisent à la même situation). En joignant maintenant A à C, nous divisons encore inévitablement l'une des zones en deux, et nous obtenons un graphe comme celui de la figure c comportant quatre zones correspondant respec-



tivement aux quatre triplets possibles BCD, ACD, ABD et ABC.

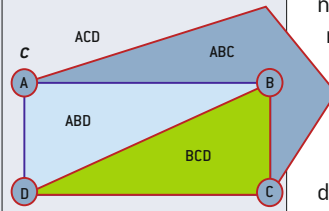
Quelle que soit la façon dont on aura placé les points A, B, C et D et les arcs les reliant deux à deux, la situation sera identique : nous aurons le point A

à l'extérieur de la zone BCD, le point B à l'extérieur de la zone ACD, le point C à l'extérieur de la zone ABD et le point D à l'extérieur de la zone ABC. Si vous en doutez, reprenez le dessin et vous serez vite persuadé que tous les dessins possibles conduisent à cette situation inévitable.



Pour représenter K_5 comme un graphe planaire, il faut placer un cinquième point E et le relier sans croisement à A, B, C et D. C'est impossible, car si E est dans la zone BCD, il ne pourra être relié à A sans croisement. S'il est en ACD, il ne pourra être relié à B sans croisement. S'il est en ABD, il ne pourra être relié à C sans croisement. S'il est en ABC, il ne pourra être relié à D sans croisement. Il n'existe aucune façon de dessiner le graphe K_5 sans croisement !

Un raisonnement similaire est facile à concevoir pour $K_{3,3}$. On commencera par placer trois maisons et deux services, cela détermine trois zones dont aucune ne convient pour le troisième service.



avec r croisements pour une certaine disposition des nœuds sur le plan, en déplaçant continûment les nœuds et les arcs (qu'on allonge et déforme si nécessaire), il y aura un dessin des arcs avec r croisements pour toute autre disposition des nœuds.

Un exemple est donné sur la figure e. En déplaçant les nœuds du graphe et en faisant suivre les arcs (sans créer ni supprimer de croisement), on passe continûment d'un dessin à l'autre en conservant le nombre de croisements. Le dessin de départ comporte un croisement (entre les arcs BD et CE), il en comportera un (entre les arcs BD et CE) à l'arrivée. Le nombre minimal de croisements d'un graphe ne dépend donc pas de l'emplacement des nœuds.

D'après le théorème de Fáry, tout graphe planaire se dessine sans croisement en représentant les arcs par des segments de droite. Il est donc naturel de se demander, pour les graphes non planaires, si le nombre minimum de croisements est le même quand on impose que les arcs soient des segments de droite, et quand on ne l'impose pas. La réponse est non, en général. De ce fait, on nomme « nombre minimum de croisements rectilignes » du graphe G , et on note $cr'(G)$, le nombre minimum de croisements obtenus en dessinant des segments de droite pour les arcs. On a bien sûr $cr(G) \leq cr'(G)$. Le graphe le plus simple pour lequel $cr(G)$ et $cr'(G)$ sont différents est le graphe K_8 ; il se dessine avec 18 croisements si l'on n'impose pas aux arcs d'être des segments de droite ($cr(K_8) = 18$, voir l'encadré 3) et il oblige à 19 croisements au minimum quand on veut que tous les arcs soient des segments de droite ($cr'(K_8) = 19$).

Euler vient à l'aide

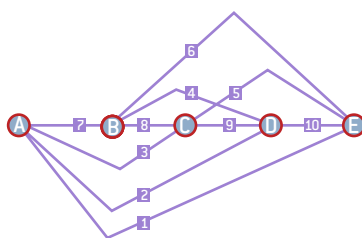
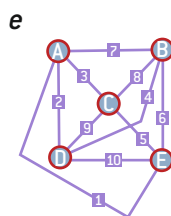
Parmi les énoncés généraux concernant $cr(G)$, l'un conduit à une inégalité utile à partir de la « formule d'Euler » pour les graphes planaires. Cette formule indique que si un graphe est planaire et d'un seul tenant ou « connexe » (en suivant les arcs, on peut joindre deux nœuds quelconques), alors le nombre n de nœuds du graphe, le nombre a d'arcs et le nombre f de faces (les zones que

dans un graphe, deux nœuds sont reliés une fois au plus. Un graphe est donc déterminé par l'ensemble de ses nœuds (par exemple $\{A, B, C, D\}$) et de ses arcs (par exemple $\{AB, AD, BC, BD\}$).

Quand on dessine un graphe sur un plan et que l'on compte les croisements, on le fait de telle façon que :

- au plus deux arcs du graphe se croisent en un même point (lorsque ce n'est pas le cas, on s'y ramène en déplaçant légèrement le dessin d'un arc) ;
- on interdit à un arc reliant A et B de se croiser lui-même ;
- enfin, on interdit à un arc reliant A et B de passer par des nœuds du graphe autres que ses extrémités A et B.

Il résulte de tout cela que l'emplacement des nœuds du graphe G sur le plan est sans importance pratique pour la valeur de $cr(G)$. En effet, s'il existe un dessin des arcs de G



LE NOMBRE MINIMAL DE CROISEMENTS
dans un graphe ne dépend pas de l'emplacement des nœuds : on peut ainsi passer continûment du dessin du haut à celui du bas.

le graphe dessiné sur le plan, y compris la zone extérieure] vérifient : $f = 2 - n + a$. La formule se démontre en partant d'un graphe réduit à un seul nœud ($f = 1, n = 1, a = 0$) et en ajoutant étape par étape soit un nouveau nœud avec un arc le reliant à la partie déjà construite sans créer de nouvelles faces (n et a augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité), soit un nouvel arc reliant deux nœuds déjà présents et créant une nouvelle face (f et a augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité).

Dans les graphes que nous considérons, une face est entourée d'au moins trois arcs, car si une face n'était entourée que de deux arcs, il y aurait deux fois le même arc, ce qui n'est pas autorisé. Chaque arc est sur la frontière de deux faces exactement. Pour entourer les f faces, il faut donc $3f/2$ arcs au moins, d'où $3f/2 \leq a$. En combinant avec

la formule d'Euler, on a $2 - n + a \leq 2a/3$, ou encore $a \leq 3n - 6$; en particulier, un graphe planaire ne possède jamais un nombre d'arcs supérieur à trois fois le nombre de nœuds.

Considérons maintenant un graphe non planaire G ayant C croisements. En enlevant un à un des arcs qui en rencontrent d'autres, on supprime tous les croisements et on arrive donc, après avoir enlevé C arcs, à un graphe planaire vérifiant l'inégalité vue plus haut qui s'écrit maintenant $(a - C) \leq 3n - 6$. Cela donne, pour $n > 2$, l'inégalité $C \geq a - 3(n - 2)$.

Cette inégalité indique un nombre minimum de croisements pour un graphe ayant n nœuds et a arcs. Si par exemple un graphe comporte 55 arcs et 15 nœuds, on sait qu'il aura au moins $55 - 3 \times 13 = 16$ croisements. Cela ne signifie pas qu'on arrivera à dessiner le graphe avec 16 croisements, car l'inégalité ne prétend pas donner le

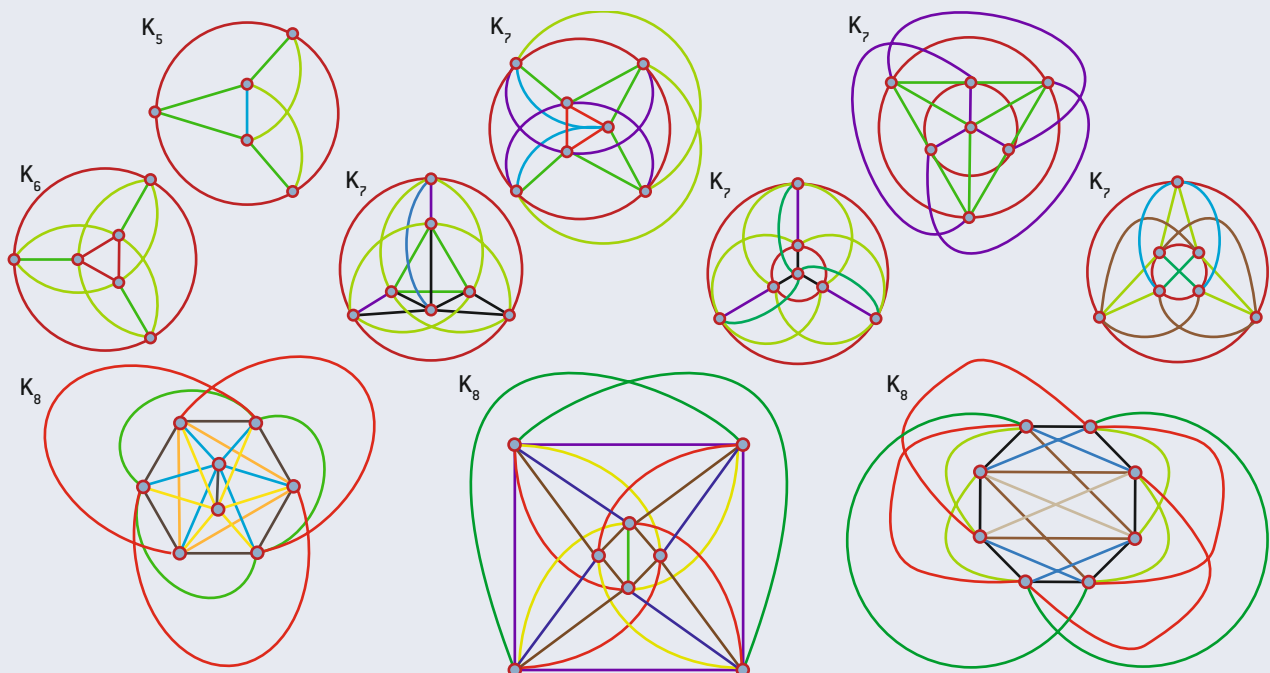
nombre exact de croisements du meilleur dessin, mais un minorant du minimum de croisements inévitables.

En menant d'autres raisonnements, cette inégalité a été améliorée de plusieurs façons, chacune ayant son intérêt selon le graphe considéré : $C \geq 7a/3 - 25(n - 2)/3$; $C \geq 3a - 35(n - 2)/3$; $C \geq 4a - 103(n - 2)/6$; $C \geq 5a - 25(n - 2)$ quand $n > 2$, et $C \geq a^3/(64n^2)$ quand $a \geq 4n$.

Preuves et conjectures

Ces inégalités sont certes utiles, mais, au moins dans le cas des graphes simples, on aimerait disposer d'égalités, c'est-à-dire de formules indiquant le nombre minimum de croisements $cr(G)$ qu'on peut obtenir et la façon d'y arriver. Le plus simple des graphes à n nœuds est le graphe complet

3. Les meilleurs dessins des graphes K_5 , K_6 , K_7 et K_8



La notation K_n désigne le graphe complet à n nœuds : chaque nœud est relié à tous les autres. Trouver la manière de dessiner ces graphes de façon à limiter le nombre de croisements des arcs reliant les nœuds est loin d'être facile et aucune méthode générale permettant de concevoir les dessins optimaux n'est connue. Les dessins ci-dessus sont les meilleurs possibles pour les graphes K_5 , K_6 , K_7 , K_8 .

Pour les deux dernières valeurs, plusieurs dispositions (topologiquement différentes) donnent le même nombre minimum de croisements. Ces solutions ont été trouvées par Richard Guy et redessinées par Francesco de Comitè, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille. Aujourd'hui la question du nombre minimum de croisements des graphes complets n'est résolue que pour $n \leq 12$.

où chaque nœud est lié à tous les autres. On le note K_n et il possède $n(n-1)/2$ arcs. Que sait-on de $cr(K_n)$?

Une formule proposée il y a bientôt 50 ans par Thomas Saaty et Richard Guy indique que $cr(K_n)$ est égal à $Z(n)$, soit $1/4 \lfloor n/2 \rfloor \lfloor (n-1)/2 \rfloor \lfloor (n-2)/2 \rfloor \lfloor (n-3)/2 \rfloor$, où les doubles crochets désignent la fonction partie entière (par exemple, $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$).

Cela donne les valeurs :

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$cr(K_n)$	0	1	3	9	18	36	60	100	150	225	315	441	588

Cette formule semble bien fonctionner... mais personne n'a su la démontrer ! Il s'agit donc d'une conjecture. On a seulement pu établir que $cr(K_n)$ est inférieur ou égal à $Z(n)$. L'égalité a été démontrée jusqu'à $n = 12$, mais cela a demandé un travail considérable. La difficulté provient de ce qu'il existe un très grand nombre de façons de dessiner le graphe K_n sur le plan et qu'il faut surtout ne pas en manquer pour identifier les dessins conduisant à un nombre minimal de croisements.

Les dessins optimaux (voir l'encadré 3) pour K_5 et K_6 ne sont pas trop difficiles à trouver. Pour K_7 et K_8 , cela devient plus subtil, car il n'y a pas unicité de la solution donnant le nombre minimum de croisements. L'idée de

L'ÉNIGME DU CROISEMENT
des arcs d'un graphe
montre que des thèmes que tout
le monde peut comprendre
concentrent parfois en eux
toutes les difficultés possibles.

trouver une disposition optimale de proche en proche en utilisant celle de K_{n-1} pour trouver celle de K_n est mauvaise, car, dans certains cas, les dessins optimaux pour une valeur de n ne contiennent aucun dessin optimal pour $n-1$. Aussi, aller au-delà de 12 est un défi informatique et mathématique.

À défaut d'une démonstration de l'inégalité $cr(K_n) \geq Z(n)$, les mathématiciens ont réussi récemment à démontrer que $cr(K_n) \geq 0,86Z(n)$, inégalité qui s'en approche.

Le nombre chromatique d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs différentes qu'il faut utiliser pour colorier les nœuds du graphe sans que deux nœuds voisins ne soient de la même couleur ; on le note $chr(G)$. On sait, d'après le fameux théorème des quatre couleurs démontré en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken, que pour tout graphe planaire, quatre couleurs suffisent ; autrement dit, si G est planaire, $chr(G) \leq 4$.

Une belle conjecture due à Michael Albertson relie $cr(K_n)$ et $chr(G)$: si G a pour nombre chromatique n , alors son nombre de croisements minimum $cr(G)$ est au moins celui de K_n : $[chr(G) = n] \Rightarrow [cr(G) \geq cr(K_n)]$.

En 2009, les Hongrois János Barát et Géza Tóth l'ont démontrée jusqu'à $n = 16$. Là encore, on voit que les connaissances dont nous disposons sont remarquablement... limitées.

Une autre conjecture du mathématicien hongrois György Hajós affirmait que si le graphe G exige au moins n couleurs ($chr(G) \geq n$), alors G contient le graphe K_n . On a pu l'établir pour $n = 1, 2, 3, 4$. Contrairement aux précédentes conjectures, on a réussi à traiter presque tous les cas... pour finalement montrer que la conjecture est fausse pour tout $n \geq 7$. Les cas $n = 5$ et $n = 6$ restent en suspens.

Graphe de trois maisons et trois services

Le graphe reliant trois maisons aux trois services (gaz, électricité, eau), qui est la base du problème de Sam Loyd, a une forme plus générale : n nœuds sont reliés à m autres

4. Les trois maisons et les trois services

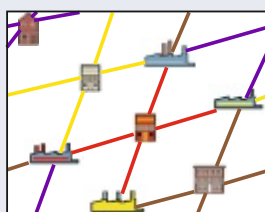
L'alimentation de trois maisons en eau, gaz et électricité est un divertissement mathématique dont l'origine, mal connue, est sans doute antérieure au XX^e siècle.

Il n'a pas de solution sans croisement, car $K_{3,3}$ n'est pas



planaire. En revanche, quelques astuces permettent de concevoir des pseudo-solutions. Trouvez pourquoi la figure ci-dessus, tirée de http://www.archimedes-lab.org/How_to_Solve/Water_gas.html n'est pas une vraie solution.

Quand, à la place d'un plan, on considère un tore (qu'on obtient en recollant deux à deux les côtés opposés d'un carré), alors non seulement le problème de dessiner sans croisement $K_{3,3}$ possède une solution, mais c'est aussi le cas pour $K_{4,4}$.



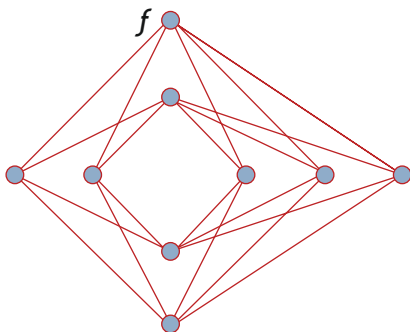
nœuds de toutes les façons possibles (il y en a nm). On note $K_{n,m}$ ce graphe et, bien sûr, on aimerait connaître le nombre minimum de croisements de $K_{n,m}$. C'est à ce graphe et au calcul de $cr(K_{n,m})$ que le mathématicien hongrois Paul Turán s'intéressa dans son camp de travail en 1944.

Voici quelques valeurs de $cr(K_{n,m})$, en fonction de n et de m , connues aujourd'hui :

$n \backslash m$	3	4	5	6	7
3	3	2	4	6	9
4	2	4	8	12	18
5	4	8	16	24	36
6	6	12	24	36	54

En 1952, une solution générale au problème que Turán avait fait connaître autour de lui fut proposée par Kazimierz Urbanik et Kazimierz Zarankiewicz. Ils prétendaient prouver que $cr(K_{n,m})$ est égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. Treize ans après, on s'aperçut que le résultat était faux. Des preuves initiales, seule reste l'inégalité selon laquelle $cr(K_{n,m})$ est inférieur ou égal à l'expression ci-dessus. Si nul n'a réussi à prouver que l'égalité est vraie, aujourd'hui aucun contre-exemple n'en a été proposé, et on a donc... une conjecture de plus.

La démonstration de l'inégalité n'est pas très difficile, car elle consiste à disposer le graphe en plaçant sur une ligne horizontale les n premiers nœuds, et sur une ligne verticale les m autres nœuds, de façon à équilibrer le mieux possible les parties haute et basse et les parties droite et gauche. La figure f ci-dessous est un exemple pour $K_{4,5}$:



Pour illustrer à quel point ces problèmes sont difficiles et les conjectures incertaines, mentionnons encore le cas du graphe Q_n

de l'hypercube à n dimensions. En 1973, R. Guy et Paul Erdős proposèrent la formule : $cr(Q_n) = \{5 \times 4^n / 32 - 2^{n-2} \lfloor (n^2 + 1)/2 \rfloor\}$.

Pendant plus de 40 ans, elle a semblé correcte. Pourtant, Yuansheng Yang, Guoqing Wang, Haoli Wang et Yan Zhou, de l'Université de Dalian en Chine, trouvèrent en 2012 un contre-exemple pour $n = 7$ et toutes les valeurs supérieures. La conjecture est donc archaïque !

Imposer aux arcs d'être des segments de droite, nous l'avons dit, conduit à un problème différent, celui du calcul de $cr(G)$. Il se trouve qu'il est un peu plus facile, car le nombre de dessins différents à envisager est plus petit. Dans le cas du graphe K_n , les valeurs calculées et vérifiées vont jusqu'à $n = 27$ et on connaît en plus la valeur pour $n = 30$.

Peu d'espoir de pouvoir aller loin

En fait, les difficultés rencontrées sont peu étonnantes, car on sait depuis longtemps que le problème du calcul de $cr(G)$ est un problème de la classe NP-difficile. Cela signifie que si l'on savait le résoudre efficacement, alors on saurait aussi résoudre efficacement une grande famille de problèmes combinatoires difficiles, ce qui est plus qu'improbable. Cela n'empêche pas des progrès concrets en matière d'algorithmes.

On sait maintenant produire des dessins utiles en pratique pour des graphes de circuits comportant plusieurs centaines de nœuds. L'une des méthodes utilisées est la « planarisation » : on extrait du graphe un graphe planaire aussi grand que possible en ne retenant que certains arcs, et on ajoute ensuite avec précaution les arcs qui manquent en tentant de minimiser le nombre de croisements créés.

L'énigme du croisement des arcs d'un graphe montre que des thèmes de recherche que tout le monde peut comprendre concentrent parfois en eux toutes les difficultés possibles, et prouve une fois de plus que le monde mathématique, même là où on s'y attend le moins, comporte des obstacles surprenants... et peut-être insurmontables. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

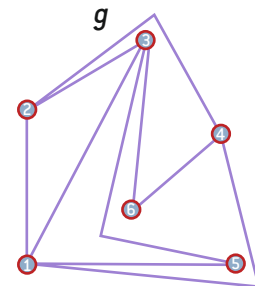
C. Buchheim *et al.*, *Crossings and planarization*, *Handbook of Graph Drawing and Visualization* (éd. R. Tamassia), Chapman & Hall/CRC, 2013.

Y. Yang *et al.*, *The Erdős and Guy conjectured equality on the crossing number of hypercubes*, 2012 : <http://arxiv.org/abs/1201.4700>

L. Beinke et R. Wilson, *The early history of the brick factory problem*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), pp. 41-47, 2010.

P. Erdős et R. Guy, *Crossing number problem*, *American Mathematical Monthly*, vol. 80, pp. 52-58, 1973.

K. Zarankiewicz, *On a problem of P. Turán concerning graphs*, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 41, pp. 137-145, 1954.



Solution de la question posée au début de l'article

SCIENCE & FICTION

Pour quelques pattes de plus...



1. LE TRIPÈDE, curieux extraterrestre imaginé par Damon Knight en 1954, a un corps à symétrie radiale, avec trois jambes, trois bras et six yeux.

Les extraterrestres de science-fiction ayant une paire de pattes surnuméraires seraient plus stables, mais ils auraient des difficultés à coordonner les mouvements de tous leurs membres.

**Jean-Sébastien STEYER
et Roland LEHOUCQ**

Face à l'étonnante diversité du vivant sur Terre, comment imaginer une espèce extraterrestre originale ? Une solution souvent adoptée consiste à prendre un vertébré à quatre pattes et à lui ajouter une paire de membres supplémentaires. Les exemples les plus récents sont les martiens humanoïdes à quatre bras de la planète Barsoom dans le film *John Carter* (Andrew Stanton, 2012) et la plupart de la faune du film *Avatar* (James Cameron, 2009) où les equidi, les thanators et autres titanothères ont tous six pattes. Remarquons que ce procédé n'est pas nouveau : le centaure, hybride homme-cheval, le griffon, assemblage d'un aigle et d'un lion, et le cheval ailé (tel Pégase) sont présents dès l'Antiquité. À ceux-ci s'ajoutent les anges, les démons et les dragons occidentaux, mais aussi quelques divinités hindoues. Ces êtres à six membres, ou hexapodes, sont-ils plausibles ?

Sur Terre, la plupart des vertébrés ont soit des nageoires (chez les « poissons »), soit des membres (chez les tétrapodes). Même si la plupart des tétrapodes sont dotés de quatre membres, certains ont perdu leurs pattes : c'est le cas des mammifères aqua-

© Marc Boulay, www.cossima-productions.com