

ont ensuite écouté un ensemble de phrases mêlées à un fond sonore aléatoire. À leur insu, la moitié des participants entendaient des phrases prononcées par la personne sur les lèvres de laquelle ils venaient de lire. Ils ont mieux réussi à détecter les phrases au milieu du bruit de fond que les autres.

Les résultats sur la perception multisensorielle de la parole ont incité les chercheurs à examiner tous les types d'interactions. Dès lors, ils ont multiplié les découvertes. Le goût perçu est par exemple influencé par l'odeur, mais aussi par les images et les sons. Ainsi, une boisson parfumée à l'orange semble avoir le goût de cerise si elle est colorée en rouge, et *vice versa*. En 2005, Massimiliano Zampini, de l'Université de Trente, en Italie, et son équipe ont montré que la diffusion d'un son modifié de « croquant » à des sujets qui mangent des chips change la façon dont ils perçoivent la fraîcheur et le croustillant de l'aliment. Quand on regarde un motif visuel qui descend continuellement, telle une chute d'eau, tout en touchant certaines surfaces immobiles, on a l'impression que ces surfaces sont en train de monter. Tom Stoffregen, de l'Université du Minnesota, et ses collègues ont demandé à des sujets de se tenir droits et de déplacer leur regard, d'une cible proche à une cible éloignée. Ce décalage de leur centre d'attention visuel a entraîné de légères modifications de leur posture.

Des interactions dans tous les sens

L'activité d'une aire sensorielle est donc souvent modulée par des signaux issus de plusieurs sens. En outre, le cerveau fait preuve d'une plasticité importante : une aire cérébrale peut changer de fonction lors d'une privation sensorielle, même partielle ou de courte durée. Des études d'imagerie menées depuis quatre ans l'ont confirmé pour le cortex visuel : quand on bande les yeux d'une personne ne serait-ce que durant une heure et demie, on constate que son cortex visuel se met à réagir au toucher, ce qui renforce la sensibilité tactile. Autre exemple, la myopie accroît souvent les facultés auditives et spatiales d'un individu, même s'il porte des lunettes (qui laissent flou une partie du champ visuel périphérique). Ainsi, la compensation multisensorielle est omniprésente.

On en déduit des indications thérapeutiques pour ceux qui ont perdu l'un de

Aire multisensorielle ou redirection de l'attention ?

La privation temporaire d'un sens augmente la sensibilité aux autres sens, ce que l'auteur de l'article semble attribuer aux capacités multisensorielles des aires cérébrales. Ainsi, le cortex visuel s'active en réponse au toucher lorsqu'on a les yeux bandés depuis une heure et demie. Toutefois, cette activation pourrait être le signe non pas d'un traitement des données tactiles par le cortex visuel (qui n'est plus accaparé par les données visuelles), mais d'as-

sociations apprises entre les deux types de propriétés : on associe par exemple une certaine texture tactile avec l'apparence des objets sur lesquels on l'a rencontrée, de sorte que toucher cette texture active le cortex visuel.

D'où viendrait alors l'augmentation de la sensibilité au toucher ? Elle pourrait être due à des effets attentionnels : n'étant plus mobilisée par les autres sens, l'attention peut se concentrer sur le toucher. Des études sup-

plémentaires sont nécessaires pour trancher. Le phénomène est différent lors de la privation définitive d'un sens : chez les aveugles, par exemple, le cortex visuel se « recâble » pour l'audition, et l'augmentation de la sensibilité aux sons est donc due à l'établissement de nouvelles connexions neuronales.

Pascal Mamassian,
Laboratoire Psychologie
de la perception, CNRS
et Université Paris Descartes

leurs cinq sens. Par exemple, les implants cochléaires sont moins efficaces si le cerveau a eu trop de temps pour « reprogrammer » le cortex auditif pour d'autres formes de perception, tels la vue et le toucher. C'est pourquoi, quand on décide de mettre un implant cochléaire à un enfant sourd de naissance, mieux vaut le faire aussi tôt que possible. On encourage aussi les enfants sourds dotés de ces implants à regarder des films de personnes qui parlent, afin qu'ils apprennent à associer les mouvements des lèvres à ce qu'ils entendent.

Les dispositifs de reconnaissance de la parole (tels ceux traduisant les paroles captées par un microphone en un texte écrit) ont aussi bénéficié des recherches sur la perception multisensorielle. Ces dispositifs sont souvent perturbés par le bruit de fond, même modéré. Quand on leur fait analyser les mouvements de la bouche du locuteur (ils doivent alors disposer d'une caméra), leur précision s'améliore notablement. Cette stratégie fonctionne avec les caméras des téléphones cellulaires.

La notion de perception multisensorielle semble contredire notre expérience quotidienne. D'instinct, nous séparons les sens, qui paraissent traiter des aspects différents du monde. Nous utilisons les yeux pour voir et les oreilles pour entendre ; nous ressentons la consistance d'une pomme avec les mains et son goût avec la langue. Cependant, lorsqu'une information sensorielle atteint le cerveau, tout s'amalgame. Le cerveau ne range pas l'information visuelle provenant des yeux dans un conteneur neuronal, et celle, auditive, issue des oreilles dans un autre. Au contraire, il interprète le monde qui nous entoure en mêlant les diverses formes de perceptions sensorielles. ■

■ L'AUTEUR



Lawrence
ROSENBLUM
est professeur
de psychologie
à l'Université
de Californie
à Riverside, aux États-Unis.

■ SUR LE WEB

Vidéos sur l'effet McGurk et d'autres expériences de perception multisensorielle : ScientificAmerican.com/jan2013/multisensory-perception.

■ BIBLIOGRAPHIE

Barry Stein (éd.), *The New Handbook of Multisensory Processing*, MIT Press, 2012.

L. Rosenblum, *See What I'm Saying : The Extraordinary Power of Our Five Senses*, W. W. Norton, 2010.

L. Rosenblum, *Speech perception as a multimodal phenomenon*, *Current Directions in Psychological Science*, vol. 17, pp. 405-409, 2008.

Les grappes de sphères collantes

Brian Hayes

Dans un tas de billes, quel est le nombre maximal de contacts que l'on peut former ? On connaît depuis peu la réponse... mais seulement pour moins de 12 billes !

Prenez 12 billes identiques, et serrez-les pour former un amas compact. Comptez alors le nombre de points où les billes se touchent. Quel est le plus grand nombre que vous pouvez obtenir ? Quel est l'arrangement géométrique correspondant ? La grappe optimale est-elle unique, ou bien en existe-t-il plusieurs donnant le même maximum ?

Pour une grappe constituée de trois, quatre ou cinq sphères de taille égale, on imagine que le problème ne pose pas de difficultés particulières. Mais il se corse très vite quand la taille des grappes augmente. Ces trois dernières années, le nombre maximal de contacts a été déterminé pour les grappes comprenant jusqu'à 11 sphères. Pour ce faire, il a fallu recourir à des outils mathématiques empruntés à la théorie des graphes ou à la géométrie, ainsi qu'à de gros calculs et, à quelques étapes cruciales, à la construction de modèles de boules et de tiges.

Pour les grappes de 12 sphères ou plus, on ne connaît toujours pas les réponses. Il est un peu humiliant d'être mis en échec par de si modestes tas de billes, mais ce n'est en fait pas si surprenant. Les problèmes

L'ESSENTIEL

■ Les empilements de sphères intéressent depuis longtemps les mathématiciens et les physiciens.

■ L'une des questions porte sur le nombre maximal de contacts entre sphères dans un empilement fini.

■ Ce problème est facile pour moins de cinq sphères, mais il n'a été résolu que récemment pour des agrégats contenant jusqu'à 11 sphères.

■ Le cas d'une grappe de 12 sphères pourrait être bientôt réglé. Au-delà, c'est l'inconnu.

Sauf mention contraire, toutes les illustrations sont de Brian Hayes

d'empilements compacts de sphères sont notoirement épineux. Certains résistent depuis des siècles.

Ainsi, en 1611, Johannes Kepler a affirmé que l'empilement le plus dense possible de sphères identiques est l'arrangement correspondant aux pyramides d'oranges que l'on voit chez les marchands de primeurs (voir la figure 1). Toute sphère y touche 12 autres sphères, et la fraction du volume rempli par les sphères s'élève à $\pi/\sqrt{18}$, soit environ 0,74. Kepler pensait apparemment que la supériorité de son empilement était tellement évidente qu'aucune démonstration n'était nécessaire ; et aucune preuve n'a été fournie pendant près de 400 ans. Ce n'est qu'en 1998 que Thomas Hales, de l'Université de Pittsburgh, a enfin démontré qu'aucun autre empilement tridimensionnel n'était plus dense.

La conjecture de Kepler et sa démonstration par Th. Hales s'appliquent à un réseau infini de sphères. Mais une autre énigme pluricentenaire concerne les grappes finies. Tout a commencé dans les années 1690 avec une dispute entre Isaac Newton et son disciple David Gregory. D'après une version de



l'histoire, Newton soutenait qu'une sphère centrale ne pouvait pas toucher plus de 12 autres sphères identiques, alors que, selon Gregory, il y avait de la place pour une 13^e sphère dans le halo. Ce problème du «nombre de baisers» n'a été résolu qu'en 1953, quand l'Allemand Kurt Schütte et le Néerlandais Bartel van der Waerden ont prouvé que Newton avait raison, mais de justesse : quand on introduit une 13^e sphère dans la grappe, le diamètre global n'augmente que d'environ cinq pour cent (voir la figure 2).

Pourquoi le compactage des sphères suscite-t-il autant d'intérêt ? Kepler tentait d'expliquer les symétries des flocons de neige, et de nombreux travaux ultérieurs sur les empilements de sphères étaient également motivés par des questions sur la structure des solides et des liquides. L'accent mis récemment sur les grappes a pour origine l'étude des colloïdes, poudres et autres systèmes physiques où la cohésion des amas de particules est assurée par des forces de très courte portée.

Pour construire des grappes et compter les contacts, il est commode de travailler avec des sphères de diamètre de 1 (donc de rayon 1/2). Quand deux telles sphères se touchent, la distance

entre leurs centres vaut 1. Les diagrammes accompagnant cet article montrent une tige de longueur 1 reliant les centres des sphères qui se touchent. Certains modèles physiques des grappes (dont les kits *Geomag*) conservent ce squelette de tiges de liaison et omettent complètement les sphères.

Maximiser les contacts

Dans une grappe de n sphères, notons C_n le nombre total de points de contact, et $\max(C_n)$ la valeur maximale de C_n que l'on rencontre parmi toutes les grappes de n sphères. Pour les plus petites valeurs de n , il n'est pas difficile de trouver $\max(C_n)$ (voir la figure 3).

Le cas $n = 1$ est trivial : une sphère isolée ne touche rien, donc $\max(C_1) = 0$. Deux sphères ne peuvent se toucher qu'en un point, d'où $\max(C_2) = 1$. Pour trois sphères, la meilleure solution est de placer les centres des sphères aux sommets d'un triangle équilatéral ; dans cette configuration, il y a trois points de contact, donc $\max(C_3) = 3$. On peut placer une quatrième sphère au sommet du triangle pour créer un tétraèdre régulier à six contacts deux à deux, d'où $\max(C_4) = 6$.

1. CETTE « GRAPPE » DE DIX ORANGES, construite sur le même mode que l'empilement compact de Kepler, contient 22 contacts entre deux oranges. On peut faire mieux : il existe trois grappes de dix sphères identiques présentant 25 contacts.



© Shutterstock/Imageman

Il est également facile de prouver qu'aucune autre configuration de n sphères, pour $n \leq 4$, ne pourrait avoir un C_n supérieur. En effet, dans ces grappes, chaque sphère touche chacune des autres sphères, et donc le nombre de contacts ne pourrait pas être supérieur. Dans la terminologie de la théorie des graphes, une telle grappe est une clique; le nombre de contacts dans une grappe-clique est $n(n-1)/2 = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$

Mais à partir de $n = 5$, il est impossible de disposer cinq sphères identiques de façon qu'elles se touchent toutes. Si une clique à cinq sphères existait, elle aurait dix points de contact. Mais on ne peut faire mieux que $C_5 = 9$, qui est le nombre de contacts formés quand on attache une cinquième sphère à une face quelconque de la grappe tétraédrique. La structure ainsi obtenue est une dipyramide triangulaire.

Jusqu'ici, pour chaque valeur de n , il y avait une unique grappe qui maximise C_n . De plus, dans chaque cas, la grappe la mieux connectée comportant $n + 1$ sphères peut être obtenue par incrément en collant une nouvelle sphère quelque part à la surface de la grappe réalisant $\max(C_n)$.

Ces propriétés cessent d'être vraies à partir de $n = 6$. Avec six sphères, deux formes de grappes donnent le même nombre maximal de contacts, $C_6 = 12$ (voir la figure 4). L'une est construite par incrément, à partir de la dipyramide triangulaire à cinq sphères. Mais l'autre, l'octaèdre, ne peut pas être créée en collant simplement une sphère à la surface d'une grappe optimale plus petite.

Au-delà de $n = 6$, trouver toutes les grappes ayant le maximum de contacts devient plus difficile. Pour $n = 7$, l'approche incrémentale consistant à rajouter une sphère à la surface d'une grappe de $n = 6$ donne quatre solutions à 15 points de contact ($C_7 = 15$). Trois de ces grappes sont constituées de quatre tétraèdres collés face contre face de diverses façons (voir la figure 5).

En passant un peu de temps avec les *Geomag* ou un autre jeu de modèles tridimensionnels, on a de bonnes chances de trouver ces quatre configurations. Mais comment savoir s'il n'y a pas d'autres grappes de sept sphères à 15 contacts ? Et comment prouver que l'on ne peut avoir 16 contacts, voire plus ?

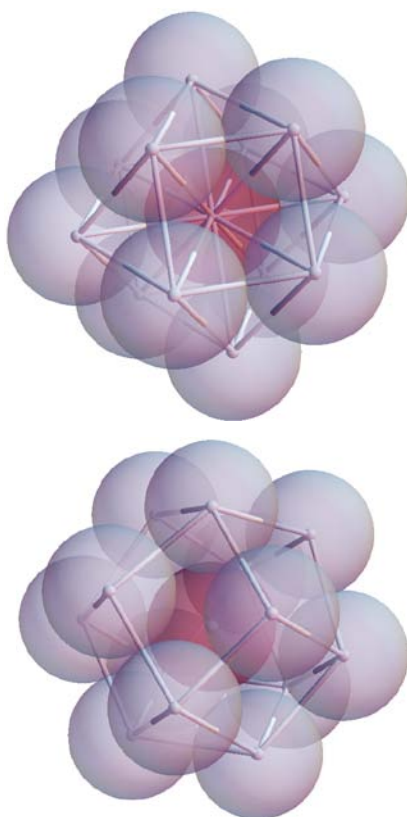
Il s'avère que 15 est effectivement le nombre maximal de contacts pour sept sphères, mais il y a aussi une cinquième grappe qui le réalise; il s'agit d'une dipyramide pentagonale (voir la figure 5e). Dotée

■ L'AUTEUR



Brian HAYES collabore à la revue *American Scientist* où il tient depuis 1993 la chronique *Computing Science*. Son blog (<http://bit-player.org/>) est également consacré à des questions mathématiques.

Article publié avec l'aimable autorisation de *American Scientist*.



2. LE PROBLÈME DU NOMBRE DE BAISERS consiste à se demander combien de sphères peuvent toucher une sphère centrale de même taille. Il n'a reçu une réponse que dans les années 1950. En haut, 12 sphères sont en contact avec la sphère centrale rouge, dans une configuration dérivée du réseau hexagonal compact de Johannes Kepler. Lorsqu'on ajoute une 13^e sphère (en bas), tout le halo de sphères perd contact avec la sphère centrale, bien que le diamètre de la grappe n'augmente que d'environ cinq pour cent. Dans ces diagrammes, si deux sphères se touchent, leurs centres sont reliés par un bâtonnet.

d'une symétrie d'ordre cinq, cette structure n'a aucun motif en commun avec l'une quelconque des grappes plus petites. La nouveauté de cet objet soulève une fois de plus la question : comment être sûr qu'il n'existe pas d'autres configurations à découvrir ?

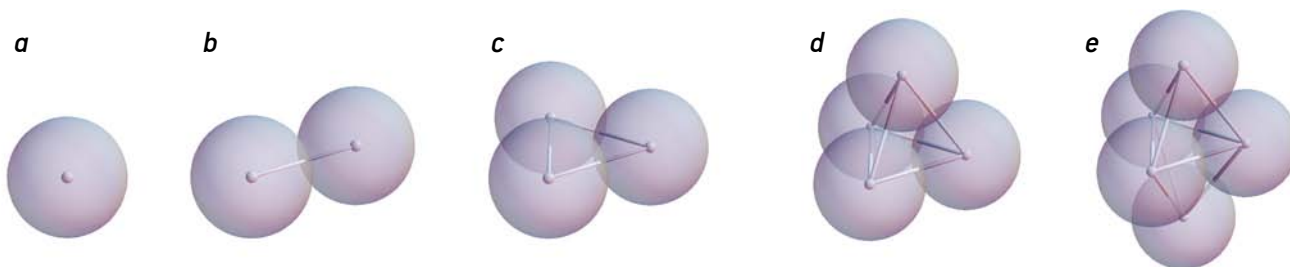
Pour répondre à ces questions, un programme fructueux a été lancé il y a cinq ans par Natalie Arkus, alors doctorante à l'Université Harvard. Dans une série d'articles écrits avec ses collègues Michael Brenner et Vinodhan Manoharan, elle a énuméré toutes les configurations réalisant $\max(C_n)$ pour $n = 7, 8, 9, 10$. Les résultats ont ensuite été étendus à $n = 11$ par Robert Hoy, Jared Harwayne-Gidansky et Corey O'Hern, de l'Université Yale. Tous les résultats que je décris ici sont issus des travaux de ces deux groupes.

Force de courte portée

Une façon de résoudre les problèmes d'empilements compacts de sphères est de considérer ces dernières comme des particules en interaction *via* une certaine force. Par analyse mathématique ou par des simulations numériques, on peut alors essayer de trouver une configuration géométrique qui minimise l'énergie potentielle du système. En général, la force s'exerçant entre deux particules est une fonction régulière de la distance qui les sépare. Quand les deux particules sont très éloignées, la force est négligeable ; à plus courte portée, la force devient fortement attractive ; à des distances encore plus courtes, une répulsion dite « de cœur dur » empêche les sphères de s'interpénétrer. À l'équilibre, les particules soumises à une force de ce type se disposent avec une séparation petite, mais non nulle.

Le problème du dénombrement des contacts peut être traduit en termes de forces et d'énergie, mais de façon assez particulière. Tout d'abord, la force n'est ici pas une fonction régulière de la distance. Tant que les sphères ne se touchent pas, aucune force ne s'exerce. Mais si les sphères viennent à se toucher, elles se collent ; brusquement, la force devient attractive. Et toute tentative de les rapprocher davantage se heurte à une résistance infinie.

Dans ce monde des sphères collantes, la portée des forces en jeu est plus que courte : elle est nulle (Martin Gardner avait suggéré un modèle pour de tels systèmes : des balles de ping-pong recouvertes de mastic).



3. NOMBRES MAXIMAUX DE CONTACTS. Une sphère isolée n'a pas de contact [a]. Deux sphères ne peuvent se toucher qu'en un point [b]. Trois sphères peuvent former un triangle équilatéral, avec trois contacts [c]. Quatre sphères disposées en tétraèdre ont six contacts [d].

Dans ces quatre cas, chaque sphère touche chaque autre sphère de la grappe, mais il n'existe plus de configuration de ce type à partir de cinq sphères. Pour ce cas, la meilleure configuration est celle d'une dipyramide triangulaire, avec neuf points de contact [e].

L'énergie totale de deux sphères diminue quand elles se touchent, et il faut apporter de l'énergie pour les séparer ; mais une fois séparées, elles n'ont plus d'influence l'une sur l'autre. L'énergie potentielle de l'ensemble du système est donc minimale quand le nombre de contacts est maximal.

La nature discontinue de la loi de force modifie le type d'outils mathématiques à utiliser. Avec une loi de force régulière, on peut résoudre les problèmes d'empilements compacts de sphères par des méthodes d'optimisation continue. Un tel algorithme essaie de réduire l'énergie totale en ajustant petit à petit les positions des particules, et en continuant jusqu'à ce qu'aucun progrès ne soit obtenu. Cette approche ne fonctionne pas avec les sphères collantes, parce qu'il n'y a pas de gradient régulier pour guider les particules vers les configurations de basse énergie. C'est pourquoi le problème des sphères collantes a pu paraître plus ardu que la plupart des autres questions d'empilements compacts de sphères.

D'un autre côté, la nature discrète (tout ou rien) de l'énergie potentielle des sphères collantes confère un avantage important. Puisque chaque paire de sphères soit se touche, soit ne se touche pas, le nombre de configurations essentiellement différentes est fini. En principe, on peut examiner toutes ces possibilités et simplement choisir celle présentant le plus de contacts, donc l'énergie potentielle la plus basse. C'est cet angle d'approche – l'idée que le problème peut être résolu par une énumération exhaustive – qui a conduit aux résultats récents des équipes de Harvard et Yale.

On peut représenter toutes les données essentielles relatives aux contacts au sein d'une grappe de sphères par un graphe, c'est-à-dire un ensemble de sommets et d'arêtes. Chaque sphère est représentée par un sommet, et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les

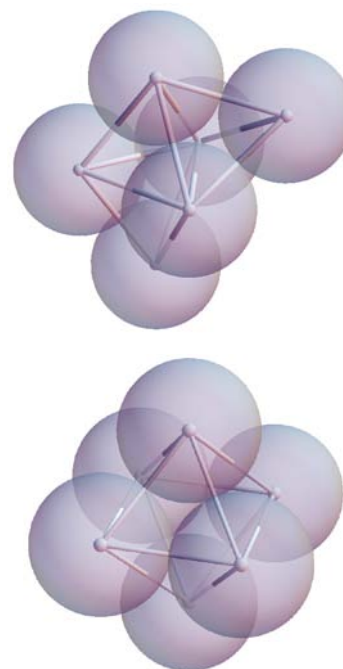
sphères correspondantes sont en contact. La même information peut être codée de façon encore plus abstraite dans une « matrice d'adjacence ». Une grappe de n sphères devient une matrice (un tableau) $n \times n$ de 0 et de 1 : l'élément de matrice à l'intersection de la ligne i et de la colonne j vaut 1 si la sphère i touche la sphère j , et 0 sinon.

De la géométrie à la théorie des graphes

Une grappe de sphères étant donnée, il est facile de construire le graphe ou la matrice d'adjacence correspondants. Mais, inversement, est-il possible de reconstituer la géométrie de la grappe à partir d'une matrice d'adjacence ? En d'autres termes, sans autre point de départ qu'un tableau indiquant quelles sphères se touchent, peut-on déterminer les coordonnées de toutes les sphères dans l'espace à trois dimensions ?

Pas toujours. Par exemple, la matrice constituée exclusivement de 0 ne révèle rien sur les positions des sphères, mis à part qu'elles ne se touchent pas. Et la matrice constituée uniquement de 1 décrit une grappe qui ne peut tout simplement pas exister dès lors que $n \geq 4$. Mais pour une classe importante de grappes, la matrice d'adjacence apporte assez d'information pour autoriser une reconstruction complète. Cette classe inclut les grappes qui maximisent le nombre de contacts. Ces éléments suggèrent une stratégie de résolution directe : recenser toutes les matrices candidates, puis vérifier lesquelles produisent des grappes géométriquement possibles.

Combien de matrices d'adjacence faut-il tester ? Puisque le contact est une relation symétrique (si i touche j , alors j touche i), toute l'information de la matrice est confinée à son triangle supérieur, qui comporte $n(n-1)/2$ éléments (voir la figure 6). Chaque élément a deux valeurs possibles, si bien



4. POUR LES GRAPPES DE SIX SPHÈRES, deux géométries distinctes maximisent le nombre de contacts. La grappe du haut est construite par incrément à partir de la grappe optimale à cinq sphères en attachant une sixième sphère à une face de la dipyramide triangulaire. L'autre configuration est l'octaèdre (en bas). Les deux structures ont chacune 12 points de contact.

que le nombre total de matrices d'adjacence différentes est $2^{n(n-1)/2}$.

Passer au crible $2^{n(n-1)/2}$ matrices serait une tâche redoutable ; la valeur de cette expression dépasse déjà deux millions pour $n = 7$, et 10^{16} pour $n = 11$. Mais toutes ces matrices ne sont pas distinctes. Beaucoup ne représentent qu'un étiquetage différent d'un même graphe. Quand on élimine les redondances de ce type, le nombre de matrices 7×7 distinctes tombe de 2097152 à seulement 1044.

Un autre tri a permis à N. Arkus et ses collègues de réduire encore ce nombre de façon spectaculaire. Pour des raisons que j'expliquerai plus loin, ces chercheurs n'ont examiné que les matrices remplissant deux critères : chaque colonne et chaque ligne doivent comporter au moins trois 1, et le nombre total de 1 dans le triangle du haut est $3n - 6$. Pour $n = 7$, le fait d'imposer ces conditions réduit le nombre de matrices d'adjacence candidates de 1044 à seulement 29. Et parmi ces 29 matrices, seules cinq correspondent à de véritables empilements compacts de sphères.

Comment ces structures géométriques ont-elles été déterminées ? L'idée centrale est de transformer la matrice d'adjacence A en une matrice de distance D . Alors que

chaque élément A_{ij} de la matrice d'adjacence est une valeur binaire (0 ou 1) qui répond à la question « Oui ou non les sphères i et j se touchent-elles ? », l'élément D_{ij} est un nombre réel donnant la distance euclidienne entre i et j .

Il se trouve que nous connaissons déjà certaines de ces distances. Chaque 1 de la matrice d'adjacence désigne une paire de sphères unitaires, dont les centres sont écartés d'une distance exactement égale à 1 ; ainsi, $A_{ij} = 1$ implique $D_{ij} = 1$. Nous savons même quelque chose des autres distances : une grappe n'est possible que si tous les éléments de la matrice de dis-

Réduire le nombre de matrices d'adjacence à examiner.

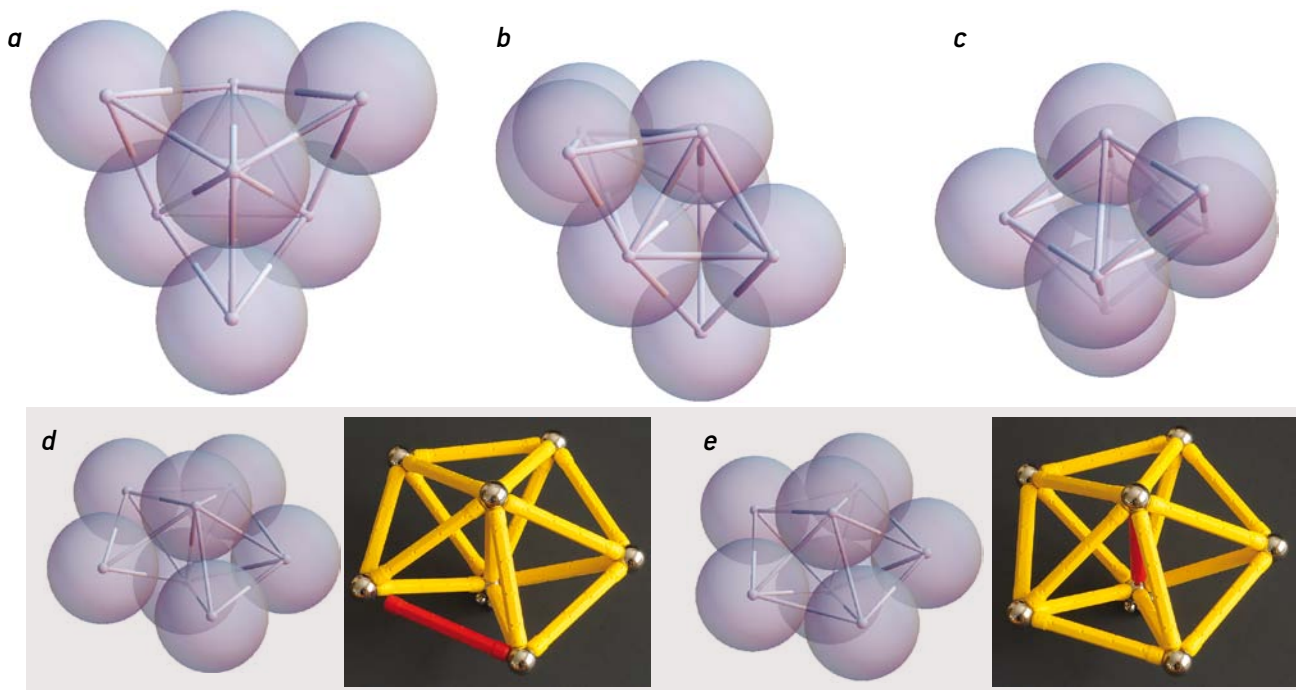
tance satisfont la contrainte $D_{ij} \geq 1$. Toute distance inférieure à 1 signifierait que deux sphères s'interpénètrent.

Pour déterminer complètement la géométrie d'une grappe, il faut déterminer les coordonnées x , y et z de chacune de ses n sphères. Une règle algébrique élémentaire suggère qu'il faudrait $3n$ équations pour déterminer ces $3n$ inconnues ; en fait, il suffit de $(3n - 6)$ équations. Pourquoi ? L'énergie de la grappe ne dépend que des positions relatives des n sphères, et non

de la position ou de l'orientation de la grappe dans son ensemble. Par conséquent, on peut arbitrairement supposer qu'une sphère est située à l'origine O du système de coordonnées, et qu'une autre, en contact avec elle, en est éloignée d'exactlyement une unité sur la partie positive de l'axe Ox . Six coordonnées sont ainsi fixées. Il s'ensuit que les $(3n - 6)$ équations fournies par les 1 de la matrice d'adjacence sont exactement ce dont on a besoin pour localiser le reste des sphères.

Le fait que l'on ait juste assez de contraintes pour résoudre le système d'équations est plus qu'une simple coïncidence ; c'est également une condition nécessaire pour la stabilité mécanique dans une grappe. Spécifiquement, $(3n - 6)$ contacts et au moins trois contacts par sphère confèrent à une grappe ce qu'on appelle une rigidité minimale. Si l'une quelconque des sphères n'avait qu'un ou deux contacts, elle pourrait balloter ou osciller librement. Une telle grappe ne peut pas être une configuration réalisant le maximum de C_n , car la sphère non contrainte peut toujours pivoter pour entrer en contact avec au moins une sphère de plus, augmentant ainsi C_n .

Chacune des $(3n - 6)$ équations est de la forme :



5. LES GRAPPES DE SEPT SPHÈRES les mieux connectées ont 15 contacts. Trois des structures ci-dessus (*a*, *b*, *d*) sont des assemblages de quatre tétraèdres réguliers collés par différentes faces. La grappe *b* est chirale (il en existe une forme droite et une autre gauche).

La grappe *c* est formée d'un octaèdre collé par une de ses faces à un tétraèdre. Les grappes *d* et *e* semblent identiques, mais ont en fait des structures très différentes, comme le montrent les modèles *Geomag* (la tige rouge indique une paire de sphères qui ne sont pas en contact).

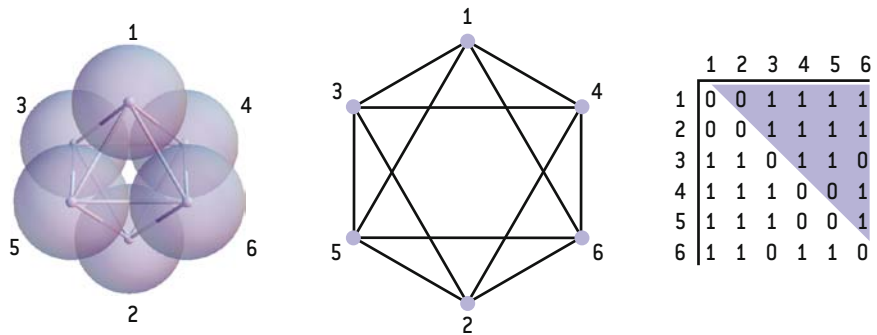
$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = 1$, ce qui signifie que la distance entre les centres des sphères i et j est égale à 1. Pour obtenir les coordonnées de toutes les sphères, ce système d'équations doit être résolu. Pour ce faire, N. Arkus a d'abord essayé une technique nommée base de Gröbner, qui s'est imposée ces dernières années comme un outil puissant de la géométrie algébrique. La méthode offre un moyen systématique de réduire le nombre de variables jusqu'à l'obtention d'une solution. Une implémentation de l'algorithme de base de Gröbner intégré à un système de calcul formel est parvenue à résoudre les équations pour $n = 7$, mais elle s'est révélée trop lente pour $n = 8$.

Des règles géométriques

Une autre approche repose sur des méthodes numériques qui convergent vers une solution par approximations successives. L'exemple le plus connu est la méthode de Newton, qui calcule les racines d'une équation en affinant une estimation initiale. N. Arkus a trouvé que les techniques numériques étaient efficaces, mais elle craignait qu'elles ne garantissent pas de trouver toutes les solutions valables (quand l'algorithme converge, le résultat est une solution correcte, mais une non-convergence ne signifie pas nécessairement qu'il n'existe pas de solution ; cela dépend aussi de l'estimation initiale).

Mettant de côté les méthodes algébriques et numériques, N. Arkus a choisi de se fier au raisonnement géométrique comme guide pour assembler des grappes réalisables et comme moyen d'exclure celles qui sont physiquement impossibles. Une règle de base pour les sphères unité est que si i touche j , alors le centre de j doit se trouver quelque part sur une sphère de rayon 1 centrée sur i . Si k touche à la fois i et j , alors le centre de k doit se trouver quelque part sur l'intersection circulaire de deux sphères voisines. Si l touche à la fois i , j et k , les sites possibles se résument à un ensemble de deux points (voir la figure 7). Avec une poignée de règles générales de ce type, il est toujours possible de déterminer les distances inconnues dans une matrice de distance, à supposer que la matrice d'adjacence décrive une structure réalisable.

On peut appliquer d'autres règles géométriques pour prouver que certaines



6. L'ENSEMBLE DES LIENS DE CONTACT entre sphères peut être résumé par un graphe, où les sommets représentent les sphères et les arêtes les contacts entre deux sphères. La même information est contenue dans la matrice d'adjacence (à droite). Si i et j sont deux sphères quelconques de la grappe, l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice vaut 1 si i touche j , et 0 sinon. Seul le triangle supérieur (en mauve) a besoin d'être spécifié : le triangle inférieur est son image en miroir.

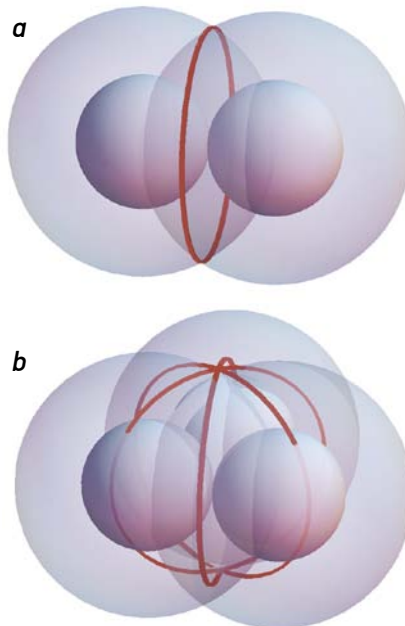
classes de matrices d'adjacence ne peuvent pas donner un empilement de sphères physiquement valide. Par exemple, si les sphères i , j et k se touchent toutes les trois, elles doivent former un triangle équilatéral. Si le motif de 1 dans la matrice d'adjacence indique que plus de deux autres sphères touchent également i , j et k , alors la grappe ne peut pas exister dans un espace tridimensionnel. On peut ainsi éliminer les matrices non physiques sans même explorer la géométrie des grappes.

N. Arkus a également utilisé le kit *Geomag* (voir la figure 5) pour vérifier la faisabilité de certaines configurations. *Geomag* comporte des billes d'acier poli et des tiges aimantées enveloppées d'une gaine de plastique coloré ; toutes les tiges ont la même longueur, et on peut facilement les assembler en un squelette de liens de longueur 1 joignant des centres de sphères. C'est une aide précieuse pour l'intuition géométrique.

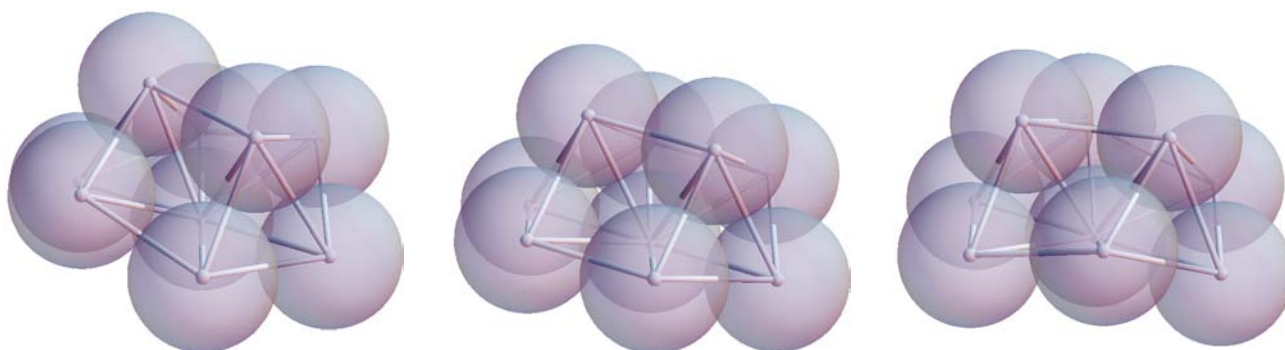
N. Arkus et ses collègues ont ainsi déterminé $\max(C_n)$, et identifié toutes les grappes réalisant ces nombres maximaux de contacts, pour tout $n \leq 10$ (voir la figure 10). Ce faisant, ils ont découvert des grappes aux caractéristiques intéressantes.

Pour $n = 8$, le nombre maximal de contacts s'élève à 18, et il existe 13 façons différentes d'obtenir cette limite. Toutes ces grappes, sauf une, peuvent être obtenues par incrément en ajoutant une nouvelle sphère à la surface d'une des grappes de $n = 7$.

Les grappes de neuf sphères ($n = 9$) ont jusqu'à 21 contacts ; pour ce maximum, il en existe 52 variétés. Dans cette foule d'empilements, une structure se singularise, avec une propriété jusqu'ici inédite, la flexibilité : elle peut être tordue autour d'un axe sans casser de liens entre sphères. Cette capacité



7. SI DEUX SPHÈRES sont en contact [a], une troisième sphère ne peut les toucher toutes deux que si son centre se trouve quelque part sur le cercle (en rouge) tracé par l'intersection des deux sphères de rayon double. De la même façon, avec trois sphères toutes en contact mutuel [b], les positions disponibles pour ajouter une quatrième sphère se réduisent à deux points, aux intersections de trois cercles de rayon double.



8. L'UNE DES 52 CONFIGURATIONS de neuf sphères qui maximisent le nombre de contacts a une propriété remarquable : elle est flexible.

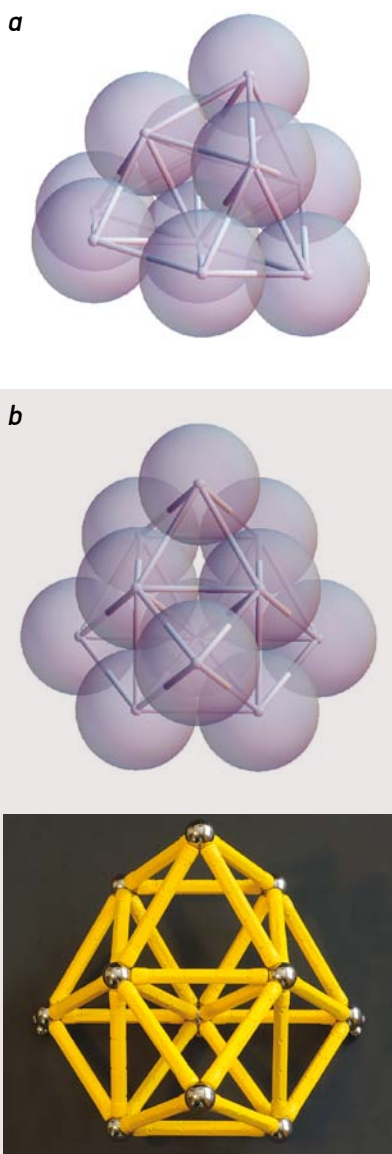
Deux morceaux de la structure peuvent se tordre dans des directions opposées sans qu'aucun contact entre sphères ne soit rompu.

à se tortiller peut surprendre, sachant que les matrices d'adjacence ont été conçues avec l'objectif explicite de garantir une « rigidité minimale ». Mais ce n'est pas sans raison que cette forme de rigidité est dite minimale. L'exigence que chaque sphère soit en contact avec au moins trois autres implique qu'aucune sphère individuelle ne peut bouger par rapport au reste de la grappe sans rompre au moins un contact. Mais d'autres modes de mouvement, où des groupes plus gros de sphères se plient ou tournent, ne sont pas exclus. Dans la grappe flexible $n = 9$, deux faces carrées accolées par une arête peuvent se tordre et se déformer légèrement (voir la figure 8).

À l'assaut de $n = 10$ et 11

Quand $n = 10$, les grappes franchissent un autre seuil : pour la première fois, le nombre de contacts dépasse $3n - 6$ (soit, ici, 24). On a 259 agrégats de 10 sphères qui ont exactement 24 contacts, mais trois autres en ont chacun 25. Là encore, c'est un peu surprenant. L'algorithme de recherche part d'une liste de matrices qui spécifient exactement $(3n - 6)$ adjacences ; comment la recherche peut-elle mettre au jour une grappe ayant encore plus de contacts ? L'explication est que même si deux sphères n'ont pas l'obligation de se toucher, cela ne leur est pas interdit. Quand on résout un système d'équations spécifiant 24 adjacences, il peut se trouver, comme par coïncidence, que les sphères d'une 25^e paire soient aussi séparées d'une distance exactement égale à un (voir la figure 9a).

Pour compiler le catalogue des grappes de dix sphères, N. Arkus et ses collègues ont dû examiner plus de 750 000 matrices de structures de rigidité minimale. Le défi consistant à repousser la frontière jusqu'à $n = 11$ a été relevé par R. Hoy, J. Harwayne-



9. UNE GRAPPE DE 10 SPHÈRES ayant 25 contacts [a] est construite à partir de la grappe flexible à 9 sphères en ajoutant une sphère à une des faces carrées (ce qui supprime la flexibilité). La championne des grappes à 11 sphères a 29 contacts [b].

Gidansky et C. O'Hern. Ils ont eu recours en grande partie aux mêmes méthodes, mais ils ont adopté une approche différente pour rationaliser les algorithmes.

Par exemple, ces trois chercheurs de Yale ont supposé que tout empilement compact de sphères contient un chemin continu, non ramifié, qui traverse la structure de part en part, comme une longue chaîne de polymère. Cela implique que l'on peut toujours réarranger les lignes et les colonnes de la matrice d'adjacence de façon que la surdiagonale (juste au-dessus et à droite de la diagonale principale) soit entièrement constituée de 1. En se concentrant sur ces seules matrices, la charge de travail est réduite d'un facteur 1 000 pour $n = 11$.

Le groupe de Yale a également mis au point des règles simplifiées pour exclure les empilements non valides, et ont reformulé davantage de règles géométriques de façon à pouvoir tester les matrices sans devoir passer par les étapes laborieuses de calcul des distances entre paires de sphères. Pour $n = 11$, le groupe de Yale a ainsi identifié 1 641 grappes distinctes où $C_{11} \geq 27$ (la valeur $3n - 6$). La plupart de ces structures ont exactement 27 contacts ; mais 20 grappes ont 28 contacts, et il existe une grappe qui en a 29 (voir la figure 9b).

Signalons que l'on peut facilement ajouter une 12^e sphère à cette dernière grappe pour produire une structure à 33 contacts, soit $3n - 3$. Mais 33 est-il la valeur maximale de C_{12} ? On le saura quand Miranda Holmes-Cerfon, de l'Université de New York, aura publié ses récents travaux sur les grappes contenant jusqu'à 12 sphères.

Même pour $n = 11$, il est possible d'ergoter sur des questions de complétude et de certitude. Certains des résultats de l'équipe de Yale reposent sur un algorithme numérique pour résoudre le sys-

tème d'équations des distances. Comme on l'a déjà indiqué, la non-convergence de l'algorithme ne prouve pas qu'il n'existe pas de solution. En pratique, les risques de passer à côté d'un empilement valide sont très faibles ; selon la conception que l'on se fait de la rigueur, on estimera la question préoccupante ou non.

Des questions liées à des travaux de physique

Si l'équipe de Harvard comme celle de Yale se sont livrées à cet exercice, c'est par intérêt pour les agrégats de sphères matérielles plutôt que pour les sphères mathématiques. Le groupe de Yale se penche sur les mystères de la cristallisation. Dans leur masse, les matériaux tendent à privilégier les configurations qui maximisent la densité, comme l'empilement de Kepler. Mais la croissance des cristaux a pour point de départ des agrégats de quelques atomes seulement, pour lesquels les configurations qui minimisent l'énergie ne sont pas les mêmes.

N. Arkus s'intéresse à l'auto-assemblage dans les nanostructures, qu'elles soient naturelles (comme les capsides des virus) ou artificielles. Guangnam Meng de Harvard, en collaboration avec N. Arkus, M. Brenner et V. Manoharan, a développé un système expérimental qui offre un autre moyen d'explorer les petits amas de sphères collantes. Les sphères sont des billes de polystyrène d'un micromètre de diamètre, en suspension dans de l'eau et en présence d'une population plus importante de nanoparticules de plastique. Quand deux sphères se rapprochent, la présence des nanoparticules crée une attraction effective de courte portée entre les sphères, ce qui fait du système un bon modèle de sphères collantes.

Dans les expériences de G. Meng, on étalait les microsphères sur des plaques de verre comportant des milliers de micropuits cylindriques, où se formaient des grappes d'environ dix sphères par puits. Les puits étaient examinés au microscope pour évaluer les abondances relatives des différentes configurations. Si l'énergie potentielle était le seul critère, les grappes ayant davantage de contacts seraient plus nombreuses, mais l'entropie entre également en ligne de compte : les structures qui peuvent se former de nombreuses façons différentes sont plus probables. Pour l'essentiel, les résultats étaient à peu près en accord avec les attentes théoriques. L'entropie

n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$3n-6$	C_n	Multiplicité
1	0		0	1
2	1		1	1
3	3	3	3	1
4	6	6	6	1
5	10	9	9	1
6	15	12	12	2
7	21	15	15	5
8	28	18	18	13
9	36	21	21	52
10	45	24	24	259
			25	3
			27	1 620
11	55	27	28	20
			29	1

10. CE TABLEAU RÉSUME ce que l'on sait à ce jour des grappes de n sphères collantes qui maximisent le nombre C_n de contacts. Jusqu'à $n = 4$, $\max\{C_n\}$ est égal à $n(n-1)/2$, le nombre de contacts formés quand chaque sphère touche chacune des autres sphères. De $n = 5$ à $n = 9$, $\max\{C_n\}$ est égal à $3n-6$, le minimum pour avoir la stabilité mécanique. La « multiplicité » désigne le nombre de grappes différentes ayant la même valeur de C_n .

■ SUR LE WEB

Pour des figures de cet article en version animée, voir : www.americanscientist.org/issues/pub/2012/6/the-science-of-sticky-spheres/1

■ BIBLIOGRAPHIE

R. S. Hoy *et al.*, Structure of finite sphere packings via exact enumeration : Implications for colloidal crystal nucleation, *Physical Review E*, vol. 85, 051403, 2012.

N. Arkus *et al.*, Deriving finite sphere packings, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 25(4), pp. 1860-1901, 2011.

R. S. Hoy et C. S. O'Hern, Minimal energy packings and collapse of sticky tangent hard-sphere polymers, *Physical Review Letters*, vol. 105, 068001, 2010.

N. Arkus *et al.*, Minimal energy clusters of hard sphere with short range attractions, *Physical Review Letters*, vol. 103, 118303, 2009.

N. J. A. Sloane *et al.*, Minimal-energy clusters of hard spheres, *Discrete and Computational Geometry*, vol. 14, pp. 237-259, 1995.

favorisait les grappes de symétrie inférieure, et augmentait aussi la proportion de structures non rigides. Mais parce que les contacts supplémentaires abaissent l'énergie potentielle, les structures ayant plus de $3n-6$ contacts étaient également surreprésentées.

En dehors de ces applications physiques des sphères collantes, le dénombrement des contacts évoque un problème ouvert de mathématiques pures, posé en 1964 par le mathématicien d'origine hongroise Paul Erdős : étant donnés n points dans un espace de dimension d , combien de paires de points peuvent être séparées par la même distance ? On peut toujours s'arranger pour que cette distance soit égale à 1, et c'est pourquoi on parle parfois du problème de la distance-unité.

En trois dimensions, le problème du maximum de contacts pour des sphères est équivalent au problème de la distance-unité d'Erdős, avec la contrainte supplémentaire qu'aucune distance ne soit inférieure à 1. Ainsi, les résultats récents sur les sphères collantes résolvent cette version restreinte du problème pour tout $n \leq 11$.

Qu'y a-t-il au-delà de $n = 11$? D'après N. Arkus, le principal obstacle est le problème combinatoire consistant à engendrer toutes les matrices d'adjacence qui conviennent. Ces dernières sont si rares que le processus devient extrêmement inefficace. N. Arkus suggère une approche alternative, mais qui n'a pas encore abouti. Jusqu'à $n = 10$, elle a montré que toute grappe à $3n-6$ contacts peut être convertie en n'importe quelle autre grappe à $3n-6$ contacts par une chaîne de transformations simples, où une seule liaison est cassée et une autre formée. Elle fait l'hypothèse que cette propriété est vérifiée pour tout n . Si c'est le cas, le problème du maximum de contacts pourrait être résolu en produisant n'importe quelle structure à $3n-6$ contacts, puis en parcourant systématiquement l'arbre de toutes les transformations constituées d'un simple échange de liaisons.

Quand n atteindra une valeur suffisamment grande, la diversité de ces curieuses structures géométriques commencera nécessairement à diminuer, puisqu'en grossissant, les grappes ressemblent de plus en plus à des morceaux d'empilements de Kepler. Mais nous n'en sommes pas encore là, et il pourrait y avoir encore bien des curiosités à découvrir. ■

HISTOIRE DES SCIENCES

Guerre des fossiles en Patagonie

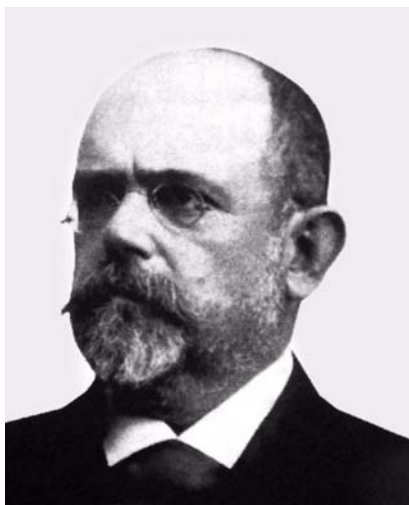
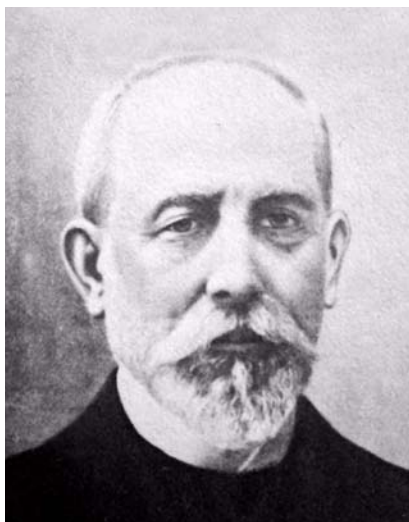
Dans les années 1890, une rivalité scientifique sans merci a été à l'origine des plus grandes collections paléontologiques de l'Argentine.

Eric Buffetaut

Un des épisodes les plus connus de l'histoire de la paléontologie est la féroce « guerre des os » qui opposa, à la fin du XIX^e siècle, les paléontologues américains Edward Cope et Othniel Marsh. Souhaitant chacun être le premier à décrire les extraordinaires fossiles de dinosaures et de mammifères disparus que livrait l'Ouest américain, ils y engloutirent leurs fortunes personnelles. On sait moins que vers la même époque, une concurrence tout aussi acharnée opposa deux chercheurs argentins, lancés à la recherche des richesses paléontologiques de la Patagonie. Cette querelle a eu pour résultat de magnifiques collections de mammifères et d'oiseaux fossiles.

Les deux rivaux sud-américains se nomment Florentino Ameghino [1854-1911] et Francisco Moreno [1852-1919]. Né peu après l'arrivée en Argentine de ses parents, émigrés italiens, Ameghino est autodidacte. Cela ne l'a pas empêché de se faire un nom dans la communauté paléontologique internationale, notamment lors d'un séjour à Paris de 1878 à 1881, d'où il a ramené une épouse, Léontine, et de précieux contacts. Doué d'une capacité de travail impressionnante, il fait progresser la connaissance des vertébrés fossiles argentins à un rythme étonnant.

Moreno, lui, est avant tout un explorateur. Dans les années 1870, il a effectué plusieurs voyages en Patagonie, alors que la région est encore mal connue et que les Indiens, qui apprécient peu les campagnes génocidaires de l'armée argentine, ne sont pas toujours accueillants. Son prestige s'est encore accru lorsqu'il a fourni une documen-



1. LES DEUX PROTAGONISTES de la guerre des fossiles qui débute à la création du Museo de La Plata, en Argentine, à la fin du XIX^e siècle : Florentino Ameghino (*en haut*) et Francisco Moreno (*en bas*).

tation géographique détaillée à l'appui des demandes de l'Argentine lors de l'arbitrage au sujet de la frontière contestée avec le Chili en Patagonie.

Dans les années 1880, les deux hommes sont réunis par un grand projet commun : le Museo de La Plata. En 1880, Buenos Aires est devenue la capitale fédérale de l'Argentine, formant un district séparé. Une ville est alors créée, La Plata, pour être la capitale de la vaste province de Buenos Aires. De nombreux édifices de prestige sortent de terre, dont un grand musée d'histoire naturelle et d'ethnographie. Moreno est l'instigateur de ce projet, qui vise à doter l'Argentine d'une institution scientifique comparable aux musées européens et nord-américains. Inauguré en 1887, le bâtiment, avec ses immenses galeries, ses superbes rotondes, ses bibliothèques et ses laboratoires, n'a rien à leur envier.

Les collections sont constituées des nombreux objets que Moreno a récoltés lors de ses explorations. Directeur, il a pour objectif de les accroître et d'en assurer l'étude scientifique. C'est ici qu'intervient Ameghino. Bien que renommé, le paléontologue n'a pas de poste officiel. Moreno lui en offre un, et non des moindres : il devient en 1886 sous-directeur du Museo de La Plata. En contrepartie, il cède au musée sa collection de fossiles, forte de quelque 40 000 spécimens. Un des frères de Florentino Ameghino, Carlos, est aussi embauché, en tant que naturaliste-voyageur. Carlos, l'homme de terrain de la famille, commence alors une longue série d'expéditions paléontologiques en Patagonie.

À cette époque, on sait déjà que les vastes contrées semi-désertiques du Sud