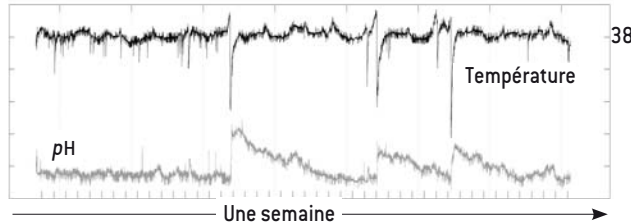


UN ESTOMAC À L'ÉPREUVE DU CALMAR POURRI

Les grands albatros ingèrent des masses importantes de charognes marines, dont les plus fréquentes sont des calmars morts. Opportunistes comme tous les charognards, ils s'alimentent à des intervalles très irréguliers (voir ci-dessous) et souvent de façon importante, puisqu'une prise alimentaire peut atteindre trois kilogrammes. Afin de digérer rapidement cette masse de chairs, l'albatros est aidé par un milieu stomacal très acide : comme celui des vautours, le pH à l'intérieur de son estomac (1,5) est proche de celui de l'acide chlorhydrique ; c'est aussi le pH le plus bas jamais enregistré chez des oiseaux marins. Les sucs fortement corrosifs de l'estomac du grand albatros viennent donc rapidement à bout des chairs coriaces des calmars. L'oiseau peut alors reprendre sans attendre sa quête alimentaire.



Les enregistrements couplés de la température et du pH de l'estomac d'un grand albatros pendant un voyage d'une semaine révèlent sa stratégie digestive. Les chutes de la température stomacale correspondent à l'ingestion de proies : elles sont rares et de grande ampleur.



mer nous ont ainsi permis de confirmer qu'il se nourrit par intermittence, de façon très irrégulière, en prenant des proies dont la masse va de 100 à 1000 grammes (voir l'encadré ci-dessus).

Par ailleurs, nos mesures ont révélé des niveaux extrêmement bas de pH stomacal chez les grands albatros, puisque sa valeur moyenne est de 1,5 et que des minima de 0,5 peuvent être atteints. Cela démontre qu'à l'instar des vautours, les grands albatros ont bien un estomac assez acide pour assurer une puissante digestion chimique et favoriser la protéolyse. Pour comparaison, leur estomac est nettement plus acide que celui des manchots (pH égal à 2,6) ou celui des cormorans (pH égal à 5,7) étudiés à ce jour.

Ces résultats valident l'hypothèse que nous voulions mettre à l'épreuve : les grands albatros sont bien des vautours des mers, adaptés à la digestion rapide de repas copieux, mais imprévisibles. Les mesures de pH suffisent pour démontrer que les grands albatros ont bien un contenu stomacal très acide, comme les charognards.

Cependant, ces mesures n'ont été pratiquées que sur un échantillon limité. C'est pourquoi nous avons l'intention de répéter ces enregistrements, notamment au cours

d'autres phases que le cycle reproducteur des grands albatros, ainsi que chez d'autres espèces de Procellariiformes. En effet, un albatros nicheur devra revenir régulièrement au nid relayer son partenaire ou nourrir son poussin. Il ne voyagera donc pas à sa guise et sera contraint de digérer rapidement ses repas, ce dont il est capable, comme nous l'avons montré.

Attirés par les rejets de pêche

On peut supposer au contraire qu'un albatros non reproducteur pourra s'octroyer de longues pauses postprandiales, qu'il n'aura pas besoin de maintenir un milieu stomacal aussi acide et qu'il digérera les aliments plus lentement et plus efficacement. Par ailleurs, les différentes espèces de pétrels, albatros et puffins adoptent des régimes alimentaires très variés et consomment plancton, poissons et calmars, morts ou vifs : on peut donc s'attendre à ce que la digestion de plancton ingéré à petites doses sur une grande partie d'un voyage en mer ne nécessite pas un pH stomacal aussi bas que d'occasionnelles orgies de charognes.

Dans l'océan Austral, les bateaux de pêche rejettent chaque année des cen-

taines de milliers de tonnes de déchets : entrailles et carcasses de poissons, espèces non commercialisées ou individus de trop petite taille. Ces rejets attirent des foules d'oiseaux marins et, grâce à leur taille, à leur volumineux estomac au contenu très acide, les grands albatros sont les maîtres incontestables du recyclage express des rebuts de la pêche industrielle.

Cette stratégie comporte néanmoins un risque : à l'arrière des bateaux, les géants des mers côtoient aussi les hameçons des palangriers pêcheurs de légines, de thons ou de calmars. Ils tentent souvent de manger les appâts fixés aux hameçons des palangres et sont parfois eux-mêmes ainsi capturés, se noyant rapidement. Ces prises accidentelles ont entraîné une baisse très marquée des populations de grands albatros au cours des années 1970, les menaçant d'extinction. Grâce à de nouvelles pratiques de pêche mises en place au cours de la dernière décennie, la mortalité des Procellariiformes due aux pêcheries dans l'océan Austral a diminué. Le problème a été éliminé pour les grands albatros des eaux françaises avoisinant les îles Crozet et Kerguelen, mais les pêches à la légine pratiquées dans les eaux internationales et surtout les pêches thonières des eaux subtropicales demeurent des menaces sérieuses. ■

★ MUSÉE DU **QUAI BRANLY**
là où dialoguent les cultures



L'ETHNOLOGIE VA VOUS SURPRENDRE !

Deux jours pour explorer le XXI^e siècle

Conférences | Débats | Projections
Concerts | Visites spéciales...

Week-end
gratuit

www.quaibranly.fr

29 et 30 juin 2013

#WEEKENDETHNO

paris
ile-de-france
3

inRockuptibles

Libération

SCIENCES
AVENIR

cnrs
le journal

france
inter

Le chaos des TRI▲NGLES DE

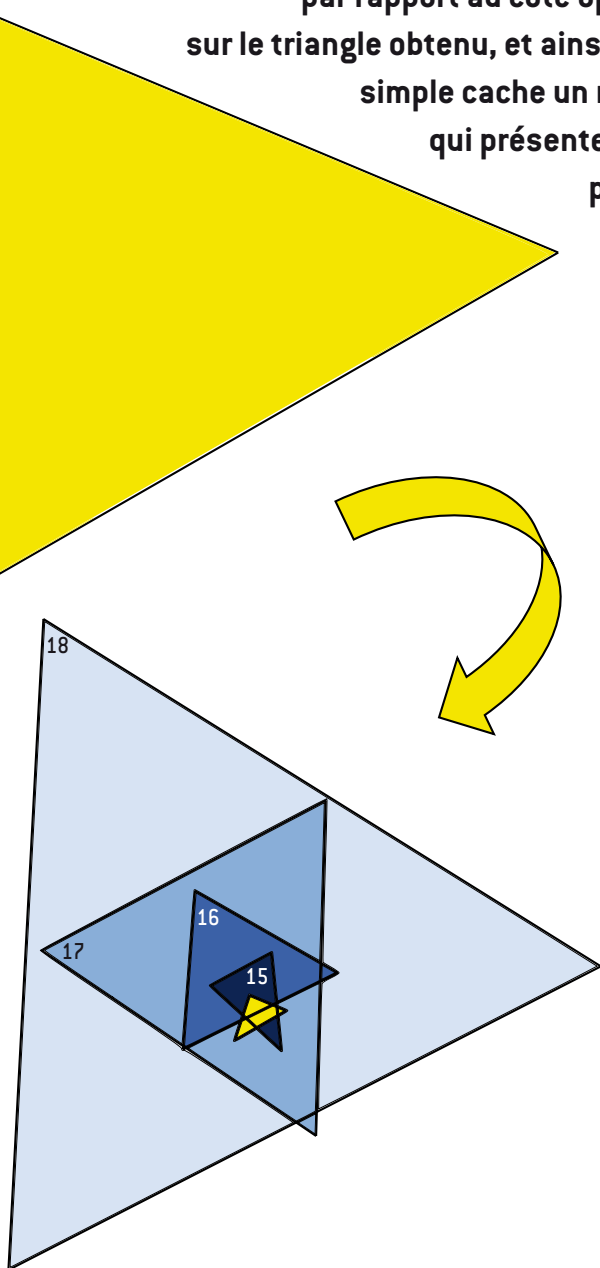
Grégoire Nicollier



1. APRÈS 14 OPÉRATIONS DE RÉFLEXION SUCCESSIVES,
le petit triangle rouge numéroté 0 est devenu acutangle,
c'est-à-dire que ses trois angles sont aigus (*triangle jaune*).
À partir de ce stade, on sait qu'il se dirige vers une forme
limite équilatérale. Les transformations ultérieures
ont été représentées ici à l'échelle 1 : 25.

RÉFLEXION

Dessinez un triangle, puis construisez-en un nouveau en prenant, pour chaque sommet, le point symétrique par rapport au côté opposé. Répétez l'opération sur le triangle obtenu, et ainsi de suite. Cette procédure simple cache un riche système dynamique, qui présente des suites convergentes, périodiques ou chaotiques.



L'ESSENTIEL

- Étant donné un triangle, le « triangle de réflexion » est obtenu en effectuant sur chacun des sommets initiaux une symétrie de réflexion par rapport au côté qui lui fait face.
- L'itération de cette transformation forme une suite de triangles qui peut se comporter de diverses façons, selon le triangle initial.
- En ne considérant que la forme des triangles, on peut caractériser la dynamique du système et classer les triangles en fonction du caractère convergent, périodique ou chaotique des suites engendrées.

Toutes les illustrations sont de l'auteur

Le triangle, défini par trois points, ses sommets, est l'un des objets géométriques les plus élémentaires, et pourtant les mathématiciens n'ont pas fini d'explorer son univers. La géométrie classique a construit une multitude d'objets à partir d'un tel trio de points et en a découvert de nombreuses propriétés. Il suffit de penser aux trois médiatrices du triangle, qui se coupent en un même point, comme c'est par ailleurs le cas de ses bissectrices, de ses hauteurs et de ses médianes – des propriétés bien connues, mais remarquables et fort utiles pour résoudre de nombreuses questions de nature géométrique.

D'autres propriétés géométriques intéressantes ont été obtenues en construisant, à partir d'un triangle donné et selon une certaine procédure, un autre triangle. On peut répéter cette opération, et étudier la suite des résultats successifs. C'est ce que j'ai effectué récemment sur les triangles construits l'un à partir de l'autre par une opération de réflexion. Comme je le détaillerai ici, les suites de tels triangles forment un système dynamique dont le comportement est riche ; en particulier, il présente une évolution chaotique dans de nombreux cas.

Un triangle peut donner naissance à un nouveau triangle de bien des façons. Par exemple, on peut choisir comme sommets du nouveau triangle les milieux des côtés de l'ancien (voir la figure 2). Ou alors les pieds des bissectrices – les points où la bissectrice d'un angle coupe le côté opposé. Ou encore les pieds des hauteurs – les points où la perpendiculaire issue d'un sommet coupe le côté opposé ou son prolongement.

De telles constructions sont des transformations qui, à chaque triangle, font correspondre un nouveau triangle. On peut appliquer la même transformation à ce dernier, puis soumettre à son tour le triangle ainsi obtenu à cette opération, et ainsi de suite, en principe indéfiniment : on dit que l'on itère la transformation. Avec une telle itération, on pénètre dans un domaine actuel des mathématiques. Les fonctions itérées sont en effet un sujet central de la théorie des systèmes dynamiques, à laquelle on a parfois donné le nom réducteur de « théorie du chaos ».

Par ses implications philosophiques, cette théorie a acquis une notoriété hors du milieu des mathématiciens : elle montre que le déterminisme de la transformation cohabite parfois avec l'imprévisibilité de l'évolution à long terme. Autrement dit,

même si l'on connaît exactement l'état initial du système, par exemple le triangle donné au départ, on n'est pas en mesure de prévoir ses lointains descendants.

Malgré l'imprévisibilité, les mathématiciens parviennent à dégager certaines structures dans ce « chaos déterministe ». C'est le cas avec le système dynamique formé par les triangles de réflexion : j'ai déchiffré les aspects chaotiques de son comportement et classé les états initiaux selon leur évolution, bien ordonnée ou anarchique.

La forme fait toute la différence

Avant d'explorer ce système, commençons par quelques remarques générales sur les transformations itérées de triangles. La première est que, pour se concentrer sur l'essentiel, il est parfois utile de négliger certaines propriétés des triangles. Ainsi, la position et l'orientation de ces figures dans le plan seront ici sans importance, en général. Nous aurons la liberté de déplacer les triangles et de les tourner ou, ce qui revient au même, de modifier la position de l'observateur : le triangle reste fondamentalement le même. De façon similaire, peu importe qu'on regarde le triangle de près ou de loin : sa taille absolue ne jouera aucun rôle.

Nous considérerons souvent deux triangles comme égaux dès qu'ils ont la même forme, c'est-à-dire dès qu'on peut les faire coïncider par rotation, translation, symétrie axiale, dilatation ou contraction. Pour ce genre d'égalité (de « similitude »), il suffit que les triangles aient les mêmes angles.

Un triangle initial (le « triangle père ») étant donné, prenons comme sommets du nouveau triangle (le « triangle fils ») les milieux des côtés de l'ancien. Le triangle fils, le « triangle médian », est une copie à l'échelle 1 : 2 du triangle père tourné de 180 degrés (voir la figure 2a). La suite des triangles itérés converge vers un point, qui est leur centre de gravité (barycentre) commun. En considérant que des triangles semblables sont égaux, c'est-à-dire en ne considérant que les angles, on peut dire que cette transformation ne fait rien. Elle laisse inchangé tout triangle.

Il est plus intéressant de choisir les pieds des bissectrices comme nouveaux sommets (voir la figure 2b). La suite des triangles ainsi formés se resserre à nouveau sur un point, mais ce dernier ne se laisse plus décrire explicitement. Si l'on

fait abstraction de leur taille absolue et de leur position, ces triangles convergent vers une forme équilatérale. Ce fait, loin d'être évident, n'a été démontré qu'en 2006 par Dan Ismailescu et Jacqueline Jacobs, de l'Université Hofstra, aux États-Unis.

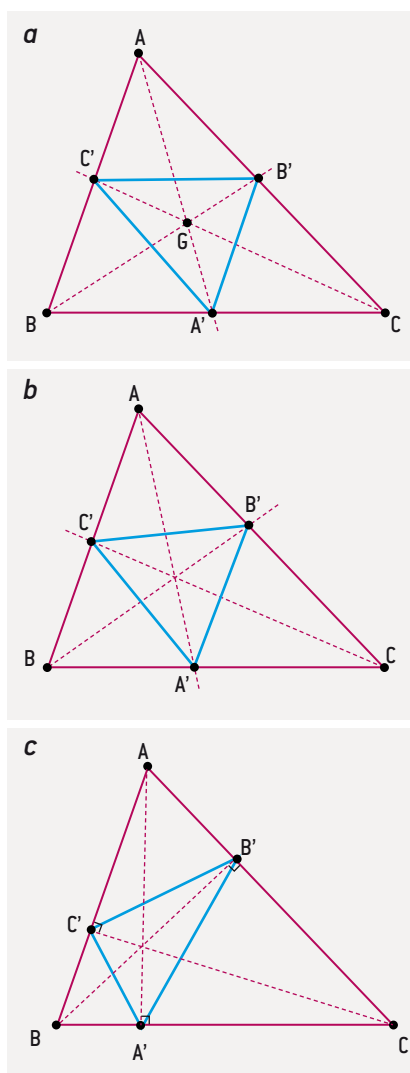
Cette transformation fondée sur les bissectrices atténue peu à peu les différences entre les triangles : si on l'applique à deux triangles de forme différente, leurs images par la transformation se distinguent déjà moins que les originaux, les images de la deuxième itération encore moins, etc. Progressivement, on se rapproche ainsi de la forme limite commune équilatérale. C'est le contraire d'un comportement chaotique.

Pour qu'apparaisse du chaos, il est nécessaire (mais pas suffisant) que la transformation accentue les différences, au moins par endroits. Un exemple de transformation qui présente du chaos consiste à passer du triangle père à son triangle « orthique », dont les sommets sont les pieds des hauteurs du triangle initial (voir la figure 2c). Pour l'essentiel, cette transformation double les différences.

Elle ne peut évidemment pas simplement doubler les angles, car la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180 degrés. Plus précisément, un angle α du triangle initial devient, dans le triangle orthique, 2α , $180^\circ - 2\alpha$ ou $2\alpha - 180^\circ$; les différences entre les angles de deux triangles initiaux sont doublées par la transformation lorsque ces triangles sont tous les deux obtusangles (ayant un angle supérieur à l'angle droit), ou tous les deux acutangles.

Pourquoi cette transformation engendret-elle un chaos déterministe ? L'un des signes distinctifs du chaos est la sensibilité extrême du système aux conditions initiales. Or la transformation orthique présente cette sensibilité, en raison du doublement des différences décrit ci-dessus : deux triangles pères qui se distinguent aussi peu que l'on veut peuvent donner des suites de triangles orthiques aux comportements complètement différents.

L'ergodicité, autrement dit le caractère mélangeant du processus, est un autre signe distinctif du chaos : les triangles d'une même suite orthique s'approchent en général infiniment près de toutes les formes de triangles. Cette propriété a été démontrée en 1990, en s'appuyant sur des travaux antérieurs d'autres personnes, par les mathématiciens d'origine hongroise Peter Lax (lauréat du prix Abel en 2005), et Peter Ungar, de l'Institut Courant de New York.



2. TROIS FAÇONS DIFFÉRENTES de construire un nouveau triangle $A'B'C'$ à partir d'un triangle donné ABC : à partir des milieux des côtés de ABC (« triangle médian » dont le barycentre est en G , a), à partir des intersections des bissectrices avec les côtés [b], à partir des intersections des hauteurs avec les côtés (« triangle orthique », c).

Explicitons brièvement cette propriété. On peut se représenter l'espace de tous les états imaginables du système (dans notre cas l'espace des triangles) comme une grande marmite de soupe. Le système dynamique qui transforme tout triangle en son triangle orthique agit comme une gigantesque spatule qui brasse le contenu de la marmite. Au cours du temps, chaque particule de soupe va partout à l'intérieur de la marmite. Comme d'habitude dans les systèmes ergodiques, certaines particules exceptionnelles ne participent pas totalement à ce grand brassage. Mais l'ensemble de ces exceptions est de « mesure nulle », ce qui signifie que la probabilité de tomber sur l'une d'entre elles par hasard est nulle.

Abordons maintenant la suite de triangles qui est au cœur de cet article, les triangles de réflexion. Un triangle étant donné, prenons le point symétrique de chaque sommet par rapport au côté opposé ou à son prolongement (voir la figure 3a). Cette opération donne les sommets d'un nouveau triangle, le « triangle de réflexion ».

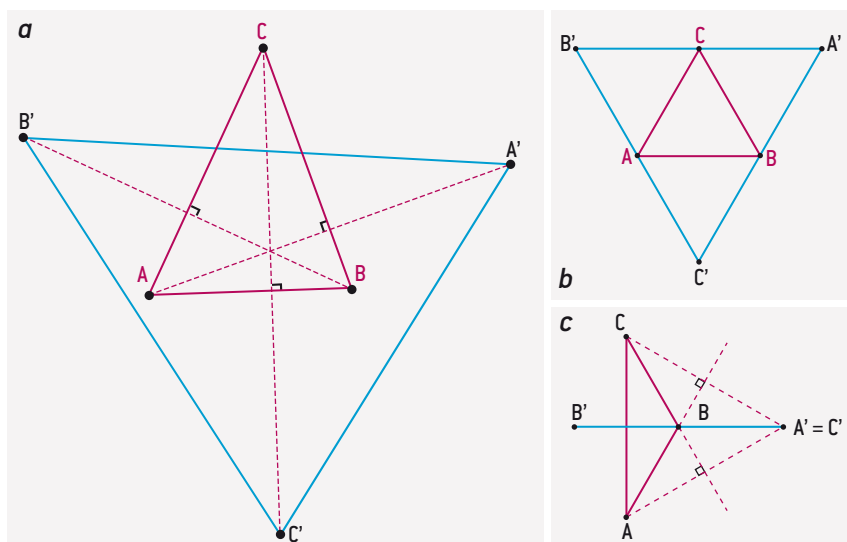
Le système dynamique associé à l'itération de cette transformation présente, comme pour les triangles orthiques, du chaos. Mais, comme on va le voir, sa structure s'est révélée bien plus riche.

Les triangles de réflexion, un système riche

Commençons par quelques observations. Le triangle de réflexion d'un triangle équilatéral est lui aussi équilatéral (voir la figure 3b). Un triangle dont les angles valent 30, 30 et 120 degrés se transforme en un triangle dégénéré aux sommets alignés, dont les côtés occupent la même droite (voir la figure 3c). Et un triangle dégénéré reste dégénéré au cours des itérations successives.

Il suffit de quelques exemples pour se convaincre qu'une suite de triangles de réflexion itérés peut se montrer chaotique (voir la figure 4), même si l'on considère deux triangles comme égaux dès qu'ils ont les mêmes angles, donc la même forme. Mais lorsqu'aucun angle du triangle initial ne dépasse 90 degrés, il semble que les triangles de réflexion successifs deviennent de plus en plus grands et tendent vers une forme limite équilatérale (voir la figure 1).

Pour progresser dans l'analyse, il faut exprimer les angles du triangle de réflexion à partir des angles du triangle père, et ce



3. LE TRIANGLE DE RÉFLEXION A'B'C' s'obtient du triangle initial ABC par la procédure simple suivante [a] : la hauteur issue du sommet A est doublée, ce qui définit un nouveau sommet A', et de même pour les deux autres sommets B et C. Après une telle opération, un triangle équilatéral reste équilatéral, mais voit la longueur de ses côtés doubler [b]. Un triangle isocèle dont les angles mesurent 30, 30 et 120 degrés se transforme en un triangle aux sommets alignés, dégénéré en un segment [c].

par une formule efficace dont l'évolution au cours des itérations est aussi transparente que possible. L'entreprise se révèle bien plus difficile que pour le triangle orthique. La bonne idée est de considérer les sinus des angles α , β et γ du triangle, et de caractériser la forme de ce dernier par les deux grandeurs :

$$s = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma,$$

$$p = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$

(la somme et le produit des carrés des sinus des angles). On peut retrouver les trois angles du triangle à partir de s et p (connaissant deux des angles, on en déduit le troisième, la somme des angles d'un triangle valant toujours 180 degrés). Grâce à quelques acrobaties avec les formules trigonométriques, on passe des valeurs s et p du triangle père aux grandeurs correspondantes s' et p' du triangle fils construit par réflexion :

$$s' = [(s + 16p)(4s - 5)^2] / [4s + 1 + 64p(4s - 7)],$$

$$p' = p(4s - 5)^6 / [4s + 1 + 64p(4s - 7)]^2.$$

Ces formules ont été publiées pour la première fois en 1984 par le Hollandais Jan van IJzeren (1914-1998), un spécialiste de géométrie, statisticien et juriste. Son article, paru en néerlandais dans un rapport interne de l'Université d'Eindhoven, est rapidement tombé dans l'oubli ; Internet m'a heureusement permis d'en retrouver la trace. L'intérêt des formules de van IJzeren est que, malgré leur apparente complexité, elles se laissent apprivoiser au point de livrer les clefs du problème qui nous occupe.

On peut souligner divers résultats. Par exemple, la transformation de réflexion d'un triangle n'est pas inversible. Certes, à un triangle père correspond toujours un seul triangle fils, mais un triangle non dégénéré a cinq, six ou sept triangles pères, dont certains sont éventuellement de même forme. Un triangle a sept pères lorsqu'il est équilatéral ou presque (voir la figure 5).

On peut par ailleurs confirmer par une preuve mathématique l'impression laissée par nos premières observations : si l'on part d'un triangle acutangle ou rectangle (dont aucun angle ne dépasse 90 degrés), les triangles de réflexion successifs tendent effectivement vers la forme équilatérale. Une autre forme limite n'est ainsi possible que lorsque le triangle initial est obtusangle.

Un triangle non dégénéré a pour fils un triangle dégénéré (d'angles 0, 0 et 180 degrés) si et seulement si la somme des carrés des sinus de ses angles est $s = 5/4$. Ces triangles existent en une infinité de formes différentes ; mais il y en a un seul qui soit isocèle, c'est celui dont les angles valent 30, 30 et 120 degrés.

Afin de délimiter au mieux l'empire du chaos, nous devons détecter toutes les traces d'ordre présentes dans l'itération de la transformation de réflexion. Il s'agit par exemple de repérer les triangles dont la forme ne change pas au cours des itérations – ce sont les « points fixes » de la transformation – ou ceux qui parcourent en boucle un nombre fini de formes.

Comme nous l'avons vu, le triangle équilatéral est un point fixe. Il en est de même du triangle dégénéré : son triangle fils est également dégénéré.

Quatre points fixes de la transformation

En résolvant les équations couplées $s' = s$ et $p' = p$, on montre que la transformation a deux autres points fixes. Le premier de ces triangles a des angles d'environ 17,027, 32,132 et 130,84 degrés (ces angles ne sont vraisemblablement pas des fractions rationnelles de 180 degrés), correspondant à $s = (6 - \sqrt{5})/4$ et $p = (8\sqrt{5} - 17)/64$. Si l'on introduit ces valeurs de s et p dans les formules de van IJzeren, on obtient bien $s' = s$ et $p' = p$.

Le quatrième point fixe, déjà connu avant mes travaux, est le triangle heptagonal pour lequel $s = 7/4$ et $p = 7/64$; ses

angles sont égaux aux fractions $1/7$, $2/7$ et $4/7$ de 180 degrés, soit environ 25,7, 51,4 et 102,9 degrés. On l'obtient à partir d'un heptagone régulier (polygone ayant sept côtés) en prenant le premier, le deuxième et le quatrième sommets.

Il existe sept couples de triangles où chaque partenaire est, quant à la forme, le triangle de réflexion de l'autre : la suite des transformations itérées est alors de période 2 (la même forme de triangle apparaît toutes les deux transformations). Il existe 32 groupes de trois triangles dont la transformation parcourt les formes en boucle (toutes les trois transformations). Nous déterminerons plus loin explicitement l'un de ces 32 groupes. De la même façon, il existe des cycles qui durent quatre, cinq, ..., ou un nombre fini quelconque de réflexions.

À l'exception du point fixe équilatéral, qui attire tous les triangles proches de lui

lors de l'itération de la transformation, tous les autres points fixes et cycles sont répulsifs : les triangles dont la forme est très proche de la leur ont des fils d'aspect moins proche, et le seul moyen de rejoindre un tel point fixe ou cycle est d'en être un ancêtre.

Dans une infinité de cas, les réflexions successives d'un triangle initial ne tendent vers aucune forme stable ni vers aucun cycle de formes qui se répètent, mais errent à jamais dans le vaste univers des triangles obtusangles : leur devenir est chaotique.

Pour acquérir une vue d'ensemble du chaos des triangles de réflexion, on peut dresser une sorte de carte topographique où chaque triangle est représenté par un point dont les coordonnées sont ses deux plus petits angles α et β (voir l'encadré ci-dessous).

Sur cette carte, on peut déplacer chaque point représentatif d'un triangle vers le point représentatif de son triangle de réflexion.

LA CARTE DU MONDE DES TRIANGLES

La forme d'un triangle est entièrement déterminée par ses deux angles α et β les plus petits (le troisième angle est égal à $180^\circ - (\alpha + \beta)$).

On choisit $\alpha \geq \beta$. Chaque point (α, β) de la zone colorée du plan figurée ici correspond à un triangle, ou plus exactement à une forme de triangle. Le point $(0, 0)$ correspond à tous les triangles dégénérés en un segment (ceux dont les trois sommets sont alignés). Les deux angles aux extrémités du segment sont nuls ; le troisième vaut 180° et se situe quelque part sur le segment, mais sa position exacte est sans importance.

Le bord inférieur de la zone colorée ($\alpha > 0, \beta = 0$) correspond à des triangles dégénérés d'une autre espèce (dont on ne traite pas dans cet article), ceux dont deux des trois côtés sont parallèles et se rencontrent à l'infini avec l'angle $\beta = 0$. Le troisième côté est un segment ordinaire de longueur finie et forme l'angle intérieur α avec l'une des parallèles.

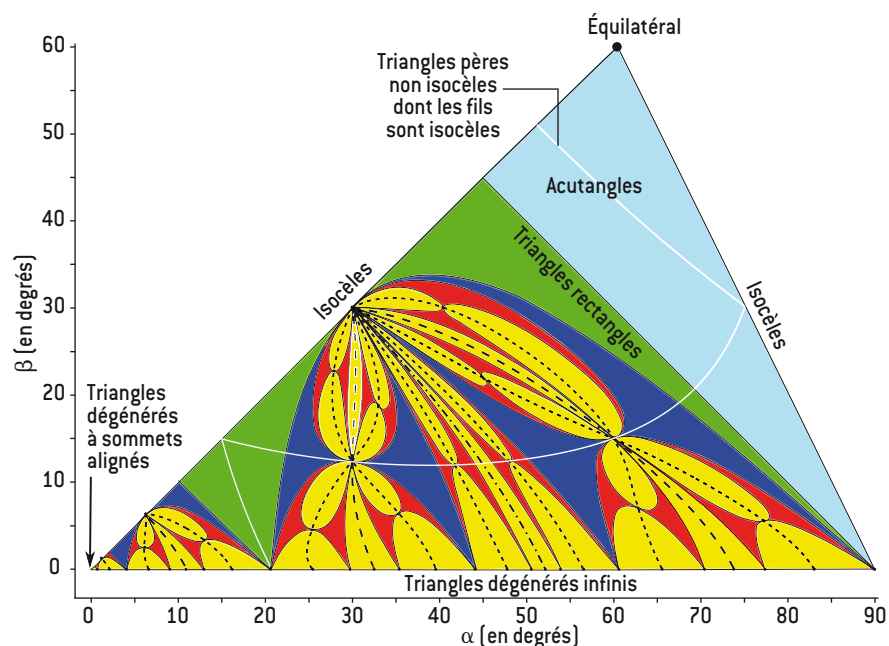
La construction du triangle de réflexion se traduit par une fonction qui envoie chaque point de la zone colorée (chaque triangle) sur le point correspondant à son triangle de réflexion. Tout triangle acutangle (points de la zone bleu clair) est transformé en un triangle acutangle. Si l'on répète cette transformation successi-

vement, la suite de points obtenue tend alors vers le point représentant le triangle équilatéral.

Chaque triangle vert (c'est-à-dire chaque point de la plage verte) est transformé en un triangle acutangle, chaque triangle bleu foncé est transformé en un triangle vert, et chaque triangle rouge est transformé en un triangle bleu foncé. Les triangles rouges sont ainsi acutangles après trois itérations et tendent peu à peu à être équilatéraux.

Les triangles de la courbe centrale en tirets-pointillés, issue du point $(30^\circ, 30^\circ)$, correspondent à la valeur $s = 5/4$ et se transforment tous en triangles dégénérés : ils sont donc précipités sur le point $(0, 0)$ et y restent à jamais lors des itérations ultérieures. Les points des trois courbes en tirets sont les triangles qui deviennent dégénérés après deux transformations, ceux des courbes en pointillés le deviennent après trois.

Les parties jaunes peuvent être découpées en considérant les triangles qui deviennent acutangles après quatre itérations, cinq, six, etc., et de même pour les triangles qui deviennent dégénérés après quatre transformations, cinq, six, etc. La carte se remplit alors avec des couleurs et des courbes supplémentaires. Mais au terme du processus, il restera quand même une infinité de points jaunes, correspondant à des triangles ne devenant ni acutangles ni dégénérés.



L'évolution d'un triangle qui passe de sa forme initiale à son triangle de réflexion, puis au triangle de réflexion de ce dernier et ainsi de suite, est alors visualisée par une suite de points issue de celui correspondant à la forme initiale. La vie d'un triangle est ainsi déterminée pour l'éternité par sa forme initiale: le système est déterministe. Mais il s'agit, du moins par endroits, d'un chaos déterministe.

Paradis, enfer et purgatoire pour triangles

Examinons plus en détail le devenir des triangles en fonction de leur forme initiale. Afin de mieux savourer les choses, rehaussons les couleurs du monde des triangles avec du vocabulaire céleste et décrétons que le paradis de ce monde est constitué par les triangles équilatéraux. Dans ce cas, les triangles acutangles sont nés sous une bonne étoile: ils restent acutangles toute leur vie et se rapprochent de plus en plus du paradis.

Un triangle qui n'a pas eu la chance de naître acutangle n'est pas forcément un cas désespéré. Qui habite la zone verte de la carte est envoyé en une seule itération dans la région bleu ciel, correspondant aux triangles acutangles, et va ainsi vers la vertu. Les triangles de la plage bleu foncé sont à peine plus éloignés de la béatitude, puisqu'ils se trouvent à un pas de la zone verte. Ceux de la zone rouge seront acutangles en trois étapes, en passant par la zone bleu foncé, puis par la région verte.

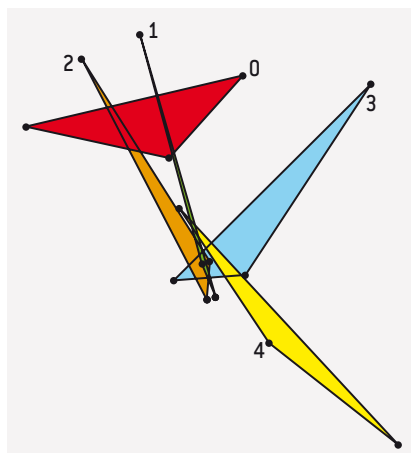
À la béatitude éternelle s'oppose l'enfer éternel. Tel est le sort des triangles dégénérés, qui demeurent à jamais à l'adresse $\alpha = \beta = 0$, dans le coin inférieur gauche de la carte. Cet état est un point fixe de la transformation, un cul-de-sac dont on ne s'échappe pas.

Les triangles qui tendent vers le paradis s'en approchent généralement avec retenue, et la plupart n'atteignent l'équilatéralité parfaite qu'au bout d'une infinité de réflexions. Il en va tout autrement des triangles damnés, lesquels sont précipités brutalement en enfer. Ces triangles correspondent sur la carte à certaines courbes. Ainsi, qui se fourvoie sur la courbe en tirets-pointillés du centre de la figure se retrouve en enfer au pas suivant. Un point d'une des courbes en tirets arrive en enfer en deux étapes, après avoir fait un crochet par les tirets-pointillés. Et les points situés sur les courbes en pointillés n'ont qu'une itération de plus à vivre.

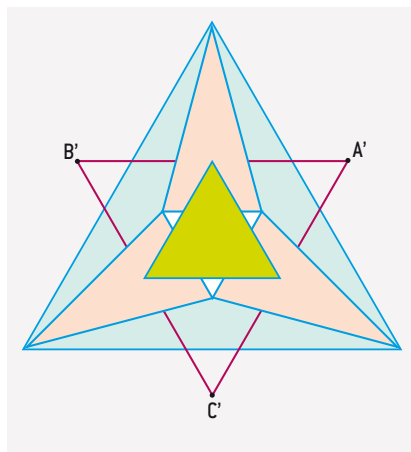
L'AUTEUR



Grégoire NICOLLIER est professeur de mathématiques à la Haute école d'ingénierie du Valais, à Sion en Suisse. Il est également guide de haute montagne.



4. QUE DEVIENDRA LE TRIANGLE ROUGE, numéroté 0, sous l'effet des transformations de réflexion successives ? Selon les valeurs précises de ses angles, il pourrait évoluer vers une forme équilatérale, se réduire soudain à un segment, changer de forme de façon cyclique ou de façon chaotique.



5. LE TRIANGLE ÉQUILATÉRAL A'B'C' peut résulter d'une transformation de réflexion appliquée à l'un de ses sept triangles pères: un triangle équilatéral (en vert), trois triangles isocèles identiques ayant pour angles 75, 75 et 30 degrés (en rose) et trois triangles isocèles identiques d'angles 15, 15 et 150 degrés (en bleu).

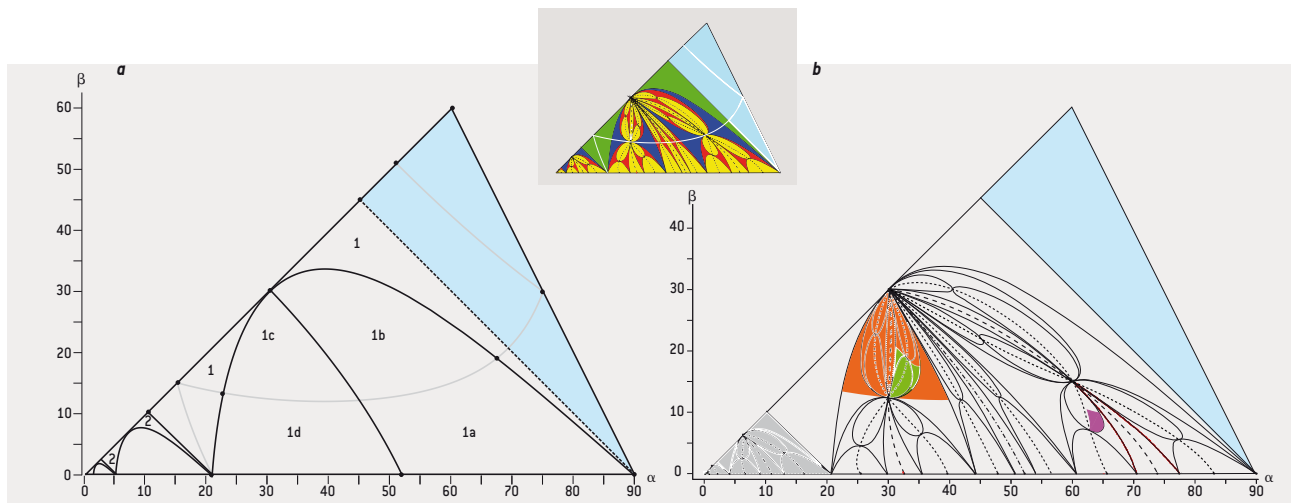
Dans un certain sens, le destin se laisse malgré tout amadouer. Un faux pas suffisamment bénin ne prive pas de paradis pour autant, tandis qu'un changement ciblé de comportement, aussi minuscule soit-il, permet d'échapper à l'enfer. Plus précisément: chaque point « bon », c'est-à-dire promis au paradis équilatéral, est entouré uniquement de points bons, tandis que tout autre point, en particulier s'il est « damné » (c'est-à-dire sur le chemin de la dégénérescence), est à distance aussi petite que l'on veut d'une infinité de points bons. Le chemin du paradis ne saurait être plus accueillant qu'ici: les bons peuvent s'abandonner à leur destin et il suffit à tous les autres, damnés ou non, de modifier un tant soit peu leur vie de façon ciblée – aussi peu qu'ils le désirent – pour connaître le même sort. Le mathématicien a la veine moins poétique: dans son jargon, l'ensemble des triangles qui convergent vers l'équilatéralité est « ouvert » et « dense ».

Qu'en est-il des triangles (des régions jaunes de la carte) qui, au début, ne sont situés ni sur une île de triangles bons ni sur un sentier de damnés ? On peut poursuivre l'analyse et attribuer une nouvelle couleur à tous les points qui arrivent dans le rouge après une itération, puis une autre à tous ceux qui seront dans le rouge après deux itérations, et ainsi de suite. De la même façon, on trouve des courbes de points qui atterrissent sur une courbe en pointillés après une étape, ou deux, ou trois, etc.

Une structure fractale

Les nouvelles plages de couleur et les courbes ainsi ajoutées deviennent de plus en plus nombreuses et ressemblent aux portions de la carte déjà dessinées. On assiste à la naissance d'une structure fractale: si la carte était achevée (ce qui nécessiterait une infinité de couleurs), nous verrions que certaines parties contiennent des copies réduites et plus ou moins déformées d'elles-mêmes, copies qui contiennent par conséquent à leur tour des copies réduites d'elles-mêmes, etc. Remarquons en particulier que la minuscule plage jaune située à la pointe gauche de la carte se réduit à chaque ajout d'une nouvelle couleur.

Les nouvelles plages de couleur et les nouveaux sentiers de damnés remplissent la carte achevée à un tel degré que le jaune ne sera plus visible à l'œil nu. Une infinité de points jaunes subsistent pourtant au terme du processus. Ce sont des points,



6. LES DIFFÉRENTES RÉGIONS DE LA CARTE des triangles peuvent être étiquetées par une adresse formée de chiffres et des lettres a, b, c, d , en exploitant la structure fractale de la carte. On associe le chiffre 1 à l'« arche » verte et ce qu'elle coiffe, le chiffre 2 à l'arche

bleue et ce qu'elle coiffe, etc. (a). Sous l'arche 1, on subdivise en 1a, 1b, 1c, 1d, et ainsi de suite. Par exemple, les régions indiquées en couleurs (b) se voient attribuer les adresses 1c1 [région orange, intérieur compris], 1c1a1 [région vert clair], 1a1c1a1 [région magenta].

tel le triangle heptagonal, qui ne sont ni bons ni damnés. Leur vie prend tôt ou tard un cours cyclique en parcourant en boucle une suite figée de points ; ou alors, leur vie papillonne sans cesse dans ce labyrinthe magnifique, évitant les bons et les damnés.

Appelons « mauvais » tous les points qui ne sont ni bons ni damnés et qui restent ainsi jaunes : ils demeurent à jamais au purgatoire. En étudiant attentivement ce microcosme de triangles régi par la transformation de réflexion, on peut prouver les propriétés suivantes.

Aussi près que l'on veut de chaque point mauvais ou damné se trouvent une infinité de points damnés, une infinité de points mauvais au futur périodique, et une infinité de points mauvais au futur errant (rappelons que deux points proches représentent deux triangles ayant presque les mêmes angles). On peut même trouver un triangle mauvais qui, au cours de sa vie, se rapproche une infinité de fois aussi près que l'on veut de n'importe quel point mauvais ou damné. Et le nombre de ces points « supermauvais » est infini !

Il s'avère possible et commode de décrire ce système dynamique en attribuant à chaque zone de la carte une adresse, formée de symboles (chiffres et lettres) et construite de façon systématique en s'appuyant sur la structure fractale, répétitive, de la carte. Dans cette dynamique symbolique, on attribue l'adresse 1 à la portion de la carte coiffée par l'arche vert foncé, cette arche comprise (voir la carte de l'encadré page 68 et la figure 6). En continuant vers la gauche et le bas de la carte

des triangles achevée, on attribuerait de même l'adresse 2 à la portion coiffée par l'arche bleu foncé, l'adresse 3 pour l'arche rouge et son intérieur, etc. Les zones Sud-Est, Nord-Est, Nord-Ouest et Sud-Ouest que l'on distingue sous l'arche verte de la carte reçoivent les adresses 1a, 1b, 1c et 1d respectivement. L'arche principale bleu foncé de 1c et son intérieur ovoïde ont l'adresse 1c1 (en orange sur la figure 6), l'arche principale du quart inférieur droit de cet œuf, avec son intérieur, est 1c1a1 (en vert clair sur la figure 6).

Une adresse pour chaque triangle

Ainsi, de façon systématique, en procédant par zooms successifs, on attribue des adresses de plus en plus longues à des portions coiffées par des arches de plus en plus petites ou étroites. La portion magenta de la figure 6 a par exemple l'adresse 1a1c1a1. Un point mauvais, qui reste jaune dans la carte achevée, est cerné par les arches de plus en plus petites ou étroites sous lesquelles il se trouve ; il acquiert ainsi une adresse de longueur infinie.

On constate notamment que le passage au triangle de réflexion envoie la zone magenta 1a1c1a1 sur toute la zone vert clair 1c1a1, la vert clair sur toute la zone orange 1c1 (vert clair compris) et l'orange sur toute la zone 1 (couleurs comprises). En fait, on démontre que chaque itération a pour effet de supprimer les deux premiers caractères des adresses débutant par 1 ; si on a supprimé a , on ne fait rien d'autre ;

BIBLIOGRAPHIE

- G. Nicollier, *Convolution filters for polygons and the Petr-Douglas-Neumann theorem*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 2013 [<http://link.springer.com>, doi: 10.1007/s13366-013-0143-9].
- G. Nicollier, *Convolution filters for triangles*, *Forum Geometricorum*, vol. 13, pp. 61-85, 2013 ; *Reflection triangles and their iterates*, *ibid.*, vol. 12, pp. 83-129, 2012 [<http://forumgeom.fau.edu>].
- D. Ismailescu et J. Jacobs, *On sequences of nested triangles*, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 53, pp. 169-184, 2006.
- J. van IJzeren, *Drie hoeken met gegeven spiegelpunt*, *driehoek*, EUT Report 84-WSK-03, pp. 356-373, Université de technologie d'Eindhoven, 1984 [en ligne sur : alexandria.tue.nl/repository/books/256699.pdf].

si on a supprimé c , on échange a et c dans le reste de l'adresse.

On l'a vu, la zone vert clair $1c1a1$ se transforme en la zone orange $1c1$ lorsqu'on passe de chaque point père à son fils. Or cette zone orange, image déformée de la zone vert clair, recouvre entièrement celle-ci. Un théorème de topologie bien connu (le « théorème du point fixe de Brouwer ») implique alors que la transformation a un point fixe situé dans la zone vert clair. L'adresse infinie de ce point fixe (et jaune) ne peut être que le mot périodique $1c1a1c1a...$: c'est en effet la seule façon de retrouver l'adresse de départ après avoir supprimé les deux premiers caractères et interverti a et c dans le reste du mot. Ce triangle dont les angles sont les mêmes que ceux de son triangle de réflexion, nous le connaissons déjà : ses angles valent environ 17,027, 32,132 et 130,84 degrés. De la même façon, on trouve que le triangle heptagonal correspond au point fixe dont l'adresse est le mot périodique infini $1b1a1b1a...$

On peut raisonner de façon analogue avec la zone magenta $1a1c1a1$. Il lui faut

trois itérations pour recouvrir la zone 1 : la triple itération a donc un point fixe dans la zone magenta et ce point ne peut être situé qu'à l'adresse périodique $1a1c1a1a1c1a...$, où $1a1c1a$ se répète indéfiniment. En cherchant numériquement dans la zone magenta, on trouve que le triangle correspondant a pour angles 63,35, 7,17 et 109,48 degrés environ. Les formes de ce triangle, de son triangle de réflexion et du triangle de réflexion de ce dernier constituent ainsi un cycle de période fondamentale 3. De la même façon, j'ai déterminé les 31 autres cycles de période 3 en repérant toutes les adresses correspondant à des points fixes de la triple itération.

D'un système dynamique à un autre

Une telle analyse peut être poursuivie afin de caractériser de façon complète la dynamique des triangles sous l'effet de l'itération des réflexions. Tout n'est pas fini pour autant : comme toujours, la résolution d'une question en fait surgir de nouvelles.

On pourrait choisir, comme sommets du triangle fils, les points sur les côtés du triangle père qui sont à mi-chemin du milieu du côté et du pied de la hauteur. Le triangle ainsi construit a les mêmes angles que le triangle de réflexion. On a donc fondamentalement le même système dynamique. Mais les triangles ont tendance à être plus petits que les triangles de réflexion : si le père est acutangle, le fils, plus proche de l'équilatéralité, est même complètement inclus dans le père. Si l'on part d'un triangle bon, la suite des fils successifs se resserre ainsi maintenant sur un point limite. Où est situé ce point limite ? Et existe-t-il aussi lorsque le triangle est damné ou mauvais ?

Une autre question surgit lorsqu'on transpose notre problème en trois dimensions : quel est le comportement de la suite des pyramides de réflexion engendrée par une pyramide initiale à base triangulaire, où les nouveaux sommets sont les symétriques des anciens par rapport à la face opposée ? Les triangles de réflexion sont un joli exemple de système dynamique intéressant, et bien d'autres univers voisins restent à explorer. ■



Vendredi 18 octobre 2013
de 9 heures à 17 heures
Institut Pasteur - Paris 15^e

Inscrivez-vous sur le site

www.communication-publique.fr/inscription-18-octobre-2013

La quatrième édition des colloques « Communiquer la science » sera consacrée au débat dans son acception la plus large : de l'échange entre scientifiques et citoyens, lors d'une fête de la science ou d'un café des sciences, au débat public plus formalisé. L'objectif de cette rencontre : susciter une réflexion permettant aux organismes de recherche de mieux dialoguer avec les publics et aux citoyens d'appréhender les enjeux des recherches pour devenir acteurs du débat.

Pour en savoir plus :
www.communication-publique.fr

Les différentes formes d'échanges seront analysées pour les rendre plus performantes tant pour les chercheurs que pour les citoyens et pour préciser le rôle des institutions de recherche dans le cadre de démarches participatives. Le colloque s'adresse aux institutions de recherche, aux associations, aux élus, aux médias, aux citoyens qui pourront, aussi, participer via Twitter : #ConnectScience

Partage et mise en commun des pratiques, discussion sur les différentes formes de débats et leur finalité... Tels sont les enjeux de cette rencontre.

Entrée libre sous réserve d'inscription préalable et dans la limite des places disponibles

**Communication
PUBLIQUE**

* Placé sous l'égide de Communication publique, association de responsables de communication des institutions publiques, ce colloque est organisé à l'initiative d'organismes de recherche : Andra, BRGM, CEA, CNRS, Genopole*, Ineris, Inserm, Institut Pasteur, IRD, Irstea, de l'IHES, du MESR, d'Universcience et avec le concours de la CASDEN et la participation de Pour La Science.

HISTOIRE DES SCIENCES

La culture est-elle dans les gènes ?

La sociobiologie, discipline apparue aux États-Unis dans les années 1970, postule que les comportements humains tels que la violence ou l'altruisme sont contrôlés par les gènes. Elle a suscité, jusqu'à nos jours, de vives critiques.

Régis MEYRAN

Le 22 février dernier, l'anthropologue américain Marshall Sahlins annonçait sa démission de l'Académie américaine des sciences en raison de l'élection, dans cette même institution, de son confrère Napoleon Chagnon. M. Sahlins s'est toujours opposé aux thèses de cet auteur de best-sellers, spécialiste des Yanomami d'Amazonie. Au même moment, N. Chagnon publiait un nouveau livre intitulé *Noble Savages* (Nobles sauvages), où il reprenait les thèses provocantes qui ont fait sa renommée, tout en se présentant comme la victime de critiques injustes provenant de la « féroce tribu des anthropologues ». S'en est suivie une vive polémique dans le milieu anthropologique américain. En fait, cette querelle *ad hominem* cache surtout un enjeu scientifique de taille : la reconnaissance académique d'un courant controversé apparu dans les années 1970, la sociobiologie, qui vise à expliquer la culture par les gènes et dont N. Chagnon est l'un des fers de lance actuels.

Dans les médias américains, N. Chagnon se campe volontiers comme un Indiana Jones moderne, ayant affronté les dangers de la forêt amazonienne pour rapporter une monographie, *Yanomamö: The Fierce People* (Yanomamo : le peuple féroce, 1968), dont un million d'exemplaires ont été vendus. Sur le plan scientifique, ce sont ses idées sociobiologiques qui suscitent la discorde : ne justifie-t-il pas la guerre par la biologie ? En 1988, il expliquait, dans la revue américaine *Science*, que chez les Yanomami, tout homme ayant tué un autre homme – tout

unokai – a un avantage adaptatif par rapport aux non-*unokai*. N. Chagnon entend établir que la violence est une donnée adaptative pour l'espèce humaine – un caractère génétique sélectionné au cours de l'évolution. Selon lui, il existe deux types de compétition entre individus : l'une, somatique, dépend de l'aptitude physique de chacun à survivre ; l'autre, reproductive, est liée à la descendance engendrée. Et pour N. Chagnon, un *unokai* l'emporte sur ces deux plans : sur le plan somatique, un *unokai* et sa famille proche sont moins attaqués par autrui, à cause de l'effet dissuasif que provoque la férocité apparente de l'*unokai*. Sur le plan reproductif, l'*unokai* engendre en moyenne trois fois plus d'enfants que celui qui n'a jamais tué (4,91 enfants contre 1,59).

Cet article est loin d'avoir fait l'unanimité chez les anthropologues. Brian Ferguson, professeur d'anthropologie à l'Université Rutgers, a fourni une critique acerbe des thèses de N. Chagnon. Les résultats avancés ne seraient pas valides à cause d'une erreur de raisonnement classique : une corrélation n'est pas nécessairement une causalité. En Amazonie, les chefs sont tous *unokai* et, grâce à leur statut élevé, ils ont plus de femmes et d'enfants que les autres. Or N. Chagnon s'est intéressé à une bande dans laquelle le chef avait 11 femmes et 43 enfants. Ce grand nombre d'enfants, attribuable à un statut social particulier, a pu augmenter l'écart entre *unokai* et non-*unokai*. Et quand bien même cet écart reproductif serait exact, cela ne prouverait en rien que la violence constitue un avantage adaptatif : on pourrait

avancer l'argument culturel (et non biologique) contraire selon lequel, dans la culture yanomami, la guerre est récompensée par le sexe... Enfin, conclut B. Ferguson, si la violence était contrôlée génétiquement chez tous les humains, on observerait des dispositions agressives différentes selon les populations étudiées (continent, pays, région...), ce qui n'est pas le cas.

Du darwinisme à la sociobiologie

Cette querelle centrée sur les travaux de N. Chagnon est emblématique du débat qui secoue l'anthropologie depuis que l'on connaît l'existence des gènes et leur rôle dans les mécanismes de l'évolution : la culture est-elle déterminée par les gènes ? Pour cerner les enjeux de cette question, qui constitue le thème central de la sociobiologie, il faut replacer la sociobiologie dans l'histoire de la biologie et des sciences sociales depuis 150 ans.

Les avancées des sciences de la vie se sont déroulées sur plusieurs plans. De 1859, date de parution de *L'origine des espèces*, jusqu'à sa mort, Charles Darwin a bâti une théorie de l'évolution des espèces par accumulation d'avantages adaptatifs. Selon lui, plusieurs espèces cohabitent dans un même espace naturel, l'expansion de chacune d'elles est limitée tant par la lutte entre les individus d'une même espèce que par celle entre espèces différentes et, plus généralement, par l'affrontement avec le milieu naturel. Cette lutte pour la vie le conduisit à formuler