

en formant une surface ressemblant à une bouée et si l'on respecte les distances lors de ce plongement, la surface résultante devra, elle aussi, être de courbure nulle. C'est une contrainte très forte. Or on démontre qu'on ne peut pas la satisfaire : sur une surface en forme de bouée, il y a toujours des endroits où la courbure est non nulle. Le problème du plongement isométrique pour le tore carré plat est donc impossible.

Pourtant, en 1954, J. Nash a surpris la communauté mathématique en révélant que cette impossibilité est relative, trompeuse et contournable. Il découvrit en effet que loin d'être impossibles, les plongements isométriques existent de façon pléthorique. Ses travaux ont été complétés un an après par le mathématicien hollandais Nicolaas Kuiper (1920-1994). Ce dernier s'est intéressé, entre autres, au cas du tore carré plat et a montré que l'on peut effectivement le réaliser d'une infinité de façons différentes dans l'espace euclidien tridimensionnel.

Comment expliquer l'existence de plongements isométriques du tore carré plat (et, plus généralement, de toutes sortes de surfaces riemanniennes) alors que, en s'appuyant sur la courbure de Gauss, on avait montré qu'ils étaient impossibles ? Il est nécessaire pour cela de s'intéresser à la régularité des surfaces. Une surface est certes un objet lisse, sans aspérité ni pincement, mais il y a plusieurs degrés dans cette « lissité ».

Une façon intuitive de comprendre ces degrés de lissité est de considérer des surfaces ressemblant à des pistes pour planches à roulettes. En première approximation, une telle surface s'obtient simplement en accolant en continuité un plan et une paroi courbée comme un cercle. Toutefois, un skateur qui dévalerait la pente la plus raide de cette surface ressentirait un choc au passage de la ligne de raccord (*voir la rubrique Idées de physique, page 90*). Ce choc est dû à la discontinuité de la courbure : immédiatement après la portion circulaire, la courbure s'annule brutalement. Au contraire, dans une véritable piste de planches à roulettes, la courbure varie de façon continue, ce qui permet de dévaler la pente sans à-coup. Par conséquent, même si à l'œil les deux pistes présentent des formes comparables, la véritable piste est en réalité plus lisse que son ersatz en deux morceaux.

Le calcul différentiel permet de distinguer ces différences de lissité et de les

classer. Le premier barreau de l'échelle s'appelle la régularité C^1 ; plus précisément, une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^1 si ses dérivées premières existent et sont continues en chaque point. Le deuxième barreau est la classe C^2 , qui correspond à l'existence et à la continuité des dérivées secondes (et *a fortiori* des dérivées premières). Et ainsi de suite, les fonctions les plus régulières de cette échelle étant celles de classe C^∞ , qui sont infiniment dérivables.

En quoi ces raffinements dans la régularité des surfaces peuvent-ils élucider le paradoxe qui nous occupe ? L'impossibilité du plongement isométrique du tore plat n'a été démontrée qu'au prix d'un raisonnement faisant jouer un rôle central à la courbure de Gauss. Or celle-ci n'existe que si la surface est assez régulière : elle doit être de classe C^2 au moins. Si la surface n'est pas suffisamment lisse, si elle est de classe C^1 seulement, alors sa courbure n'est plus calculable et cette notion perd son sens. Par conséquent, tout raisonnement utilisant la courbure ne peut conduire qu'à des impossibilités relatives, ne concernant que des surfaces de classe C^2 ou plus. Aucun de ces raisonnements ne pourra interdire la possibilité de réaliser le tore carré plat au moyen d'une surface moins lisse, de classe C^1 . Ainsi, avec la perte d'un seul degré de régularité, une frontière invisible est franchie et donne accès à un monde où la courbure de Gauss n'impose plus sa loi.

Un monde sans interdits

La disparition de la courbure de Gauss permet-elle pour autant la réalisation du tore carré plat ? *A priori*, mille autres obstacles pourraient – devraient – surgir et en interdire définitivement l'existence. La grande surprise du résultat de J. Nash, c'est précisément qu'aucun autre obstacle n'apparaît. L'effacement de la courbure ne signifie donc pas qu'elle cède sa place à d'autres formes de contrainte, mais bien qu'elle offre au mathématicien une totale liberté.

Pour mieux comprendre la surprise des mathématiciens, il faut avoir en tête la façon dont s'articule une démonstration en géométrie différentielle. Rappelons que cette branche des mathématiques met à profit le calcul différentiel (les dérivées, les intégrales) pour comprendre des objets tels que les courbes ou les surfaces. Une démonstration en géométrie différentielle

■ LES AUTEURS



Vincent BORRELLI est maître de conférences en mathématiques à l'Université Claude Bernard et membre de l'Institut Camille Jordan, à Lyon.



Francis LAZARUS, informaticien, est chargé de recherche au CNRS et membre du Laboratoire

Gipsa-lab, à Grenoble.



Boris THIBERT est maître de conférences en mathématiques appliquées à l'Université

Joseph Fourier et membre du Laboratoire Jean Kuntzmann, à Grenoble.

■ BIBLIOGRAPHIE

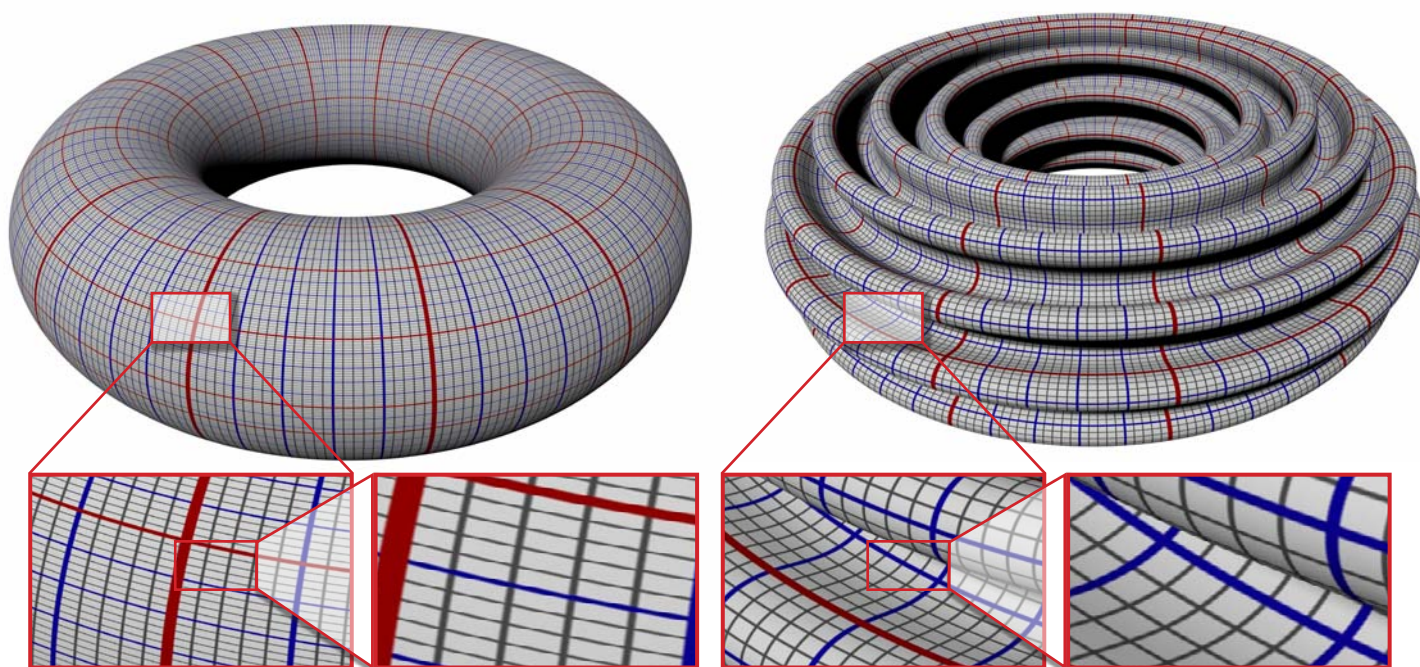
V. Borrelli et al., Flat tori in three-dimensional space and convex integration, *PNAS*, vol. 109(19), pp. 7218-7223, 2012.

M. Audin et P. Pansu, Le h-principe de Misha Gromov, *Images des Mathématiques*, 25 juin 2009 : <http://images.math.cnrs.fr/Le-h-principe-de-Misha-Gromov.html>

V. Borrelli, Gnash, un tore plat !, *Images des Mathématiques*, 10 juin 2012 : <http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html>

Équipe Hévéa, Les tores plats visualisés !, sur : <http://math.univ-lyon1.fr/borrelli/Hevea/Presse/index.html>

P. Pansu, Rencontre avec Misha Gromov, *Images des Mathématiques*, 1979 : <http://images.math.cnrs.fr/Rencontre-avec-Misha-Gromov-1979.html>



peut être comparée à un trajet joignant une ville de départ – les hypothèses du théorème – à une ville d'arrivée – les conclusions du théorème.

Deux sortes d'obstacles peuvent entraver le trajet : les contraintes physiques telles que les barrières ou les mers, et les interdictions légales telles que les sens interdits ou les frontières. Franchir les obstacles du premier type, c'est trouver une route allant du point de départ au point d'arrivée. L'existence d'une telle route est loin de garantir que l'on pourra effectivement joindre les deux villes, mais elle permet de se concentrer sur le second type d'obstacles : la présence ou non d'interdictions légales le long du parcours. En revanche, si aucune route ne joint les deux villes, alors la considération des sens interdits ou des frontières est sans objet, la partie est déjà perdue.

En général, trouver une route est une chose relativement aisée, un simple coup d'œil sur une carte suffit. Mais s'assurer que l'itinéraire choisi est libre de toute interdiction légale requiert plus d'attention. Une route, sélectionnée au hasard et débutant au centre de Paris pour finir au centre de Marseille, aura toutes les chances de rencontrer un grand nombre de sens interdits. La question dominante est donc celle de la possibilité légale.

Dans l'analogie avec une démonstration en géométrie différentielle, les sens interdits et les frontières correspondent aux obstacles théoriques rencontrés lorsqu'on

applique le calcul différentiel. Ce calcul a ses lois, qui agissent comme un agent routier autorisant la circulation sur certaines voies et posant des panneaux de sens interdit sur d'autres. Il occupe souvent toute l'attention du mathématicien, qui peut alors oublier la présence d'un autre acteur moins visible : la topologie. Ce domaine des mathématiques consiste à étudier les propriétés qui résistent aux déformations continues. Par exemple, si l'on déforme un disque sur lequel on a dessiné une route joignant deux points, cette route sera tordue par la déformation, mais elle ne se brisera pas. L'existence de la route joignant les deux points est donc une propriété topologique.

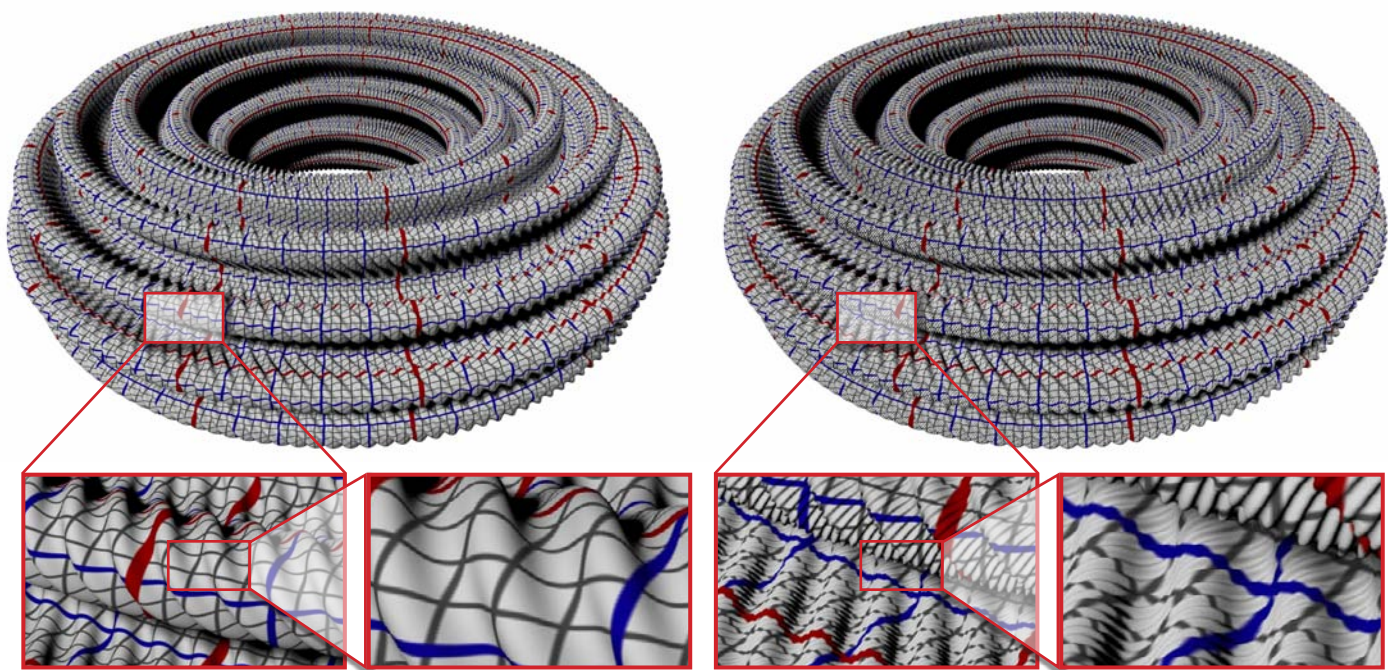
L'intégration convexe, théorie libératrice

Dans notre analogie, la topologie intervient en amont du calcul différentiel ; elle donne les outils et la théorie mathématiques nécessaires pour répondre à la question « Existe-t-il une route sans barrières allant de la ville de départ à la ville d'arrivée ? ». Dans le cas favorable où la réponse est positive, on repère ensuite, par le calcul différentiel, si la route envisagée comporte des sens interdits ou non. La résolution d'un problème de géométrie différentielle se divise donc en deux temps (voir l'encadré page ci-contre). Le premier consiste à répondre à la question topologique de l'existence d'une route, et le second à vérifier avec le calcul différentiel que cette route ne comporte pas

d'obstacles légaux. Ce second temps est souvent plus ardu que le premier.

La résolution du problème des plongements isométriques est un exemple emblématique d'application de la démarche en deux temps que l'on vient d'exposer. Le premier temps consiste à omettre l'aspect différentiel du problème, à savoir la préservation des distances, pour ne s'intéresser qu'à son aspect topologique. Dans le cas du tore carré plat, la résolution de la question topologique est une chose aisée. Quitte à déformer le carré initial, on peut facilement concrétiser les identifications et obtenir une surface qui a la forme d'une bouée (voir la figure 2). Le passage du tore carré plat à la surface-bouée correspond à la route dépourvue de barrières évoquée plus haut.

Il faut ensuite s'attacher au second temps de la résolution du problème, celui où l'on se focalise sur la question géométrique – ici la conservation des longueurs. Pour les surfaces de classe C^2 , un panneau de sens interdit, dû à la courbure de Gauss, apparaît immédiatement. Cette courbure, qui se détermine au moyen d'un calcul différentiel, doit en effet être partout nulle. Or cette contrainte est trop forte : comme nous l'avons déjà indiqué, toute surface représentant un tore dans l'espace à trois dimensions comporte des zones où la courbure n'est pas nulle. En revanche, pour les surfaces de classe C^1 , ce panneau de sens interdit disparaît. Ce qui a tant déconcerté les mathématiciens, c'est qu'aucun autre panneau d'interdiction ne soit apparu.



4. LE MAILLAGE VISIBLE SUR LA SURFACE provient d'un quadrillage régulier du tore carré plat. Deux agrandissements permettent de constater les distorsions des longueurs verticales et horizontales dues aux identifications des côtés du carré initial. Avec l'accumula-

tion infinie des distorsions [ici trois étapes dans la création de ces « corrugations » sont représentées], le maillage subit des ondulations à toutes les échelles, mais, à la fin, les longueurs de toutes les mailles sont identiques. Le plongement est devenu isométrique.

Dans les années 1970-1980, M. Gromov a découvert que la situation rencontrée dans le problème des plongements isométriques de J. Nash est en fait étonnamment fréquente : pour une très vaste famille de questions en géométrie différentielle, celles vérifiant une propriété technique nommée h-principe ou principe homotopique, il n'y a pas de sens interdits, quelle que soit la route choisie pour aller d'une ville à l'autre. Pour elles, le second temps des démonstrations est inutile ; les contraintes dues au calcul différentiel s'évanouissent comme par enchantement et seule reste la contrainte topologique.

J. Nash, en cherchant à contourner ces interdits, et en y parvenant, a révélé à tous leur caractère fictif. Plus important encore, la façon dont il s'en est affranchi est à l'origine d'une théorie permettant de détecter des situations où un h-principe est présent : la théorie de l'intégration convexe, découverte et mise au point par M. Gromov bien après les travaux de J. Nash et Kuiper.

L'idée fondamentale de cette théorie, qui donne beaucoup de liberté aux spécialistes de la géométrie différentielle, est la suivante : si le chemin direct menant au résultat que l'on souhaite atteindre est impraticable, il faut alors inventer une nouvelle voie

Obstruction topologique et obstruction différentielle

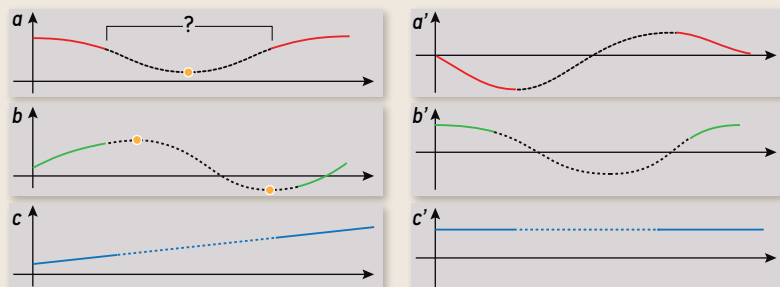
En géométrie différentielle (partie des mathématiques où l'on applique le calcul différentiel et intégral pour étudier courbes, surfaces, etc.), la résolution des problèmes nécessite généralement deux étapes. La première consiste à franchir des obstacles de nature topologique, la seconde des obstacles imposés par les lois du calcul différentiel.

En voici un exemple simple, qui consiste à se demander s'il est possible de compléter les portions de graphe (a), (b) et (c) de façon à éviter l'apparition de points où la tangente est horizontale

(en jaune). Remarquons d'abord qu'en un tel point, la fonction dérivée est nulle : le graphe de la dérivée coupe donc l'axe horizontal. Par conséquent, pour que la question posée ait une chance d'avoir une réponse positive, il faut déjà être capable de compléter les portions (a'), (b') et (c') des graphes des fonctions dérivées sans passer par l'axe horizontal. C'est le premier temps de la résolution d'un problème de géométrie différentielle, celui de la topologie.

On ne peut prolonger la courbe (a') sans couper l'axe ;

on en déduit qu'il est impossible d'éviter la création d'une tangente horizontale pour la courbe (a). En revanche, on peut prolonger les portions (b') et (c'). Pour ces deux cas, il est nécessaire de passer au second temps, celui du calcul différentiel. Pour la courbe (b), on montre qu'il apparaît alors un panneau de sens interdit (le théorème de Rolle) ; il sera donc impossible de la continuer sans créer une tangente horizontale. Enfin, pour la courbe (c), la voie est libre, le prolongement sans tangente horizontale est possible.



composée d'un très grand nombre de petits contournements du chemin direct. Ces contournements ont pour effet de diluer la difficulté du parcours et rendent ainsi le nouveau chemin praticable.

Un exemple très simple de problème « impossible » résolu par cette stratégie est la conception d'une route joignant les extrémités d'un segment vertical, mais dont la pente soit très faible afin qu'un véhicule puisse l'emprunter. Pour des questions de place, on exige également que cette route ne s'éloigne pas trop du segment vertical, par exemple qu'elle soit contenue dans un tube relativement petit entourant le segment.

Un premier raisonnement fait apparaître un interdit imaginaire : si la pente est presque horizontale, la route s'élève très doucement et devrait être hors du petit tube quand elle atteindra l'altitude de l'extrémité supérieure. Or cet interdit se contourne facilement et la solution est effectivement mise en pratique dans la vie quotidienne : c'est la rampe d'accès à un parking à étages ! Même si la pente est très faible, l'effet du parcours de chaque boucle est un pur déplacement vertical. Les boucles imposées à la route permettent donc de réaliser la même élévation verticale que le chemin direct, le segment, tout en offrant un parcours « praticable ».

Un effet de moyenne

D'un point de vue mathématique, le problème « impossible » que résout la rampe d'accès est de nature différentielle. En effet, l'une des deux contraintes porte sur une pente, qui se calcule au moyen d'une dérivée. Pour un tel problème, l'intégration convexe construit une solution – ici, une courbe en hélice – qui respecte également la seconde contrainte, celle de rester à l'intérieur d'un tube.

Pour ce faire, la théorie profite ingénieusement des effets de moyenne. Chaque fois que l'on parcourt une boucle sur l'hélice, l'extrémité du vecteur dérivé (un vecteur tangent à la courbe), translaté en l'origine, décrit un cercle horizontal de faible altitude. La moyenne sur une boucle du vecteur dérivé est donc un vecteur vertical de faible amplitude. Par conséquent, l'hélice, que l'on peut obtenir par intégration de son propre vecteur dérivé, reste proche d'un segment, lui-même obtenu en intégrant le vecteur vertical. L'hélice se retrouve ainsi contenue dans un tube dont l'axe est le segment. Cet effet de moyenne constitue le cœur de la théorie. Or déterminer une moyenne revient

Contournements

La théorie de l'intégration convexe offre en géométrie différentielle une façon d'atteindre un résultat *a priori* inaccessible au moyen d'un grand nombre de petits contournements. Dans l'exemple de la rampe d'accès à un parking à étages, les contournements prennent la forme de boucles. Ils permettent de joindre deux points situés sur une même verticale en suivant une trajectoire de pente très faible.



Afinos99

à réaliser une intégration. Et le résultat de cette intégration se trouve nécessairement à l'intérieur de la courbe suivie par le vecteur dérivé, c'est-à-dire dans son enveloppe convexe. Ce qui explique pourquoi la théorie porte le nom d'intégration convexe.

La théorie de l'intégration convexe constitue pour la géométrie différentielle un outil puissant. Son application au « retournement de la sphère » en est une illustration. Depuis la fin des années 1950, on sait grâce aux travaux de l'Américain Stephen Smale qu'il est possible de déformer continûment et sans pincements une sphère, dont on a peint l'extérieur et l'intérieur de couleurs différentes, jusqu'à obtenir une nouvelle sphère dont les couleurs sont interchangées (dans cette opération, on accepte que la surface s'interpénètre). À ce résultat déjà étonnant, la théorie de l'intégration convexe a ajouté que le retournement peut être effectué isométriquement, c'est-à-dire en préservant toutes les longueurs au cours de la déformation !

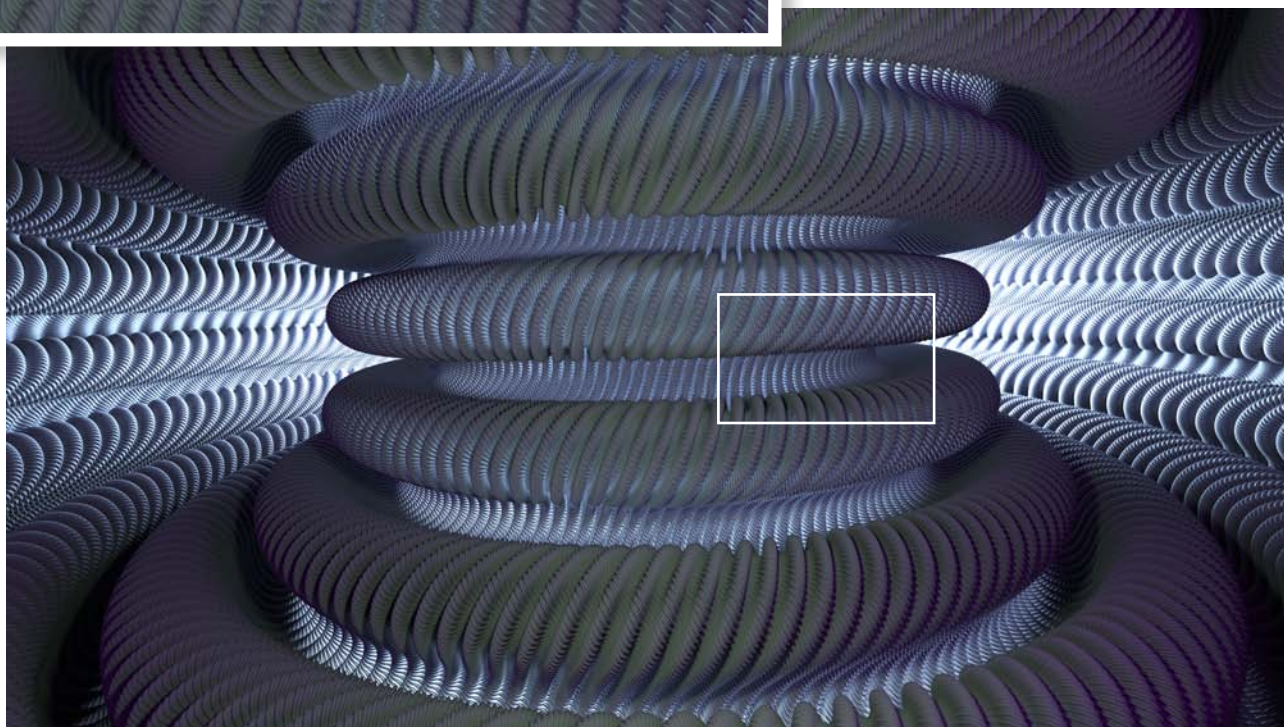
Avec l'invention de l'intégration convexe, la construction des plongements isométriques à la Nash devient subitement intelligible. Elle perd son caractère singulier pour apparaître comme un cas particulier d'une théorie plus vaste. Pourtant, si le procédé de construction s'éclaire, l'objet obtenu *in fine* garde sa part de mystère et continue à défier l'imagination par le caractère paradoxal de ses propriétés. Comment une surface peut-elle présenter une lissité sans faille et cependant réserver un champ d'à-coups à quiconque s'aviserait de la dévaler ? Quel peut être l'aspect d'un plongement isométrique du tore carré plat ?

En 2006, dans l'espoir de répondre à ces questions, nous trois et Saïd Jabrane, un doctorant en mathématiques, avons formé une équipe, complétée en 2012 par Damien Rohmer, spécialiste de la synthèse d'images. Notre conviction était que l'on pouvait tirer profit du caractère algorithmique de l'intégration convexe – une propriété passée jusque-là inaperçue – pour concevoir un programme informatique visualisant un plongement isométrique du tore carré plat. Cette conviction était fondée, mais six ans ont été nécessaires pour visualiser un seul de ces fameux plongements...

Le programme que nous avons réalisé débute avec une surface-bouée et la déforme progressivement au moyen d'une succession d'ondulations de plus en plus fines. La bouée initiale est choisie suffisamment petite



5. LE PLONGEMENT ISOMÉTRIQUE du tore carré plat dans l'espace euclidien à trois dimensions est possible, à condition de relâcher un peu les contraintes de régularité. On obtient ainsi une surface, ici vue de l'intérieur, qui a une infinité de corrugations de plus en plus petites, comme l'illustre l'agrandissement.



pour que toutes les longueurs mesurées à sa surface soient trop courtes par rapport à leurs analogues sur le tore carré plat. Par exemple, la longueur des latitudes sur la bouée est plus courte que celle des horizontales correspondantes sur le tore carré plat.

Des corrugations à toutes les échelles

Pour corriger ce défaut, le programme crée des ondulations le long des latitudes qui accroissent leur longueur. Ces ondulations, nommées corrugations, sont les «petits contournements» qui témoignent de l'usage de l'intégration convexe. Elles sont appliquées dans différentes directions afin d'augmenter toutes les longueurs. Au cours du procédé, l'amplitude des corrugations diminue, tandis que leur fréquence augmente (voir la figure 4). Le tout est précisément calculé pour réduire continuellement

le défaut isométrique et obtenir à la limite un plongement isométrique. Bien sûr, le programme ne peut effectuer qu'un nombre fini de tâches et, dans la pratique, il suffit de l'arrêter après quatre étapes pour que le résultat visuel soit satisfaisant.

L'image obtenue est surprenante (voir les figures 1 et 5) : elle révèle une surface qui ressemble à s'y méprendre à une fractale, c'est-à-dire à un objet infiniment fracturé quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe. Toutefois, cette ressemblance n'est pas totale. En effet, le plongement isométrique est infiniment ondulé plutôt qu'infiniment fracturé. Où que se pose le regard, aucune brisure ou arête n'apparaît ; les fractures ont été remplacées par des corrugations. L'objet obtenu n'est donc pas tout à fait une fractale, ni une surface au sens ordinaire. Situé à la frontière entre les deux, il permet de résoudre le paradoxe posé par les surfaces de Nash-Kuiper en conciliant

lissité et rugosité. Nous l'avons qualifié de fractale C^1 , ou fractale lisse.

Après le tore carré plat, nous pouvons dorénavant espérer visualiser les plongements isométriques dans l'espace tridimensionnel d'autres surfaces riemanniennes. On pense notamment au «disque de Poincaré», un exemple célèbre de géométrie non euclidienne sur le plan. De telles visualisations feront sans doute apparaître des structures analogues à celle obtenue avec le tore carré plat, c'est-à-dire des fractales C^1 .

Les fractales lisses, chaînon manquant entre les fractales et les surfaces ordinaires, vont probablement surgir dans d'autres questions mathématiques. Ces structures joueront-elles également un rôle en physique, en chimie ou dans les sciences du vivant ? Il est fort probable que certaines des structures fractales déjà observées dans le monde physique sont en réalité des fractales C^1 ... et que l'on en découvrira d'autres. ■



Évolution

Le plus étrange des oiseaux

Ewan Fordyce et Daniel Ksepka

L'ESSENTIEL

- Les manchots ne peuvent voler, mais ils sont d'excellents nageurs et plongeurs. On cherche à savoir comment ils ont développé de telles caractéristiques et comment certains se sont adaptés aux froids extrêmes.
- Des fossiles récemment découverts permettent de reconstituer leur évolution, révélant que certains traits se sont développés sous un climat chaud.
- Bien qu'ils aient survécu à 60 millions d'années de changements climatiques, les manchots risquent de succomber au réchauffement actuel.