



La formule secrète

Le duel mathématique qui enflamma l'Italie de la Renaissance

Fabio Toscano

Au XVI^e siècle, les mathématiciens italiens se lancent des défis et s'affrontent en duels publics pour résoudre des problèmes difficiles devant des spectateurs passionnés. Suivant cette tradition, Tartaglia et Cardan sont les acteurs majeurs de la polémique la plus féroce que l'histoire des mathématiques ait jamais connue. Une querelle qui aboutit à l'une des découvertes les plus importantes de l'algèbre !

Éditions Belin / Pour la Science 2011
208 pages – 19,30 euros – ISBN 978-2-7011-5694-1

Les métamorphoses du calcul



Gilles Dowek

Depuis la « révolution de 1970 », le calcul emporte les mathématiques vers des contrées jusqu'alors inexplorées. Plusieurs avancées importantes remettent ainsi progressivement en cause la prééminence du raisonnement sur le calcul, pour proposer une vision plus équilibrée, où l'un et l'autre jouent des rôles complémentaires. Cette

évolution nous conduit aussi à nous interroger sur la singularité des mathématiques.

Éditions Le Pommier 2011
224 pages – 8,50 euros – ISBN 978-2-7465-0561-2

Petits meurtres entre mathématiciens

Tefcros Michaelides

Athènes, 1929 : le mathématicien Stefanos Kantartzis est retrouvé assassiné. Michael Igerinos, son ami de trente ans, est la dernière personne à l'avoir vu en vie... Sur fond de thriller, l'auteur vous projette dans les coulisses du monde mathématique du début du XX^e siècle, suivant les traces de Russell, Hilbert, Poincaré et Gödel.

Éditions Le Pommier 2012
248 pages – 17,00 € – ISBN 978-2-7465-0641-1



Réf. 090641*

Éléments d'analyse avancée

Tome 1. Espaces de Hardy

Nikolai Nikolski

Destiné aux étudiants en Master 2 et aux doctorants, ce livre ouvre une série de volumes invitant à l'analyse mathématique moderne. Ce tome 1 présente la technique des espaces de Hardy, développée au début du XX^e siècle. Une technique devenue la plus puissante dans de nombreuses applications : les séries de Fourier, la théorie de Wiener des filtres stationnaires en traitement du signal, la fonction zêta de Riemann, etc.

Éditions Belin 2012
240 pages – 29,50 euros – ISBN 978-2-7011-6348-2



Réf. 006348

À LIRE AUSSI...

Les grands problèmes mathématiques

Dossier Pour la Science n°74
janvier-mars 2012
120 pages – 6,95 euros



Réf. 077674

À la recherche de la preuve en mathématiques

Hervé Lehning

Éditions Belin / Pour la Science 2009
128 pages – 18,80 euros
ISBN 978-2-8424-5098-4



Réf. 075098

Au nom de l'infini

Jean-Michel Kantor et Loren Graham

Éditions Belin / Pour la Science 2010
288 pages – 24,35 euros
ISBN 978-2-8424-5107-3



Réf. 075107

Récréations mathématiques

Alexandre Moatti

Éditions Le Pommier 2010
160 pages – 15,00 euros
ISBN 978-2-7465-0487-5



Réf. 090487*

Pour commander ces ouvrages

renvoyez le bon de commande ci-dessous

ou connectez-vous sur www.pourlascience.fr/librairie

[sauf références signalées par un * sur www.editions-belin.fr]

BON DE COMMANDE

à retourner accompagné de votre règlement à : Groupe Pour la Science • 628 avenue du Grain d'Or • 41350 Vineuil • Tél. : 0 805 655 255 • e-mail : pourlasciencevpc@daudin.fr

☐ Oui, je commande les livres présentés dans la sélection de *Pour la Science*. Je reporte les titres, prix et références à 6 chiffres correspondant aux ouvrages choisis :

Titre	Réf.	Prix
		€
		€
		€
		€
		€
		€
Frais de port (4,90 € France – 12 € étranger)	+	€
Total à régler	=	€

J'indique mes coordonnées :

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

C.P. : | | | | | Ville : _____

Pays : _____ Tél. : | | | | |
(facultatif)

E-mail : | | | | | @ | | | | |

Je choisis mon mode de règlement :

☐ par chèque à l'ordre de *Pour la Science*

☐ par carte bancaire

Numéro | | | | |

Date d'expiration | | | | |

Cryptogramme | | | | |

Signature obligatoire

Pour recevoir la newsletter Pour la Science (à remplir en majuscules).



En application de l'article 27 de la loi du 6 janvier 1978, les informations ci-dessus sont indispensables au traitement de votre commande. Elles peuvent donner lieu à l'exercice du droit d'accès et de rectification auprès du groupe Pour la Science. Par notre intermédiaire, vous pouvez être amené à recevoir des propositions d'organismes partenaires. En cas de refus de votre part, merci de cocher la case ci-contre ☐.

LOGIQUE & CALCUL

Les carrés magiques géométriques

Les carrés géomagiques sont des carrés magiques où les nombres sont remplacés par des formes géométriques. Merveilles d'équilibre et d'ingéniosité, ces nouveaux objets fascineront les amateurs.

Jean-Paul DELAHAYE

La passion d'un amateur de carrés magiques vient de donner naissance à une nouvelle discipline des mathématiques récréatives : les carrés géomagiques. Ces objets combinatoires – dont on comprend mal pourquoi personne n'y a pensé plus tôt – généralisent les carrés magiques et rendent visuelles les relations multiples de leurs composants. Cette invention de Lee Sallows remonte à octobre 2001 et est le produit d'une longue familiarité avec les carrés magiques, domaine où cet électronicien britannique avait déjà mené et publié plusieurs travaux.

Encouragé par le succès de son idée, L. Sallows vient de publier un livre dans lequel il fait le tour des connaissances à leur sujet (voir la bibliographie). Avant de présenter la découverte et donner une idée du contenu du livre, rappelons quelques faits à propos de ces étonnantes combi-

naisons de nombres entiers que sont les carrés magiques.

Un carré magique d'ordre n est un tableau carré de n lignes et autant de colonnes, dont les cases sont occupées par des nombres entiers tous différents. On exige de plus que la somme des éléments d'une colonne donne toujours le même total, qui doit aussi être celui de chaque ligne, et de celui des deux diagonales.

Dans le plus simple des carrés magiques (voir la figure 1a), les totaux des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales sont tous égaux à 15 (cette somme S est nommée constante magique). Ce carré magique est dit « normal » parce qu'il possède la propriété supplémentaire que chaque entier de 1 à 9 est utilisé une fois et une seule. Tous les autres carrés magiques normaux d'ordre 3 s'obtiennent à partir de celui-ci, par rotation et symétrie. Il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

a

4	9	2
3	5	7
8	1	6

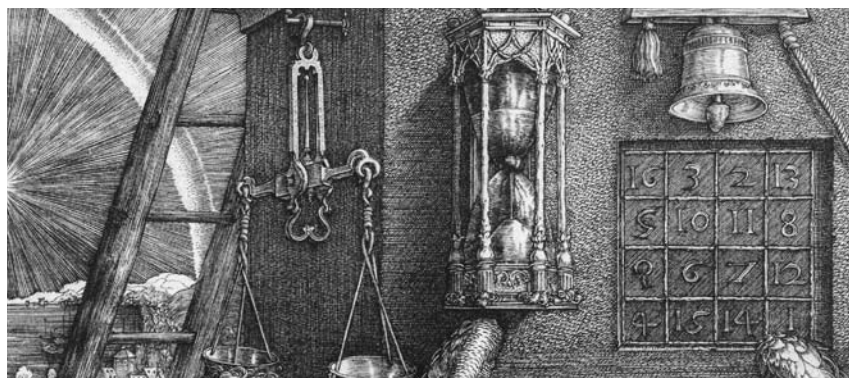
$S = 15$

b

$M =$ 

1. LE CARRÉ MAGIQUE DE LO SHU (a) est le plus ancien carré magique connu. Comme tous les autres carrés magiques, on peut le traduire facilement en un carré géomagique (b, où la juxtaposition horizontale des motifs de chaque ligne, colonne ou diagonale produit ici un rectangle 15×1).



2. DÉTAIL DE MELENCOLIA I (*La Mélancolie 1*), gravure d'Albrecht Dürer (1514) où figure un carré magique 4×4 .

Une histoire millénaire

Ce carré magique d'ordre 3 est connu en Chine depuis plus de 2 600 ans et porte le nom de carré magique de Lo Shu. Plus tard, en Inde, dans les pays de l'islam, puis en Europe, les carrés magiques ont suscité l'intérêt et ont été étudiés. On leur attribua des propriétés magiques et médicales, d'où leur nom. Par exemple, l'Italien Jérôme Cardan en associa un à chaque planète et Albrecht Dürer en glissa un (d'ordre 4) dans sa gravure *Melencolia I* de 1514 (voir la figure 2).

L'idée de L. Sallows est de remplacer les nombres par des formes géométriques toutes différentes et de considérer que la somme des figures géométriques est ce qu'on obtient quand elles s'ajustent parfaitement les unes aux autres pour donner un modèle M, qui joue le rôle de la constante S des carrés magiques.

Des sommes de figures géométriques

Un carré géomagique d'ordre n est donc un tableau de n^2 formes planes toutes différentes, tel que chaque série de formes prises dans une même ligne, une même colonne ou une des deux diagonales s'assemble sans recouvrement pour produire un modèle M fixé à l'avance. L'existence de tels carrés géométriques magiques n'est pas difficile à prouver, car il existe une traduction géométrique immédiate de tout carré magique en carré géomagique (voir la figure 1b).

Dans cette traduction, chaque entier du carré magique est remplacé par un segment (ou un rectangle ou un secteur de disque) de longueur e . Ainsi, en juxtaposant les éléments d'une même ligne, ou d'une même colonne, ou d'une même diagonale, on obtient toujours le même modèle M.

Cet exemple montre que la notion de carré géomagique généralise celle de carré magique. Le résultat n'est ici guère spectaculaire, mais heureusement, il existe d'autres carrés géomagiques ne provenant pas d'une telle traduction directe.

Ainsi, dans l'exemple de la figure 3, les trois pièces de la première ligne s'assemblent parfaitement en une forme carrée. C'est vrai aussi pour la deuxième ligne et la troisième, ainsi que pour les trois colonnes et les deux diagonales. Les neuf pièces, aux formes soigneusement sélectionnées, s'assemblent par trois de huit façons différentes, composant à chaque fois le même carré M.

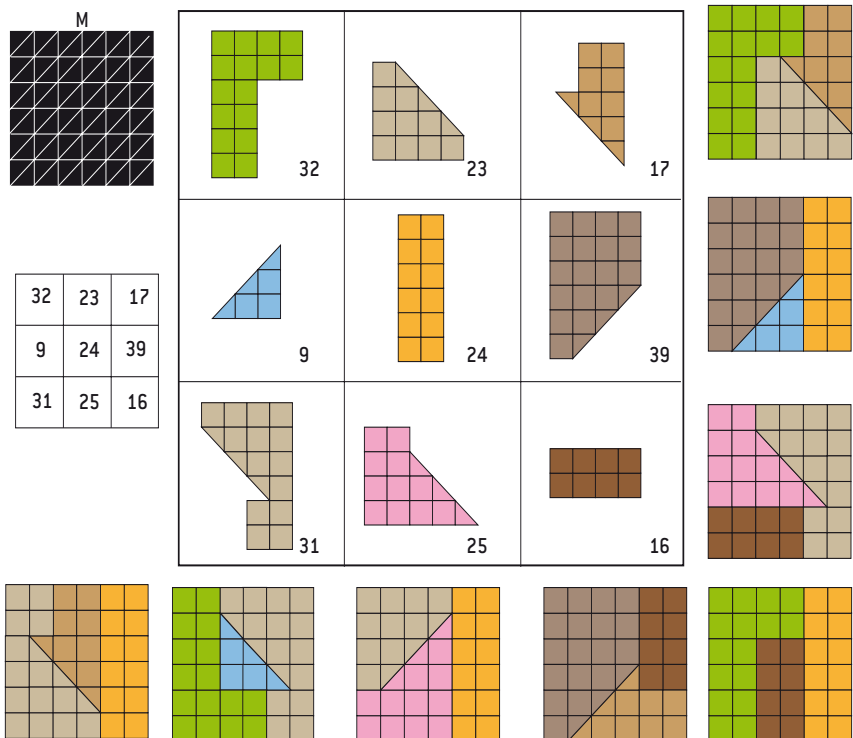
Le modèle M reconstitué huit fois est ici un carré, mais ce n'est pas une obligation : toute forme, pourvu qu'elle puisse s'obtenir pour chaque ligne, colonne et diagonale, peut être choisie comme modèle.

L'intérêt particulier des carrés magiques et plus généralement des curiosités arithmétiques provient de leur mystérieux charme. Comme à propos du monde vivant, on croit deviner en eux la marque d'une intelligence cachée qui les auraient conçues délibérément.

Paul Carus, 1917

Dans ce premier exemple, en considérant l'aire de chacune des neuf figures de base (mesurée en nombre de demi-carrés), on obtient un carré magique (non normal) de somme $S = 72$, soit l'aire de M mesurée en demi-carrés.

Il est clair que les aires des pièces d'un carré géomagique constitueront un carré magique à chaque fois que les pièces de base auront des aires différentes pouvant s'exprimer avec des nombres entiers. En effet, le modèle M, que chaque ligne, colonne ou diagonale reconstitue, possède une aire S, qui correspond à la somme des aires des pièces qui s'assemblent pour le produire ; par conséquent, si les aires des pièces de base sont toutes différentes et entières, elles vérifient les conditions imposées par la définition d'un carré magique. Lorsque ce carré magique associé est normal, on dira que le carré géomagique lui-même est normal.



3. LES CARRÉS GÉOMAGIQUES reprennent avec les formes les règles des carrés magiques constitués de nombres. En plus de la contrainte que les huit sommes des aires des trois formes (mesurées ici en demi-carrés) soient égales selon les lignes, les colonnes et les deux diagonales principales, les formes obtenues par assemblages des trois formes des cases doivent être identiques. Dans cet exemple, les neuf formes sont différentes et correspondent à des aires différentes, mais cette dernière contrainte n'est pas indispensable.

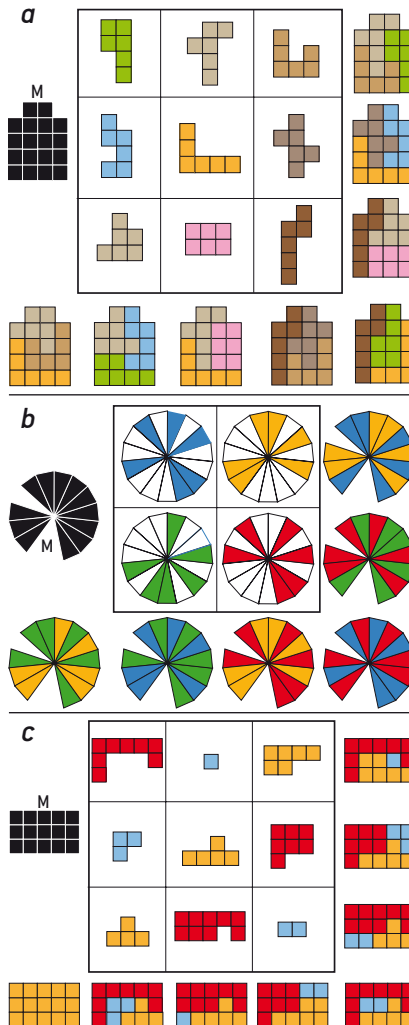
La condition que les aires des pièces de base soient différentes et entières n'est pas dans la définition d'un carré géomagique, qui exige seulement que les pièces de base soient différentes (pas leurs aires). Il est donc possible qu'un carré géomagique ne soit associé à aucun carré magique.

Un tel carré géomagique est représenté sur la figure 4a : les pièces de base sont toutes différentes et reconstituent de huit façons possibles le même modèle M (qui ici n'est pas carré). Cependant, toutes les pièces de base ont la même aire composée de six petits carrés (ce sont des hexamino) et les aires ne produisent donc aucun carré magique.

Notons que, parfois, un même ensemble de formes élémentaires donne non pas un modèle M selon toutes les lignes, colonnes et diagonales, mais en donne deux, M et M'. Il s'agit en quelque sorte de « doubles carrés géomagiques ». L'extraordinaire record en la matière est 12 : les neuf pièces de base du tableau donnent 12 modèles différents, chacun de huit façons différentes !

Il existe des carrés géomagiques d'ordre 2

La liberté donnée par l'emploi de pièces géométriques rend envisageable l'existence de carrés géomagiques d'ordre 2, alors qu'aucun carré magique d'ordre 2 n'est possible. Le problème occupa L. Sallows durant des années sans succès. Une solution de cette difficile énigme est l'œuvre d'un informaticien hollandais, Frank Tinkelenberg. Elle utilise



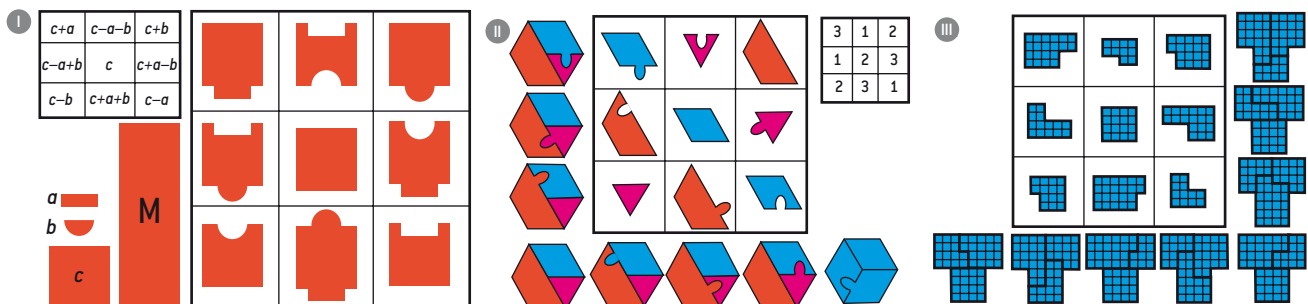
4. UN CARRÉ GÉOMAGIQUE formé d'hexamino (a) de même superficie (aucun carré magique ne lui correspond) ; le premier carré géomagique 2×2 (b) ; un carré géomagique formé de polymino (c).

à la fois des pièces de base composées de plusieurs morceaux, et le modèle M est en deux morceaux. Cette fois, les quatre figures de base se recomposent par symétrie et rotation de six façons différentes en un modèle M (voir la figure 4b). Les couleurs mettent en évidence l'imbrication des pièces de base et aident à la vérification du carré géomagique.

Bien sûr, cette solution n'est pas très satisfaisante à cause de l'éclatement de chaque pièce en sous-pièces, et la question se pose donc de savoir s'il existe un carré géomagique d'ordre 2 dont les pièces de base seraient toutes d'un seul tenant, ainsi que le modèle M produit par leurs six combinaisons. Personne n'a su encore répondre à cette élémentaire question, que nous soumettons donc aux lecteurs.

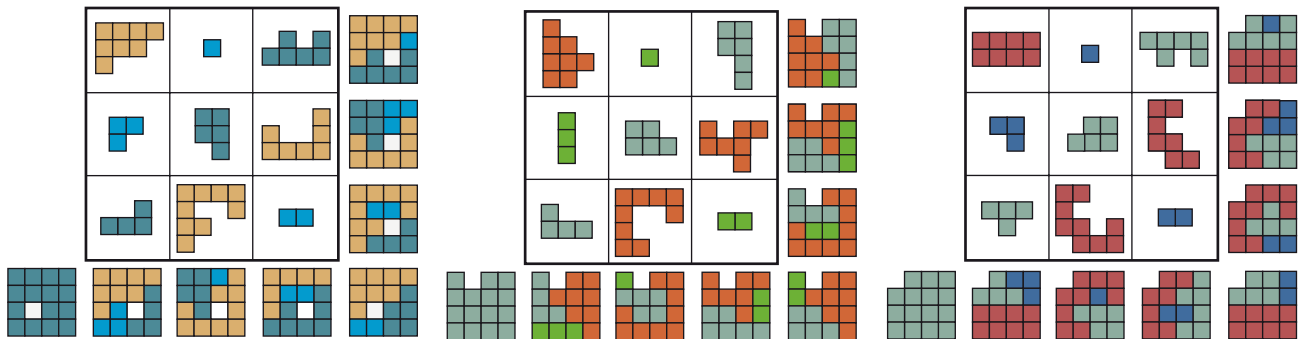
L. Sallows explique dans son livre qu'il s'est intéressé aux carrés magiques et à leurs variantes parce qu'il savait qu'il s'agissait d'un domaine où l'amateur, même sans formation mathématique poussée, peut travailler et y faire d'intéressantes découvertes. Son invention et le travail initial qu'il a réalisé sur ce sujet sorti de son imagination prouvent qu'il avait raison : un amateur décidé et persévérant est en mesure de découvrir une multitude de choses nouvelles dont l'ensemble constituera, comme c'est le cas ici, une petite discipline de recherche aussi intéressante que bien d'autres ayant un statut universitaire établi.

Deux types de méthodes sont mis en œuvre par L. Sallows pour découvrir de nouveaux carrés géomagiques : l'intel-



5. UNE MÉTHODE DE CONSTRUCTION des carrés géomagiques utilise la formule de Lucas. Édouard Lucas a prouvé que tous les carrés magiques d'ordre 3 étaient de la forme indiquée en (I), où a , b et c désignent des entiers non nuls. La même formule, en imaginant que a , b et c représentent des formes géométriques, permet de construire des carrés géomagiques (ici, la ligne du milieu et la colonne du milieu ne donnent pas M ; l'idée est néanmoins bonne et fournit des carrés géo-

magiques corrects). Une autre méthode de construction d'un carré géomagique est indiquée en (II) : 1) partir d'un carré magique incorrect (les mêmes nombres étant utilisés plusieurs fois) ; 2) remplacer les nombres par des formes (cela donne un carré géomagique incorrect puisque la même forme est utilisée plusieurs fois) ; 3) modifier les formes de manière à ce qu'elles deviennent toutes différentes. Le carré géomagique (III) a aussi été obtenu de cette façon.



6. TROIS EXEMPLES DE CARRÉS GÉOMAGIQUES NORMAUX dont le modèle est un carré 4×4 à un trou.

ligence et le calcul. Les travaux accomplis depuis des siècles pour construire et trouver systématiquement des carrés magiques suggèrent certaines méthodes pouvant s'appliquer aux carrés géomagiques. Deux d'entre elles sont expliquées à la figure 5. La première se fonde sur une propriété des carrés magiques d'ordre 3 démontrée par le mathématicien français Édouard Lucas (1842-1891), inventeur du casse-tête des tours de Brama (ou tours de Hanoi) et de divers tests de primalité encore utilisés aujourd'hui.

Comment trouver des carrés géomagiques ?

Bien sûr, dans les problèmes combinatoires, l'esprit déductif ne réussit pas toujours à rivaliser avec la machine. Celle-ci, explorant systématiquement des milliards de combinaisons, va, après parfois des jours entiers de calculs, produire des résultats qu'aucun cheminement de raisonnement ne semble en mesure de découvrir.

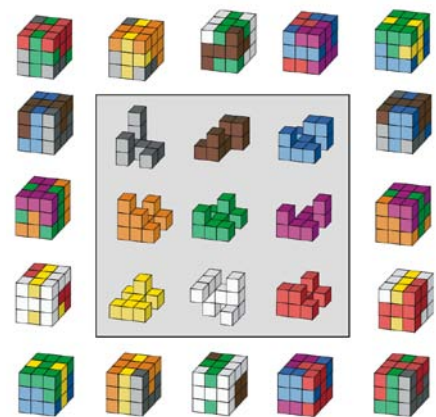
Ce qu'on trouve grâce à la machine est parfois étonnant. Alors qu'en opérant seul et sans ordinateur, vous ne construirez sans doute aucun carré géomagique normal d'ordre 3 dont le modèle M est le rectangle 3×5 et ayant des polyminos pour formes de base, l'ordinateur de L. Sallows, lui, en a découvert 1 411 (voir la figure 4c pour l'un d'entre eux).

En prenant pour M un carré 4×4 ayant un trou d'un carré 1×1 non situé sur le bord, et en se limitant toujours aux carrés géomagiques normaux dont les formes de base sont des polyminos, votre machine énumérera 4 370 solutions. Si, pour M, on découpe le trou carré 1×1

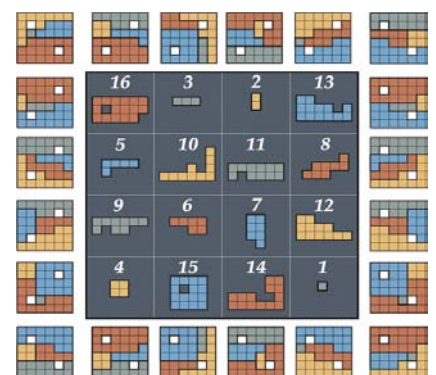
sur le bord et qu'on maintient toutes les autres conditions, le nombre de solutions devient 16 465. Toujours avec les mêmes conditions, mais en supprimant cette fois un carré 1×1 du coin, le nombre de solutions est encore plus grand : 27 110 (voir la figure 6 pour trois exemples de ces carrés magiques normaux).

Même s'ils sont parfois nombreux à satisfaire à un problème précis, les carrés géomagiques sont toujours rares parmi les figures candidates qu'un programme de recherche systématique va envisager et faire défiler lors de son exécution. Cela a pour conséquence que, pour en trouver un, on écrira en général un programme assez court (qui explicitera la brève définition des carrés géomagiques), mais qu'inévitablement le temps nécessaire de calcul avant d'obtenir une solution ou avant de les obtenir toutes sera long. À moins de progrès inattendus, les carrés géomagiques sont donc, le plus souvent, le résultat de longs calculs effectués par des programmes assez courts. Lorsqu'ils sont trouvés par le raisonnement, la situation n'est en fait pas très différente, car la capacité de raisonner provient elle aussi d'un processus d'évolution s'étendant sur une longue période, cette fois mesurable en milliards d'années.

Cette origine liée à de longs calculs est exactement ce qui caractérise ce que Charles Bennett dénomme des objets logiquement profonds (voir la rubrique du mois précédent). Cette remarque éclaire la citation de Paul Carus figurant page 81, car l'analogie entre les carrés magiques et les êtres vivants (qui eux aussi ont pour origine des sortes de longs calculs exécutés par des processus causaux relativement courts à décrire) est



7. EN TROIS DIMENSIONS. Ce carré géomagique peut être vu comme un casse-tête de rangement multiple. Avec seulement neuf pièces, il propose huit énigmes de rangements. Chaque ligne est un casse-tête, ainsi que chaque colonne et les deux diagonales. À chaque fois, il faut reconstituer un cube avec les trois pièces. De quoi s'amuser un moment...



8. EN HOMMAGE À DÜRER, Lee Sallows a composé ce carré géomagique en prenant comme base celui qui apparaît sur la fameuse gravure de 1514 et qui fixe les aires des formes élémentaires.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

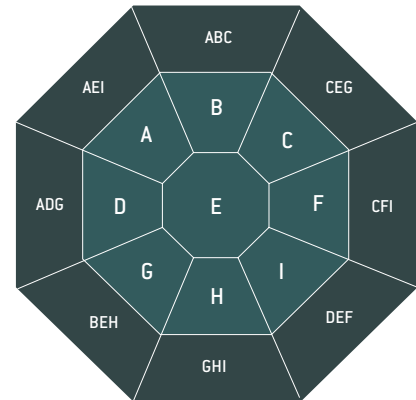
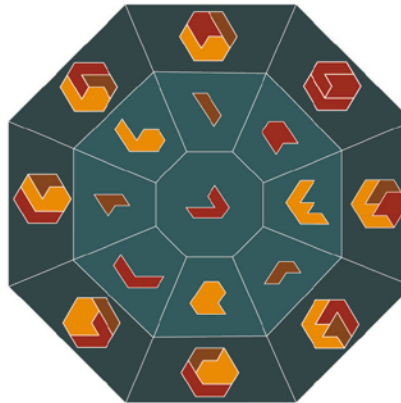
L. Sallows, *Geometric Magic Squares : A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers*, Dover, 2013.

L. Sallows, *Geomagic squares*, 2013 (site Internet avec une grande famille d'exemples) : www.geomagicsquares.com/index.php

J.-P. Delahaye, *Qu'est-ce qu'un objet complexe ?*, *Pour la Science*, n° 427, mai 2013.

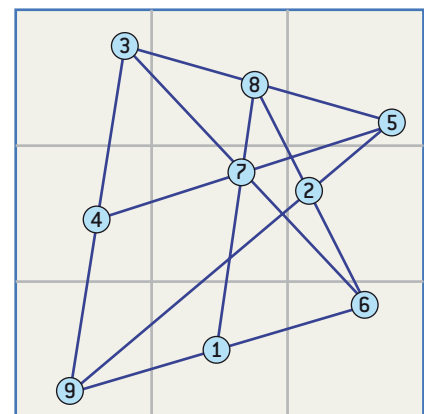
L. Sallows, *Geometric magic squares*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 23(4), pp. 25-31, 2011.

P. Carus, Introduction du livre de S. W. Andrews, *Magic Squares and Cubes*, Open Court Publishing Company, 1917.



9. L'OCTOGONE ET L'HEXAGONE. Le tableau est disposé en octogone (*en vert*). Les séries de formes placées sur l'horizontale centrale (D-E-F), la verticale centrale (B-E-H) et les deux diagonales (A-E-I et C-E-G), ainsi que quatre trios de formes placées côte à côte (A-B-C, C-F-I, I-H-G et G-D-A) sur le pourtour de l'octogone (soit au total huit groupes de trois formes), s'ajustent et donnent huit fois un bel hexagone régulier (*sur le pourtour en noir*).

8	1	6
3	5	7
4	9	2



10. UNE ÉNIGME INVENTÉE PAR LEE SALLAWS consiste à repositionner les pastilles du carré magique de Lo Shu, en plaçant toujours une pastille dans chaque case, de manière à ce qu'il y ait à nouveau huit alignements de trois pastilles, chacun donnant un total que cette fois on veut égal à $S' = 16$ au lieu de $S = 15$. La chose paraît impossible, pourtant la solution est là !

dans cette propriété qu'ils partagent : avoir une grande profondeur logique de Bennett. Il s'agit dans chacun des deux cas d'objets subtilement et délicatement structurés. Comme chez un être vivant, toutes les parties d'un carré géomagique sont solidaires et toute modification apportée en un point détruira l'ordre serré et dense présent dans la délicate construction.

Il ne fait aucun doute que la découverte de L. Sallows n'a pas fini de faire parler d'elle et d'exciter la curiosité des esprits mathématiques et des amateurs d'art géométrique. Elle donnera lieu, comme les

carrés magiques, à d'innombrables travaux et produira en conséquence de merveilleux agencements de formes géométriques que nous admirerons avec étonnement et incrédulité tant ces combinaisons contraintes semblent improbables et même impossibles.

Nous vous invitons à regarder les exemples de carrés géomagiques dus à L. Sallows. Il les a recherchés et construits par le raisonnement ou à l'aide de programmes. Certaines variantes ajoutent de nouvelles contraintes aux combinaisons imposées par la définition de base. Ces variantes sont encore plus inespérées et élégantes. ■