



Classification phylogénétique du vivant

Tome 1 – 3^e édition

Guillaume Lecointre, Hervé Le Guyader

Savez-vous que vous êtes plus proches d'un bolet que d'une pâquerette ? Que les crocodiles sont plus proches des oiseaux que des lézards ? Ce livre, très illustré, présente l'arbre de la vie et une synthèse des connaissances sur le sujet.

Éditions Belin
560 pages – 43 euros – ISBN 978-2-7011-4273-9

Les gènes voyageurs

Éric Baptiste

Nouveauté



Réf. 005885

L'ADN est doué d'une incroyable capacité à se déplacer, sautant souvent d'un organisme vivant à l'autre. L'ouvrage montre en quoi ces nouvelles connaissances modifient profondément notre vision de l'évolution. Le lecteur y découvrira les nouvelles idées sur les origines du monde vivant et son devenir.

Éditions Belin/Pour la Science
192 pages – 19,50 euros – ISBN 978-2-7011-5885-3

Comprendre et enseigner la classification du vivant

Guillaume Lecointre (dir.)

Cette seconde édition revue et augmentée du livre de référence pour l'enseignement de la classification du vivant propose un rappel synthétique des connaissances essentielles, ainsi que des outils pédagogiques développés à partir de collections rigoureusement sélectionnées d'organismes vivants.

Éditions Belin
360 pages – 27,90 euros – ISBN 978-2-7011-4798-7



Réf. 004798

Vive l'AGRO-RÉVOLUTION française !

Vincent Tardieu

Alors que la Terre comptera 9 milliards de bouches à nourrir en 2050, nombreux sont ceux qui pensent qu'il n'y a pas d'alternative à l'agriculture chimique et industrielle. Et pourtant... Oui, on peut nourrir la planète tout en préservant l'environnement ! Oui, nos paysans peuvent vivre mieux et être plus nombreux !

Éditions Belin
480 pages – 22 euros – ISBN 978-2-7011-5973-7



Réf. 005973

LA SÉLECTION POUR LA SCIENCE C'EST AUSSI...

Guide critique de l'évolution

Guillaume Lecointre (dir.)

Éditions Belin
576 pages – 36,05
ISBN 978-2-7011-4797-0
Réf. 004797



La logique, un aiguillon pour la pensée

Jean-Paul Delahaye

Éditions Belin / Pour la Science
200 pages – 27 euros
ISBN 978-2-8424-5115-8
Réf. 075115



Mathématiques pour le plaisir

Jean-Paul Delahaye

Éditions Belin / Pour la Science
208 pages – 25,40 euros
ISBN 978-2-8424-5104-2
Réf. 075104



Pour commander ces ouvrages

renvoyez le bon de commande ci-dessous

ou connectez-vous sur www.pourlascience.fr/librairie

[sauf références signalées par un * sur www.editions-belin.fr]

BON DE COMMANDE

à retourner accompagné de votre règlement à : Groupe Pour la Science • 628 avenue du Grain d'Or • 41350 Vineuil • Tél. : 0 805 655 255 • e-mail : pourlasciencevpc@daudin.fr

☐ Oui, je commande les livres présentés dans la sélection de *Pour la Science*. Je reporte les titres, prix et références à 6 chiffres correspondant aux ouvrages choisis :

Titre	Réf.	Prix
		€
		€
		€
		€
		€
Frais de port (4,90 € France – 12 € étranger)	+	€
Total à régler	=	€

J'indique mes coordonnées :

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

C.P. : | | | | | Ville : _____

Pays : _____ Tél. : | | | | | (facultatif)

E-mail : | | | | | @ | | | | |

Je choisis mon mode de règlement :

☐ par chèque à l'ordre de *Pour la Science*

☐ par carte bancaire

Numéro | | | | |

Date d'expiration | | | | |

Cryptogramme | | | | |

Signature obligatoire

Pour recevoir la newsletter Pour la Science (à remplir en majuscules).

Belin
ÉDITEUR INDÉPENDANT
DEPUIS 1777



En application de l'article 27 de la loi du 6 janvier 1978, les informations ci-dessus sont indispensables au traitement de votre commande. Elles peuvent donner lieu à l'exercice du droit d'accès et de rectification auprès du groupe Pour la Science. Par notre intermédiaire, vous pouvez être amené à recevoir des propositions d'organismes partenaires. En cas de refus de votre part, merci de cocher la case ci-contre ☐.

LOGIQUE & CALCUL

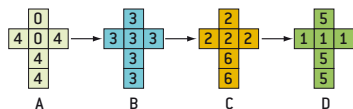
Les dés affreux d'Efron

Les rapports de force entre dés différents sont parfois étranges et trompent fortement l'intuition. Ils peuvent même s'inverser si on lance les dés deux fois au lieu d'une.

Jean-Paul DELAHAYE

Si 1 est meilleur que 2, si 2 est meilleur que 3, ..., et si $N - 1$ est meilleur que N , alors bien sûr 1 est meilleur que N ! Eh bien, pas toujours ! Dans certaines circonstances, il y a non-transitivité : 1 est battu par N .

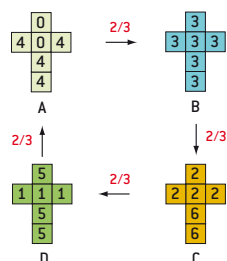
Martin Gardner aimait s'amuser de ce qui trouble l'esprit et choque le bon sens. Il a notamment fait une large publicité aux dés intransitifs d'Efron, dont la descendance remarquable perfectionne et démultiplie le paradoxe initial. En 1970, dans sa rubrique mensuelle de *Scientific American*, Gardner présentait les quatre dés que venait d'inventer Bradley Efron, statisticien à l'Université de Stanford :



Nous les noterons $A = [0, 0, 4, 4, 4, 4]$, $B = [3, 3, 3, 3, 3, 3]$, $C = [2, 2, 2, 2, 6, 6]$, $D = [1, 1, 1, 5, 5, 5]$. Nous supposons que chaque face tombe avec la probabilité $1/6$: les dés ne sont pas truqués. Lorsqu'on jette simultanément le dé A et le dé B et en considérant que le résultat supérieur désigne le gagnant, il y a $36 = 6 \times 6$ cas possibles équiprobables. Douze cas donnent « 0 pour A et 3 pour B », et 24 cas donnent « 4 pour A et 3 pour B ». Le dé A gagne donc 24 fois et le dé B 12 fois. L'avantage est au dé A, qui gagne dans deux tiers des cas.

La comparaison de B et C montre que B gagne aussi contre C dans deux tiers des

cas. De même, C gagne contre D dans deux tiers des cas, et — surprise — D gagne contre A dans deux tiers des cas aussi. Nous parlerons de « chaîne intransitive de longueur 4 » et nous représenterons les résultats ainsi :



C'est étonnant. L'explication de l'apparent paradoxe est simplement que nous avons tort de croire que la relation « Le dé X est plus fort que le dé Y » est transitive. La force d'un dé n'est pas mesurable par un paramètre unique comme la vitesse lors d'une comparaison de coureurs à pied ou de la valeur en euros pour l'évaluation des voitures. La force d'un dé est spécifique de chaque rencontre, elle dépend du contexte créé par les dés opposés.

Le résultat moyen d'un dé, la somme des faces divisée par 6, qui aurait pu être ce paramètre unique mesurant la force d'un dé, ne convient pas. En effet, ces résultats moyens sont : 2,66 pour A ; 3 pour B ; 3,33 pour C ; et 3 pour D. Or le dé A, qui a une moins bonne moyenne que le dé B, le bat dans deux tiers des cas ! De même, B, qui a une moins bonne moyenne que C, est meilleur que lui dans une rencontre à deux

(le signe $>$ signifie ici « gagne contre ») :
 $A >_{2/3} B >_{2/3} C >_{2/3} D >_{2/3} A$
 2,66 3 3,33 3 2,66
 Ni le résultat moyen d'un dé ni aucun paramètre global ne mesurent ici de manière absolue la force d'un dé.

Profiter du paradoxe

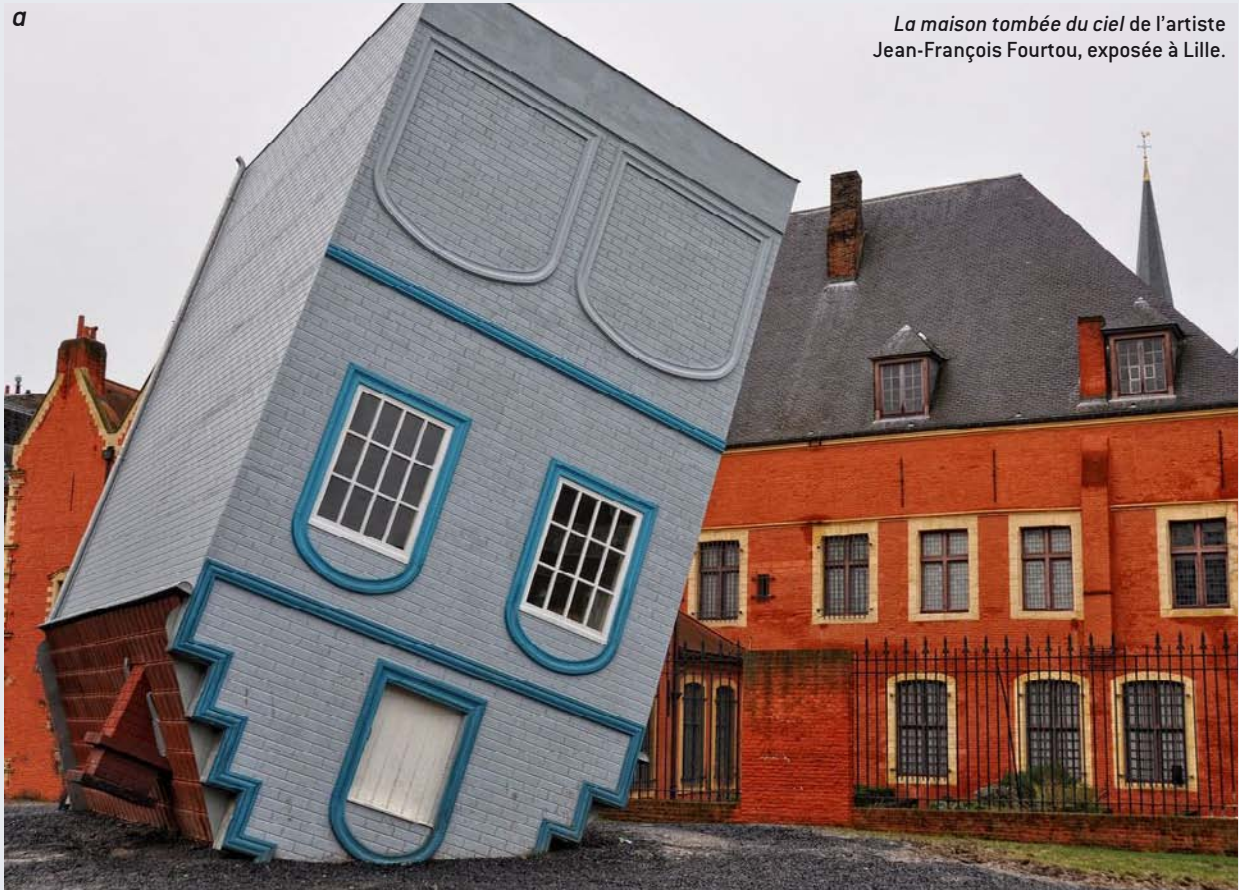
Les dés d'Efron vous serviront peut-être à arrondir vos fins de mois. Proposez le jeu suivant à votre ami qui aime tant parier : « Voici quatre dés A, B, C et D ; nous allons en choisir chacun un ; je te laisse choisir en premier ; ensuite nous lancerons les dés cinq fois de suite simultanément, et celui qui aura gagné le plus souvent recevra 100 euros de l'autre. »

Si votre ami choisit A, vous choisirez D, plus fort que A ; s'il choisit B, vous choisirez A, plus fort que B, etc. La chaîne intransitive vous assure de toujours trouver un dé plus fort que celui de votre victime.

À chaque lancer, vous aurez deux chances sur trois de gagner, ce qui vous fera gagner dans exactement 79,01 % des cas en faisant le bilan des cinq lancers. Si vous trouvez que c'est encore trop risqué, proposez de lancer les dés 25 fois au lieu de 5 fois. Vous gagnerez alors dans 95,84 % des cas. Le calcul se fait, à partir du $2/3$ favorable à votre dé, en additionnant les probabilités de gagner 25 fois sur 25, 24 fois sur 25, 23 fois sur 25, ..., jusqu'à 13 fois sur 25. La loi binomiale indique que dans une telle situa-

Le monde à l'envers de l'intransitivité

a



La maison tombée du ciel de l'artiste Jean-François Fourtou, exposée à Lille.

Guy Mouque

L'intransitivité vous met la tête à l'envers (a)! En sport, il n'est pas rare que l'équipe A batte l'équipe B, qui bat l'équipe C, qui bat l'équipe A. La propriété de transitivité (si $a > b$ et $b > c$, alors $a > c$) n'est pas satisfaite.

Cela peut résulter d'une méforme de l'équipe A, qui a mal joué le jour où elle a rencontré l'équipe C. Pourtant, il existe en mathématiques plusieurs situations de ce type où aucune méforme ne peut être invoquée pour expliquer l'intransitivité constatée. Bien que tout soit constant d'une partie à la suivante, tout se passe comme au jeu pierre-feuille-ciseaux (b) :

les ciseaux sont plus forts que la feuille (ils la découpent), la feuille bat la pierre (elle l'enveloppe), la pierre gagne contre les ciseaux (elle les fracasse).

teurs et trois candidats A, B et C. On trouve que 23 électeurs classent les candidats $A > B > C$, 17 classent $B > C > A$, 2 classent $B > A > C$, 10 classent $C > A > B$ et 8 classent $C > B > A$.

Ainsi, 33 électeurs préfèrent A à B contre 27 pour l'inverse ; 42 préfèrent B à C et 18 l'inverse ; 35 préfèrent C à A contre 25 pour l'inverse. Les préférences exprimées par les électeurs forment une chaîne intransitive : $A > B > C > A$. Les quatre dés d'Efron $A = [0, 0, 4, 4, 4, 4]$, $B = [3, 3, 3, 3, 3, 3]$, $C = [2, 2, 2, 2, 6, 6]$, $D = [1, 1, 1, 5, 5, 5]$ forment de façon analogue une chaîne intransitive.

D'autres jeux de dés ont été inventés dont les propriétés paradoxales sont encore plus contraires à l'intuition que le paradoxe de Condorcet ou que l'escalier impossible d'Escher (c) qui monte, mais revient pourtant à son point de départ.

b



Fédération internationale de pierre-feuille-ciseaux

c



philvaughan.org/bag/sin/

L'inversion miraculeuse

Tim Rowett a proposé un nouveau paradoxe : l'inversion des gagnants. Si l'on considère par exemple les dés $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3]$ et $R_2 = [5, 5, 5, 2, 2, 2]$, on a l'in vraisemblable propriété suivante :

En lançant chaque dé une fois, R_1 bat R_2 avec la probabilité $7/12$. Il semble plus fort. Si on lance le dé R_1 deux fois, qu'on fait la somme des résultats et de même avec le dé R_2 , cette fois c'est le

dé R_2 qui gagne, avec une probabilité $765/1296$, soit $0,5903\%$. En lançant deux fois un dé gagnant, il devient perdant !

Le paradoxe découvert est en réalité encore plus fort, puisque si l'on considère en plus le dé $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$, on a alors une chaîne intransitive $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$, qui s'inverse complètement lorsqu'on double les lancers et devient $R_1 < R_2 < R_3 < R_1$.

tion, la probabilité de gagner exactement p fois quand les dés sont lancés n fois est $n! / [(n-p)! p!] (2/3)^p (1/3)^{n-p}$. On en tire les $79,01\%$ et $95,84\%$ indiqués.

L'utilisation des dés d'Efron pour gagner de l'argent ne marche que si votre ami n'est pas trop méfiant. Le milliardaire américain Warren Buffet proposa un jour au fondateur de *Microsoft*, Bill Gates, de parier en utilisant les dés d'Efron. Il l'invitait bien sûr à choisir un dé en premier. B. Gates, méfiant, examina les dés et suggéra à W. Buffet de commencer lui-même à prendre un dé. L'histoire ne précise pas le montant de l'enjeu envisagé !

Ce que l'on fait avec quatre dés peut-il être fait avec trois dés ? Peut-on éviter les inéligantes et inquiétantes répétitions de numéros sur les faces ? Se peut-il, ce qui serait plus joli et rassurant pour un parieur, que les trois dés aient la même somme des faces (et donc la même moyenne quand on les lance seuls) ?

Trois dés moins suspects

La réponse est oui. Un exemple de tels triplets intransitifs de dés se trouve dans le livre de Gabor Székely paru en 1986. Ces dés sont : $A' = [5, 7, 8, 9, 10, 18]$, $B' = [2, 3, 4, 15, 16, 17]$, $C' = [1, 6, 11, 12, 13, 14]$. Chaque nombre de 1 à 18 n'est utilisé qu'une seule fois, et tous sont utilisés. Chaque dé totalise 57 points et donne donc en moyenne 9,5.

Les calculs montrent que le dé A' gagne contre B' dans 21 cas sur 36 (soit $7/12$). Il en est de même pour le dé B' contre C' , et pour C' contre A' . Bien que les trois dés soient

différents, il semble régner une symétrie parfaite entre eux : d'une part, chacun, utilisé seul, donne la même moyenne 9,5 ; d'autre part, chacun est gagnant contre un autre avec une probabilité de $7/12$, et perdant contre un autre avec la même probabilité. Les dés forment une chaîne intransitive de longueur 3, comme au jeu pierre-feuille-ciseaux :

$A' >_{7/12} B'$	$B' >_{7/12} C'$	$C' >_{7/12} A'$
9,5	9,5	9,5

Pourtant, et c'est un nouveau paradoxe, si les trois dés sont lancés simultanément, le dé B' se montre nettement meilleur. En effet, il y a 216 résultats équiprobables possibles,

Les huit triplets de dés équivalents

$[5, 7, 8, 9, 10, 18]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[1, 6, 11, 12, 13, 14]_{63}$
$[1, 2, 9, 14, 15, 16]_{81}$	$[3, 4, 5, 10, 17, 18]_{81}$	$[6, 7, 8, 11, 12, 13]_{54}$
$[1, 2, 11, 12, 13, 18]_{81}$	$[3, 4, 5, 14, 15, 16]_{75}$	$[6, 7, 8, 9, 10, 17]_{60}$
$[1, 6, 7, 8, 17, 18]_{81}$	$[2, 9, 10, 11, 12, 13]_{60}$	$[3, 4, 5, 14, 15, 16]_{75}$
$[1, 7, 10, 12, 13, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 8, 9, 11, 18]_{63}$
$[1, 8, 9, 12, 13, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 7, 10, 11, 18]_{63}$
$[1, 8, 10, 11, 13, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 7, 9, 12, 18]_{63}$
$[1, 9, 10, 11, 12, 14]_{63}$	$[2, 3, 4, 15, 16, 17]_{90}$	$[5, 6, 7, 8, 13, 18]_{63}$

et leur examen montre que le dé B' l'emporte 90 fois, alors que le dé A' ne gagne que 63 fois, comme le dé C' . L'équivalence des trois dés quand ils jouent seuls ou à deux n'est plus vérifiée quand ils jouent tous ensemble !

Un calcul exhaustif mené en 2010 par Gadin Black pour connaître la liste de tous les triplets de ce type montre qu'il existe huit solutions au problème de trouver trois dés intransitifs ayant les mêmes moyennes individuelles, gagnant avec la même probabilité quand ils gagnent contre un autre et utilisant, à eux trois, une et une seule fois chacun des nombres de 1 à 18. Aucune des solutions ne fait mieux que $7/12$ et aucune

des solutions ne produit un équilibre entre les trois dés quand on les lance tous ensemble. La dissymétrie constatée pour A' , B' et C' est inévitable. Ces huit triplets solutions sont donnés dans l'encadré ci-dessous, avec leurs scores (en indice) quand ils jouent à trois :

Le maximum de gain

Peut-on faire mieux qu'un avantage de $2/3$ quand on prend quatre dés, ou de $7/12$ quand on en prend trois (sans imposer la condition d'utilisation des nombres de 1 à 18) ? Que sait-on de l'avantage maximum possible dans une chaîne intransitive de dés lorsqu'on s'autorise à prendre plus de quatre dés et des dés ayant plus de six faces ?

Assez étrangement, les réponses à ces questions générales avaient été données dans un article de Zalman Usiskin paru en 1964, avant même qu'Efron ne fasse connaître ses dés. L'article se plaçait dans un cadre un peu plus général, mais incluant les jeux de plusieurs dés. Pour trois dés, on ne peut faire mieux que l'inverse du nombre d'or $1/\phi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,6180...$ Pour quatre dés, le maximum possible (atteint par les dés d'Efron) est $2/3 = 0,6666...$ Pour cinq dés, on ne peut dépasser 0,692, solution de l'équation $b^3 + 3b^2 - 4b + 1 = 0$. Z. Usiskin expliquait comment calculer le résultat pour un nombre de dés supérieur à cinq et il démontrait aussi que lorsque le nombre de dés augmente dans une chaîne

intransitive, l'avantage de chaque dé sur celui qu'il bat peut être amené aussi près qu'on le veut de $3/4$, mais sans jamais l'atteindre.

Un beau résultat, lié encore au nombre d'or, a été démontré en 1994 par Richard Savage à propos des jeux de trois dés intransitifs. R. Savage s'intéresse aux dés à n faces et s'impose (comme pour les dés A' , B' et C') de numérotter les faces avec les entiers allant de 1 à $3n$, chacun utilisé une et une seule fois. R. Savage calcule le minimum M de l'avantage qu'un dé a de gagner sur celui qu'il bat et il cherche à rendre ce minimum le plus grand possible, de sorte que le jeu de trois dés soit le plus favorable possible au parieur



Les dés admissibles

												
	1/2	1/2	1/2	1/3	2/5	2/3	1/2	3/5	1/2	2/5	3/5	1/2
	1/2	1/2	1/2	7/17	3/7	10/17	1/2	4/7	1/2	10/23	13/23	1/2
	1/2	1/2	1/2	9/19	8/17	10/19	1/2	9/17	1/2	10/21	11/21	1/2
	2/3	10/17	10/19	1/2	4/9	4/7	5/9	12/23	1/2	8/19	1/2	10/21
	3/5	4/7	9/17	5/9	1/2	12/23	13/24	9/19	1/2	8/17	5/11	11/23
	1/3	7/17	9/19	3/7	11/23	1/2	4/9	5/9	1/2	1/2	11/19	11/21
	1/2	1/2	1/2	4/9	11/24	5/9	1/2	13/24	1/2	5/11	6/11	1/2
	2/5	3/7	8/17	11/23	10/19	4/9	11/24	1/2	1/2	6/11	9/17	12/23
	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
	3/5	13/23	11/21	11/19	9/17	1/2	6/11	5/11	1/2	1/2	3/7	9/19
	2/5	10/23	10/21	1/2	6/11	8/19	5/11	8/17	1/2	4/7	1/2	10/19
	1/2	1/2	1/2	11/21	12/23	10/21	1/2	11/23	1/2	10/19	9/19	1/2

Il n'existe pas de dé équitable à cinq faces, mais en prenant un dé équitable à dix faces (construit par exemple à partir de deux pyramides à base pentagonale collées l'une à l'autre) et en répétant chaque face deux fois, on dispose d'un équivalent physique de dé équitable à cinq faces.

Il existe 12 dés admissibles à cinq faces. Par définition, la somme des faces d'un dé admissible donne

la même somme que le dé standard à cinq faces $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, et chaque face n'utilise que les entiers de 1 à 5. Il existe 32 dés admissibles à six faces, 94 pour sept faces, 289 pour huit faces.

Les 12 dés admissibles à cinq faces, représentés par des étoiles dans le tableau ci-dessus, sont :

$A_1 = [3, 3, 3, 3, 3]$; $A_2 = [4, 3, 3, 3, 2]$; $A_3 = [4, 4, 3, 2, 2]$; $A_4 = [4, 4, 3, 3, 1]$; $A_5 = [4, 4, 4, 2, 1]$; $A_6 = [5, 3, 3, 2, 2]$;

$A_7 = [5, 3, 3, 3, 1]$; $A_8 = [5, 4, 2, 2, 2]$; $A_9 = [5, 4, 3, 2, 1]$; $A_{10} = [5, 4, 4, 1, 1]$; $A_{11} = [5, 5, 2, 2, 1]$; $A_{12} = [5, 5, 3, 1, 1]$.

Le tableau indique, à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , la probabilité que le dé A_i gagne contre le dé A_j . On remarque plusieurs choses intéressantes : a) le dé standard (le dé A_9) fait jeu égal avec tous les autres dés admissibles ; b) chaque dé admissible est battu par un autre ; c) il existe de

nombreuses chaînes intransitives, par exemple $A_1 > A_8 > A_5 > A_1$ ou $A_{10} > A_4 > A_1 > A_8 > A_{10}$.

L'étude générale des familles de dés admissibles à n faces effectuée par Mark Finkelstein et Edward Thorpen 2006 montre que les propriétés (a), (b) et (c) sont générales pour tout $n > 3$, et donc en particulier qu'il existe des chaînes intransitives de dés à n faces pour tout entier n .

Les dés de Sicherman

George Sicherman, un colonel américain, s'est posé l'étrange question : « Est-ce que deux dés différents des dés habituels (dont les faces portent les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6) pourraient, si on les lance ensemble, conduire aux mêmes sommes que les dés usuels et cela avec les mêmes probabilités ? ».

Les probabilités que l'on doit obtenir sont 1/36 pour 2, 2/36 pour 3, 3/36 pour 4, 4/36 pour 5, 5/36 pour 6, 6/36 pour 7, 5/36 pour 8, 4/36 pour 9, 3/36 pour 10, 2/36 pour 11 et 1/36 pour 12.

Contre toute attente, G. Sicherman réussit à trouver deux dés qui font l'affaire : [1, 2, 2, 3, 3, 4] et [1, 3, 4, 5, 6, 8]. Le tableau ci-contre permet de vérifier que les

36 sommes possibles sont exactement les mêmes que celles données par deux dés habituels.

La solution de G. Sicherman est unique pour les dés à six faces, mais des généralisations des dés de Sicherman ont été proposées (voir Duane Broline, « Renumbering of the faces of dice », *Mathematics Magazine*, vol. 52(5), pp. 312-315, 1979).

+	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●
2	3	3	4	4	5	
4	5	5	6	6	7	
5	6	6	7	7	8	
6	7	7	8	8	9	
7	8	8	9	9	10	
9	10	10	11	11	12	

qui offre un pari comme celui de W. Buffet et B. Gates. R. Savage démontre qu'à condition de prendre des dés ayant beaucoup de faces, on peut s'approcher autant qu'on le souhaite de la limite $1/\phi$ démontrée indépassable par Z. Usiskin (et cela en respectant la contrainte d'utilisation de chaque entier de 1 à $3n$). La valeur optimale $7/12 = 0,5833$ trouvée pour les dés à six faces peut donc être améliorée et s'approcher de $1/\phi = 0,618033...$ d'aussi près qu'on le veut... si l'on prend des triplets de dés à plus de six faces.

Un autre résultat général mérite d'être mentionné. Mark Finkelstein et Edward Thorp se sont intéressés aux dés qu'ils nomment admissibles. Un dé à n faces est admissible si, sur ses faces, n'apparaissent que des nombres compris entre 1 et n (éventuellement plusieurs fois et pas forcément tous), et si la somme des faces d'un dé est la même que celle du dé standard à n faces marquées de 1, 2, 3, ..., n (dont la somme vaut $n(n+1)/2$). Le beau théorème de M. Finkelstein et E. Thorp affirme que si n est supérieur à 3, alors tout dé admissible à n faces, différent du dé standard à n faces, est battu par un autre dé admissible à n faces; de plus, le dé standard à n faces fait jeu égal contre tout dé admissible à n faces. Une conséquence de ce théorème est que pour tout $n > 3$, il existe des chaînes intransitives de dés admissibles.

Pour $n = 4$ (dés tétraédriques), en plus du dé standard [1, 2, 3, 4], il n'existe que quatre dés admissibles: $F_1 = [3, 3, 2, 2]$, $F_2 = [4, 2, 2, 2]$, $F_3 = [4, 4, 1, 1]$, $F_4 = [3, 3, 3, 1]$. Les combats entre eux donnent:

$$F_1 >_{6/10} F_2 >_{8/14} F_3 >_{8/14} F_4 >_{6/10} F_1;$$

$$F_4 >_{9/16} F_2 >_{8/14} F_3 >_{8/14} F_4; F_3 \approx F_1.$$

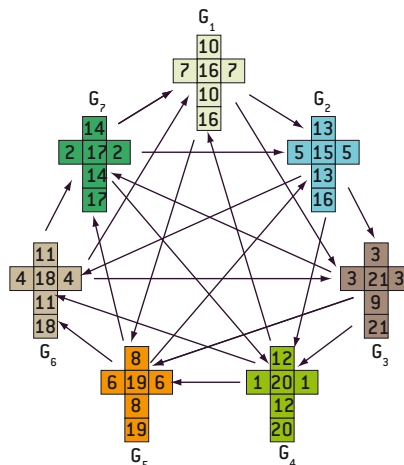
Il n'existe, dans ce cas extrême, que deux chaînes intransitives: l'une, de longueur 4, est composée de F_1, F_2, F_3, F_4 ; l'autre, de longueur 3, est composée de F_2, F_3, F_4 .

On aurait pu penser qu'avec les huit triplets de type A', B', C' ou avec les chaînes intransitives de trois et quatre tétraèdres admissibles, on avait atteint les sommets de la beauté paradoxale. Ce n'est pas le cas, et la série de trois dés $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3]$, $R_2 = [5, 5, 5, 2, 2, 2]$, $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$, inventées en 2002 par Tim Rowett, perfectionne encore le paradoxe. Nous allons voir qu'en plus de composer une chaîne intransitive, elle a une propriété inattendue très intéressante pour faire un pari... même avec B. Gates.

Un pari renversant

Il s'agit bien d'un triplet intransitif: R_1 bat R_2 avec la probabilité $7/12$, R_2 bat R_3 avec la probabilité $7/12$ et R_3 bat R_1 avec la probabilité $25/36$. Rien de bien nouveau jusqu'ici. Pourtant, il se produit quelque chose d'incroyable que je n'ai cru qu'après avoir fait un programme pour le vérifier. Si, au lieu de jeter chaque dé une fois, on choisit de le jeter deux fois et de faire la somme des faces tombées, alors tout s'inverse: R_2 bat R_1 avec la probabilité $765/1296 = 0,5903$; R_3 bat R_2 avec la probabilité $765/1296 = 0,5903$; R_1 bat R_3 avec la probabilité $671/1296 = 0,5177$.

Cette propriété inouïe montre, là encore, que notre intuition en matière de probabilité est illusoire. Elle suggère une nouvelle façon de piéger votre ami le parieur... et cela même s'il est aussi malin que B. Gates et s'il sait que des dés peuvent être intransitifs.



LES SEPT DÉS DU NÉERLANDAIS Oskar van Deventer, un inventeur de jeux. La direction des flèches indique quel est le dé gagnant dans une confrontation entre deux dés. Par exemple, G_1 est gagnant contre G_2 .

Vous commencez par lui présenter les dés. Il les examine, repère la chaîne intransitive. Il est alors prêt à parier si vous acceptez de choisir le dé en premier. Vous acceptez de choisir en premier et prenez un dé quelconque (mais de préférence R_2 ou R_3 pour éviter le 0,5177). Il choisit le dé qui bat votre dé dans la chaîne intransitive.

Vous lui proposez alors de doubler l'enjeu, à la condition de lancer chaque dé deux fois et de comparer les sommes obtenues (cela 25 fois de suite, comme auparavant). Croyant comme tout le monde que lancer deux fois le dé augmente encore son avantage, il acceptera... alors qu'en réalité, l'avantage sera maintenant pour vous et que vous gagnerez le pari (dans précisément 82,10 % des cas). Ahurissant !

Pourquoi y a-t-il l'inversion de la chaîne intransitive ? Pour voir que l'inversion est possible, étudions le cas des deux dés les plus simples : $R_1 = [6, 3, 3, 3, 3, 3]$ et $R_3 = [1, 4, 4, 4, 4, 4]$.

Quand ils sont lancés une seule fois, R_3 bat R_1 , car 4 bat 3 et que cela se produit 25 fois sur les 36 cas possibles. Calculons les sommes possibles de deux faces de R_1 et de deux faces de R_3 :

– Pour R_1 : $6 + 3 = 9$, 10 fois ; $3 + 3 = 6$, 25 fois ; $6 + 6 = 12$, 1 fois.
– Pour R_3 : $1 + 1 = 2$, 1 fois ; $4 + 4 = 8$, 25 fois ; $1 + 4 = 5$, 10 fois.

Il y a 1 296 = 36×36 cas possibles quand on lance deux fois R_1 et deux fois R_3 . Le dé R_3 ne gagne que si la somme qu'il obtient est 8. Quand c'est le cas, il ne gagne que si R_1 lancé deux fois fait 6. Le dé R_3 dans la compétition avec double lancer ne gagne donc que $25 \times 25 = 625$ fois sur les $36 \times 36 = 1\,296$ cas possibles. C'est moins de la moitié des cas, donc R_3 perd contre R_1 dans une compétition avec des doubles lancers. L'inversion est possible, nous l'avons sous les yeux !

Tentons une explication en quelques mots. Le dé R_3 gagne contre R_1 quand le lancer est simple, mais il gagne en général d'assez peu : 4 contre 3. Cela a pour conséquence que quand on considère les sommes de deux faces de R_3 , celles-ci (2, 8 ou 5) sont assez mauvaises comparées à celles de R_1 (9, 6 ou 12), ce qui le conduit à perdre dans une épreuve constituée de lancers doubles.

Quand on lance chaque dé trois fois au lieu de deux, R_2 bat R_1 , R_3 bat R_2 et R_3 bat R_1 . Le dé R_3 est donc cette fois dominant, il n'y a plus de chaîne intransitive, celui qui choisit R_3 a toujours l'avantage. C'est étrange, car lorsqu'on fait une compétition directe entre les trois dés (lancer simultanément des trois dés), on obtient 51-90-75 : le dé R_2 est le meilleur !

Contre deux adversaires

Pour terminer la présentation des descendants superparadoxaux des dés d'Efron, mentionnons les sept dés d'Oskar van Deventer, qui permettent de parier contre deux adversaires à la fois :

$G_1 = [7, 7, 10, 10, 16, 16]$, $G_2 = [5, 5, 13, 13, 15, 15]$,
 $G_3 = [3, 3, 9, 9, 21, 21]$, $G_4 = [1, 1, 12, 12, 20, 20]$,
 $G_5 = [6, 6, 8, 8, 19, 19]$, $G_6 = [4, 4, 11, 11, 18, 18]$
et $G_7 = [2, 2, 14, 14, 17, 17]$. Le graphe indiquant qui gagne quand deux dés s'opposent est donné page précédente.

Chaque dé a un total des faces de 66, soit 11 points en moyenne. Pour chaque combat, la probabilité de gagner pour le vainqueur est $20/36 = 5/9$. En observant le graphe, vous constaterez que pour toute paire de dés choisis parmi les sept, il y a toujours un troisième dé qui les bat tous deux.

Vous pouvez donc proposer le pari suivant à deux de vos amis simultanément. Le premier choisit un dé, le second en choisit un autre. Vous prenez un dé en dernier, qui sera celui qui domine les deux dés choisis par vos amis. Ensuite, vous engagez une partie avec votre premier ami (par exemple en 25 lancers). Le jeu vous est favorable, vous le battez le plus souvent. Sans changer de dé, vous jouez avec votre autre ami (toujours en 25 lancers). À nouveau, les chances seront de votre côté !

Attention toutefois : quand le jeu vous est favorable ou que les chances sont de votre côté, cela ne signifie pas une certitude de victoire à 100 %, mais seulement que vous gagnerez dans plus de la moitié des cas. Ici, le calcul indique qu'avec l'avantage de $5/9$ et 25 lancers par confrontation, vous gagnerez dans 71 % des cas. Si vous souhaitez gagner plus sûrement, proposez des confrontations en opérant un plus grand nombre de lancers. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Grime, *Non-transitive dice*, 2012, sur <http://singinbanana.com/dice/article.htm>

M. Criton, *Les jeux de dés*, *Gazette des Mathématiciens*, vol. 128, pp. 47-61, avril 2011.

M. Finkelstein et E. Thorp, *Nontransitive dice with equal means*, dans *Optimal Play: Mathematical Studies in Games and Gambling*, pp. 293-310, 2006 : <http://www.math.uci.edu/~mfinkels/dice9.pdf>

M. Gardner, *The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems*, W. W. Norton & Company, pp. 286-311, 2001.

R. Savage, *The paradox of nontransitive dice*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 101(5), pp. 429-436, 1994.

G. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Reidel Publishing Company, 1986.

M. Gardner, *The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference*, *Scientific American*, n° 223, pp. 110-114, décembre 1970.

Z. Usiskin, *Max-min probabilities in the voting paradox*, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, pp. 857-862, 1964.

SCIENCE & FICTION

Les dinosaures de la science-fiction

Parmi les héros des films de science-fiction, à côté des inventions des scénaristes, figurent en bonne place les dinosaures, dont la « dinodiversité » est immense !

J. Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Apparus il y a environ 230 millions d'années, les dinosaures sont généralement définis comme des archosaures (groupe rassemblant aujourd'hui les crocodiles et les oiseaux), partageant des caractères liés notamment à leur posture érigée, c'est-à-dire que leurs membres sont disposés sous le corps – comme la plupart des mammifères – et non latéralement – comme chez beaucoup d'autres « reptiles ». Contrairement à une idée tenace, les dinosaures n'ont pas tous disparu il y a 65 millions d'années. Ainsi, les oiseaux sont de petits dinosaures à plumes (du groupe des théropodes), comme le montrent de nombreux fossiles, tel l'*Archaeopteryx*, mi-dinosaure mi-oiseau.

En 1842, le paléontologue britannique Richard Owen fut le premier à donner un

nom à ces grands animaux fossilisés : il les nomma « terribles lézards ». Ces animaux disparus, souvent gigantesques, ont stimulé l'imagination des écrivains d'abord, des cinéastes ensuite. Ainsi, Jules Verne a imaginé, dans son *Voyage au centre de la Terre* (1864), des dinosaures vivant dans les profondeurs de la Terre. Considéré comme l'un des pères de la science-fiction, Verne est aussi le précurseur d'un genre à part entière que l'on pourrait nommer « dinofiction », tant les histoires faisant interagir des dinosaures et des hommes ont été nombreuses après lui !

Ces dinosaures sont-ils toujours fidèlement reconstitués ? Examinons d'abord l'origine de ces dinosaures fantastiques : dans *King Dinosaur* (Bert Gordon, 1955), des astronautes explorent une planète mystérieusement apparue dans l'espace

(mais à quelques heures de fusée de la Terre !) et rencontrent des dinosaures. Dans *L'Arche de Monsieur Servadac*, film poétique du Tchèque Karel Zeman (1970) adapté d'un roman de Jules Verne, une comète frôlant la Terre arrache un morceau d'Afrique du Nord et s'écrase sur une planète peuplée d'étranges animaux dont... un dinosaure !

S'échouer sur une planète ou une île, explorer le centre de la Terre, mais aussi remonter le temps pour de curieux safaris (*Un coup de tonnerre*, Ray Bradbury, 1952 ou la série *Prehistoric Park*), ou encore cloner des dinosaures (Michael Crichton, 1990), les subterfuges sont nombreux pour présenter ces monstres à l'écran. Notons que la solution du clonage relève encore du fantasme : même si les oiseaux portent en eux une partie du patrimoine génétique de leurs ancêtres reptiliens, nous serions incapables de reconstruire un dinosaure entier. Tout au plus obtenons-nous, en greffant du tissu dentaire de lézard sur un embryon de poulet, un poussin génétiquement modifié... avec des dents !

Pour reconstituer ces animaux, l'imagination a été fertile : costumes plus ou moins désuets revêtus par des acteurs (*L'île Inconnue*, 1948) ou prises de vue au ralenti de vrais reptiles grimés (*Voyage au Centre de la Terre*, 1959). La technique la plus répandue restait, avant l'ère du numérique, le *stop motion* consistant à filmer des figurines de dinosaures image par image (*Le Monde Perdu*, 1925 ; *King Kong*, 1933). Hélas, certains modèles réduits ont beaucoup vieilli. C'est le cas de l'*Allosaurus* (théropode du Jurassique rarement mis en scène) dans



1. DANS JURASSIC PARK, les dinosaures règnent en maîtres. Ici, des vélociraptors menacent le paléontologue Alan Grant, même si... plus de 65 millions d'années les ont séparés.

© Bureau L. A. Collection/Sygma/Corbis