

Si par exemple vous séparez en deux un paquet de huit cartes, cette loi binomiale indique que vous aurez la séparation 4-4 dans 27,4 % des cas, la séparation 3-5 (ou 5-3) dans 21,9 % des cas, la séparation 2-6 (ou 6-2) dans 10,9 % des cas, la séparation 1-7 (ou 7-1) dans 3,1 % des cas, et la séparation 0-8 (ou 8-0) dans 0,4 % des cas. Le dernier cas est un peu étrange, mais l'exclure ne changerait pas grand-chose.

Pour l'insertion des deux paquets obtenus l'un dans l'autre, le modèle de Gilbert et Shannon est, à nouveau, aussi simple et naturel que possible : lorsqu'on intercale un paquet A de p cartes dans un paquet B de p' cartes, la probabilité pour que la première carte du nouveau paquet soit la carte au-dessus de A est $p/(p+p')$, et elle est de $p'/(p+p')$ que ce soit la carte au-dessus de B. La même idée est reprise quand une ou plusieurs cartes sont déjà déterminées en tête du nouveau paquet, et qu'il reste à insérer deux paquets devenus plus petits.

Des expériences réalisées par P. Diaconis en 1988 ont confirmé que le modèle de Gilbert et Shannon est satisfaisant et constitue donc une bonne modélisation mathématique, un peu idéalisée mais pas trop, de ce qu'on fait quand on effectue le mélange américain. Restait à exploiter ce modèle pour évaluer le nombre de mélanges nécessaires à une mise en désordre convenable du jeu de cartes.

La solution a été publiée en 1992 par Dave Bayer et P. Diaconis (toujours lui !). Elle se fonde sur une élégante idée mathématique. D'abord, on considère une généralisation du mélange américain et de son modèle théorique : au lieu de séparer le paquet initial en deux, on le sépare en a sous-paquets qui sont ensuite insérés simultanément les uns dans les autres. Plus précisément, le nouveau paquet est constitué en prenant les cartes une à une avec des probabilités proportionnelles aux nombres de cartes de chaque paquet. Le modèle mathématique de cette généralisation reprend les mêmes idées que pour le mélange américain avec une séparation en deux. Un tel mélange, qui demanderait en pratique de disposer de a mains, se dénomme a -mélange américain.

Ensuite, et c'est la clef de tout, les chercheurs ont montré qu'effectuer un a -mélange américain suivi d'un b -mélange américain équivaut à réaliser un ab -mélange américain. Ce beau résultat permet d'affirmer que réaliser k fois un mélange américain habituel (c'est-à-dire un 2-mélange américain) revient à effectuer un 2^k -mélange américain. Grâce à cette vision simplifiée de ce qu'est l'opération de mélange américain répétée k fois, il devient possible de connaître la probabilité exacte que k mélanges américains consécutifs produisent un ordre donné, ce qui permet alors de savoir si l'on s'est assez approché du mélange idéal, où chaque ordre possible a une probabilité $1/n!$.

Une formule inattendue

La formule mesurant la qualité du mélange obtenu après un a -mélange américain est remarquable et il est même étonnant qu'une formule aussi simple existe pour décrire l'effet d'une manipulation plutôt compliquée. Voici le résultat et la formule :

La probabilité d'obtenir l'ordre Q , par exemple $Q = [3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$, après un a -mélange américain d'un paquet de n cartes est : $C(a+n-sm(Q), n)/a^n$.

Dans cette formule, C désigne comme précédemment les coefficients du binôme de Newton et $sm(Q)$ est le nombre de suites montantes dans la décomposition de Q en suites montantes. Pour notre exemple, $sm(Q)$ vaut 4, car $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$ se décompose en quatre suites montantes : $[3, 8]$, $[5]$, $[2, 4, 6, 7]$, $[1]$.

Voyons une application de la belle formule de Bayer et Diaconis. Partant d'un paquet classé $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ et opérant un 2-mélange américain trois fois de suite, ce qui équivaut à un 8-mélange américain (donc $a=8$), on obtiendra l'ordre $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$, avec une probabilité $C(8+8-4, 8)/8^8 = 12/(8! \cdot 8^8) = 2,95 \times 10^{-5}$.

C'est assez proche du $1/8!$ attendu, égal à $2,48 \times 10^{-5}$. L'écart entre la probabilité d'obtenir $[3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1]$ que donnerait un mélange idéal ($1/8!$) et celle que donne le 2-mélange américain effectué trois fois est de $0,47 \times 10^{-5}$. Bien sûr, une série de mélanges américains ne sera satisfaisante que si l'écart entre le $1/n!$ attendu et la probabilité d'avoir l'ordre Q est petit en moyenne quand Q varie, ou mieux, si on obtient une somme assez petite quand on additionne tous les écarts pour les $n!$ ordres possibles.

Cette somme mesure si un mélange américain appliqué k fois est acceptable. Pour que le maximum possible de cette distance soit 1 (ce qui est un repère commode), on calcule la distance d'un mélange américain au cas idéal (où tous les ordres sont équiprobables) en calculant la demi-somme de tous les écarts possibles. Le tableau de résultats ci-dessous, calculé par D. Bayer et P. Diaconis, indique, pour un paquet de n cartes et pour une opération de mélange américain réalisée k fois, la distance obtenue avec le mélange idéal : quand la distance est proche de 1, le mélange est mauvais ; plus la distance est petite, meilleur il est.

Lorsque la distance est inférieure à $1/10$, le mélange est jugé convenable : en moyenne,

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	1,000	1,000	0,999	0,775	0,437	0,231	0,114	0,056	0,028	0,014
32	1,000	1,000	1,000	1,929	0,597	0,322	0,164	0,084	0,042	0,021
52	1,000	1,000	1,000	1,000	0,924	0,614	0,334	0,167	0,085	0,043
78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,893	0,571	0,307	0,153	0,078
104	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,988	0,772	0,454	0,237	0,119
208	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,914	0,603	0,329
312	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,883	0,565

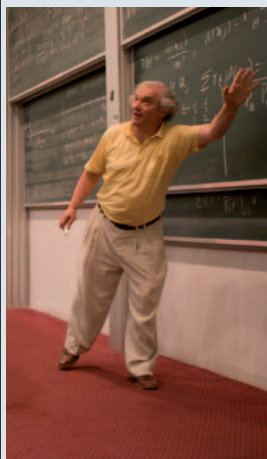
CE TABLEAU INDIQUE, POUR UN PAQUET DE N CARTES et un mélange américain réalisé k fois, la distance séparant le résultat obtenu de celui du mélange idéal, où tous les ordres ont la même probabilité $1/n!$ d'apparaître.

Persi Diaconis, magicien et mathématicien

Persi Diaconis mène des travaux de recherche mathématique aussi bien au sujet des mélanges déterministes qu'au sujet des mélanges aléatoires de cartes. Ils s'est aussi intéressé à la physique du pile ou face. Ses résultats ont fait progresser considérablement nos connaissances sur les mélanges de cartes.

Son parcours professionnel est assez singulier. Il est né en 1945. À l'âge de 14 ans, il quitte sa famille pour suivre le prestidigitateur canadien Dai Vernon qui le forme et fait de lui un magicien professionnel. Il pratique le métier durant une dizaine d'années sous le nom de Persi Warren. En 1971, comme il se l'était

promis, il reprend ses études... et y réussit assez bien, puisqu'il soutient une thèse à l'Université Harvard en 1974.

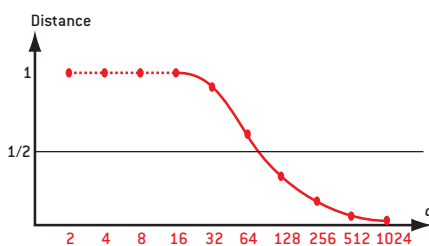


Son ami Martin Gardner expliquait que P. Diaconis jouait au poker pour payer ses études. Il précisait malicieusement que P. Diaconis avait une formidable technique pour le « second deal » et le « bottom deal », qui permettent, quand on distribue les cartes, de donner la deuxième ou la dernière carte du paquet au lieu de la première. P. Diaconis, aujourd'hui professeur de statistiques à l'Université de Stanford, vient de publier avec Ron Graham un livre remarquable sur les idées mathématiques utiles en prestidigitation (*Magical Mathematics: The Mathematical Ideas that Animate Great Magic Tricks*, Princeton University Press, 2011).

la probabilité de chaque ordre possible est à 10 % près celle que donnerait un mélange idéal obtenu après une infinité d'opérations de mélange. Pour un jeu de 52 cartes, on retrouve ce que pensait Borel : sept ou huit mélanges américains sont satisfaisants. La courbe ci-contre indique ce que donne un a -mélange américain pour un jeu de 52 cartes. Les valeurs de a retenues sont les puissances de 2 qui correspondent à un mélange américain usuel effectué une fois, deux fois, trois fois, etc.

La courbe montre clairement un « seuil de bon mélange » : faire le mélange une fois, deux fois, trois fois, quatre fois, cinq fois est insuffisant. À partir de six fois, le mélange devient acceptable, mais ce n'est qu'au-delà de dix fois (pour $a = 2^{10} = 1024$) que l'on sera vraiment proche de 0.

Des études complémentaires menées depuis l'article de 1992 et la prise en considération de calculs fondés sur des distances plus exigeantes indiquent que si sept mélanges américains sont convenables pour 52 cartes, il faut plutôt en faire une douzaine pour se prémunir contre toute triche ou toute mauvaise surprise. Signalons que la magnifique formule donnée plus haut ne rend pas les calculs faciles pour



LA DISTANCE entre le résultat d'un a -mélange américain et celui d'un mélange idéal, pour un jeu de 52 cartes et différentes valeurs de a .

autant : il y a en effet $n!$ ordres possibles pour un paquet de n cartes (pour 52, cela donne $8,1 \times 10^{67}$) et il faut donc ruser pour calculer la demi-somme de tous les écarts, qui mesure la qualité d'un mélange.

L'industrie du jeu n'a pas été indifférente à ces résultats. Aujourd'hui, par exemple, certaines machines à battre les cartes sont programmées pour effectuer les sept mélanges américains conseillés. Les compétences de P. Diaconis sont d'ailleurs appréciées par les ingénieurs qui conçoivent des machines à battre les cartes.

Batteuses de cartes sur le banc d'essai

Une entreprise souhaitant commercialiser une telle machine fondée sur un principe différent du mélange américain s'est ainsi adressée à lui pour qu'il prouve que la machine produisait de bons mélanges. La machine répartissait les cartes sur dix étagères internes en plaçant les cartes une à une aléatoirement sur les étagères et en glissant chaque nouvelle carte au hasard sous ou sur le paquet déjà présent. À la fin de cette distribution sur les dix étagères internes, la machine regroupait les dix paquets constitués en utilisant encore un ordre aléatoire pour les empiler. Le hasard utilisé par cette machine pour chacune de ces opérations était un hasard numérique tiré d'un générateur pseudo-aléatoire.

L'étude du dispositif par l'équipe de P. Diaconis fut une déception pour les industriels. En effet, les conclusions mathématiques sont les suivantes. *a)* La phase finale du mélange des dix paquets posés sur les étagères est inutile et la machine est donc inutilement compliquée. *b)* Une seule application du mélange effectué par la machine est insuffisante et rend possible certaines triches. *c)* En opérant deux fois le mélange effectué par la machine, on arrive à un résultat satisfaisant. La conclusion *c)* ne convenait pas aux ingénieurs qui, pour accélérer le rythme des jeux, voulaient mettre au point la première machine capable de faire un bon mélange en une seule fois.

Récemment, quatre nouveaux types de questions ont été envisagés.

(1) Autres mélanges. Toutes sortes de mélanges aléatoires autres que le mélange américain ont été étudiés. On s'est par exemple intéressé au mélange *top-to-random* consistant à répéter l'opération suivante : on prend la carte du dessus du paquet et on la glisse au hasard dans le reste. Pour ce mélange aléatoire, Lerna Pehlivan a montré en 2010 que l'opération devait être répétée environ $4n \log_2(n)$ fois si on voulait atteindre un désordre de niveau convenable.

(2) Cartes répétées. Dans certains jeux, tel le black-jack pratiqué dans les casinos, seule importe la hauteur des cartes, et donc tous les as, ou tous les rois, sont équivalents. Ce qui compte pour un mélange est donc non pas d'obtenir un paquet de n cartes quelconques, mais un paquet de cartes dont les hauteurs sont quelconques. Cela revient à étudier des paquets de cartes avec répétitions (chaque carte étant répétée quatre fois par exemple). Bien sûr, les cartes répétées facilitent les bons mélanges.

Que devient la règle des 7 (ou 12) mélanges américains pour un paquet avec répétitions de 52 cartes ? En 2006, Mark Conger et Divakar Viswanath ont étudié le problème : pour 52 cartes dont seules les hauteurs ont de l'importance, ils concluent qu'en opérant cinq fois le mélange américain, on aura une assurance de bon mélange comparable à celle donnée par sept mélanges dans le cas où hauteurs et couleurs comptent. Pour un niveau d'exigence fort, les 12 mélanges américains nécessaires pour un paquet de 52 cartes quelconques deviennent 9.

(3) Ordre des cartes dans une main. Un autre point longtemps négligé est maintenant assez bien maîtrisé. Quand le jeu est distribué, chaque joueur ramasse ses cartes et, pour la plupart des jeux, l'ordre des cartes d'un joueur n'a pas d'importance. Seul leur ensemble (sans ordre) détermine si la main du joueur est bonne ou mauvaise. D'ailleurs, un joueur est autorisé à reclasser ses cartes dans sa main (sauf pour certains jeux, comme la bataille). Ce qui importe vraiment pour qu'un mélange soit satisfaisant n'est donc pas que le paquet de cartes avant d'être distribué soit dans l'un des $n!$ ordres possibles avec une probabilité équivalente pour chaque ordre, mais qu'une fois les cartes distribuées,

les quatre ensembles de 13 cartes (pour le jeu de bridge) soient comme si, au départ, le paquet était bien mélangé. On peut économetriser deux mélanges américains grâce à cette remarque. Aussi, le nombre nécessaire d'applications du mélange américain pour que le paquet soit dans un état satisfaisant pour des joueurs de bridge est inférieur à 7, pour l'exigence faible, et inférieur à 12 pour l'exigence forte.

(4) Méthode de distribution. Un dernier point est la distribution d'un paquet mélangé. La méthode habituelle consiste à donner les cartes une à une. Cette opération diminue le risque d'une distribution inéquitable et rend la tricherie plus difficile. La distribution qui consisterait à donner les 13 premières cartes au premier joueur, les 13 suivantes au deuxième, etc., serait pourtant aussi bonne si l'on était certain que le jeu est mélangé de manière idéale. Si s est le nombre de cartes distribuées à chaque joueur, Márton Balázs et Dávid Szabó ont démontré récemment qu'utiliser la distribution cyclique (plutôt que la distribution : s cartes au premier joueur, s cartes au deuxième, etc.) équivaut approximativement à effectuer $\log_2(s)$ mélanges américains.

Quatre mélanges américains au bridge

Dans le cas du jeu de bridge, les sept mélanges américains nécessaires à un désordre convenable pour les 52 cartes se réduisent donc à quatre. Deux mélanges sont économetrisés du fait de la prise en compte du point (3) (l'ordre des cartes d'une main est sans importance) et un autre au moins du fait du mode de distribution cyclique. Les 12 mélanges nécessaires pour un désordre donnant une assurance parfaite se réduisent de même à 9 ou moins.

Depuis plus d'un siècle que l'on cherche à comprendre comment il faut s'y prendre pour mélanger et distribuer les cartes avant de faire une partie de bridge, de poker ou de belote, on a percé quelques mystères et élaboré de beaux résultats. Mais soyons certains que d'autres pépites sont restées cachées et attendent que l'œil puissant du théoricien les découvre. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Balázs et D. Szabó, *Comparing dealing methods with repeating cards*, 2012 (<http://arxiv.org/pdf/1208.0695.pdf>)

P. Diaconis et al., *Analysis of the casino shelf shuffling machines*, Technical Report n° 2011-08, Department of Statistics, Stanford University, août 2011.

S. Assaf et al., *A rule of thumb for riffle shuffle*, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 21(3), pp. 843-875, 2011.

A. Lachal, *Quelques mélanges parfaits de cartes*, *Quadrature*, n° 76, pp. 13-25, 2010.

P. Diaconis et R. Graham, *The solutions to Elmsley's problem*, *Math Horizons*, vol. 14(3), février 2007.

B. Mann, *How many times should you shuffle a deck of cards*, dans *Topics in Contemporary Probability and its Applications* (éd. J. L. Snell), pp. 261-289, CRC Press, 1995.

D. Bayer et P. Diaconis, *Trailing the dovetail shuffle to its lair*, *The Annals of Applied Probability*, vol. 2(2), pp. 294-313, 1992.

ART & SCIENCE

La pomme d'Adam est un citron

Dans un retable flamand du XV^e siècle, les frères van Eyck ont peint une Ève tenant dans sa main un fruit. Une pomme ? Non, une variété de citron nommée... pomme d'Adam.

Loïc MANGIN

Au début du XV^e siècle, Joost Vijdt, notable de la ville de Gand, aujourd'hui en Belgique, commande un retable à Hubert van Eyck (1366-1426) destiné à orner une chapelle privée de l'église Saint-Jean. Le peintre n'aura pas le temps d'achever l'œuvre et sera remplacé après sa mort par son frère Jan van Eyck (1390-1441). Aujourd'hui, certains des 24 panneaux du retable sont en cours de restauration, mais on peut en admirer la plupart dans la chapelle principale de l'édifice religieux, devenu la cathédrale Saint-Bavon en 1559. Précisons qu'un des panneaux, celui dit des *Juges intègres*, n'est qu'une copie, l'original ayant été volé en 1934.

Selon que le polyptique est ouvert ou fermé, on y voit Jésus-Christ, Marie, saint Jean-Baptiste, des anges, l'Annonciation, les portraits des commanditaires (le couple Vijdt), ainsi que l'Adoration de l'agneau de Dieu qui donne son nom à l'ensemble. On distingue aussi sur les panneaux extérieurs Adam et Ève. Beatrix Mecsi, historienne de l'art à l'Université Loránd Eötvös, de Budapest, en Hongrie, et Dirk Huylebrouck, mathématicien au LUCA (Université de Louvain), à Bruxelles, en Belgique, se sont intéressés à cette dernière et plus particulièrement au fruit qu'elle tient dans la main (voir la figure page ci-contre). Quel est-il ?

Écartons d'emblée l'idée d'un fruit... de l'imagination, les frères van Eyck étant réputés pour leur sens du détail et le réalisme poussé de leurs œuvres. La première idée quant au fruit que tient Ève serait une

pomme, l'imaginaire collectif associant souvent les deux. Cependant, la Bible ne parlerait que d'un fruit, et non d'une pomme. Le choix est donc laissé à l'appréciation des artistes. De fait, Lucas Cranach a bien représenté une pomme dans *Adam et Ève dans le jardin d'Éden*. En revanche, dans les fresques de la chapelle Sixtine, Michel-Ange a préféré une figue, conformément à la tradition juive selon laquelle les feuilles de figuier furent les premiers vêtements d'Adam et Ève, une fois le fruit défendu consommé. D'autres encore ont choisi un citron, une grappe de raisin, une cerise, une olive... La grenade a aussi eu ses partisans au prétexte que ce fruit est mentionné dans le livre de l'Exode et dans le Coran. Pourtant, la grenade pousse sur un arbuste, non sur un arbre.

Quoi qu'il en soit, à la Renaissance, le pommier s'est imposé dans la tradition occidentale. L'une des raisons serait l'ambiguïté du mot latin *malum* signifiant, d'une part, le pommier et, d'autre part, le mal.

Aucun de ces fruits ne correspond à celui du retable des van Eyck. Peter Schmidt, chanoine à la cathédrale Saint-Bavon, est l'auteur d'un ouvrage sur l'Adoration de l'agneau. Le théologien y analyse l'idée de son collègue Luc Dequeker selon qui Ève porterait un étrog, un cultivar du cédrat utilisé par les juifs lors de la fête de Soukkot. L'agrumes est l'un des quatre constituants, avec une palme de dattier, un rameau de myrte et une branche de saule, du bouquet de quatre espèces confectionné à cette occasion. Or sur un autre panneau,



Dirk Huylebrouck