

intriqués à une température non nulle équivaut à l'étude d'un trou noir dans le cadre de la théorie des cordes. Le fait que des trous noirs soient impliqués montre à quel point ces dualités sont extraordinaires. Personne ne suggère que les phases quantiques de la matière contiennent véritablement des trous noirs ; le lien est plus subtil. Stephen Hawking, de l'Université de Cambridge, est connu pour avoir montré (entre autres choses) qu'à un trou noir est associée une certaine température. Celle-ci se traduit, dans la logique de la dualité, par le fait que le système correspondant de matière condensée est chaud, de sorte que l'onde de densité de spin ou le supraconducteur se transforme en un métal étrange.

Dialogue entre un trou noir et un superfluide

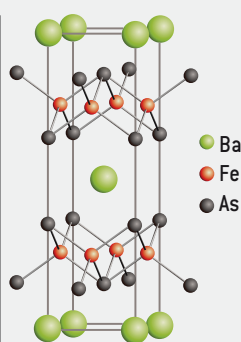
Ces méthodes ont permis de mieux expliquer les métaux étranges et d'autres états de la matière, mais elles ont été surtout utiles pour élucider la transition d'un superfluide à un isolant de Mott – type de matériau qui devrait être conducteur, mais dont les électrons sont bloqués dans des puits de potentiel qui les empêchent de conduire le courant. Un superfluide est analogue à un supraconducteur, si ce n'est qu'il est constitué d'atomes électriquement neutres et délocalisés dans le matériau. Et ce n'est pas la résistance électrique qui devient nulle, mais la viscosité du fluide. Ces dernières années, les expérimentateurs ont développé de nouvelles méthodes pour créer des superfluides artificiels. Ils mettent en place un réseau de lasers qui s'entrecroisent en formant une onde stationnaire périodique et versent dans ce dispositif de grandes quantités d'atomes extrêmement froids. Cela crée des puits de potentiel qui piègent plus ou moins les atomes. Si le potentiel est peu profond, les atomes se comportent comme un superfluide : ils se déplacent librement et sans résistance d'un site du réseau à un autre. Quand les chercheurs augmentent l'intensité du laser, donc la profondeur du potentiel périodique, les effets de corrélation sont augmentés et le superfluide se transforme brutalement en un isolant de Mott.

Au point de transition entre l'état superfluide et l'état isolant, les atomes circulent d'une façon très particulière. Par exemple, quand on supprime la pression externe qui fait se déplacer les atomes, ceux-ci s'immobilisent à une allure qui dépend de la température

Un exemple de métal étrange

À basse température, l'arséniure de baryum et de fer (BaFe_2As_2) change de propriétés en fonction de son dopage. Celui-ci consiste à remplacer une certaine fraction d'arsenic par du phosphore. Si le dopage est faible, le matériau forme un état qu'on nomme « onde de densité de spin ». Un électron du réseau cristallin se trouve entouré avec une plus grande probabilité d'électrons ayant un spin opposé. Dans cette phase, on observe une quasi-périodicité spatiale alternant des spins *haut* et *bas*.

Si la quantité de dopant augmente, la régularité de l'onde de densité de spin diminue. Elle disparaît pour la quantité critique de 30 pour cent d'arsenic



STRUCTURE de l'arséniure de baryum et de fer.

remplacé par du phosphore. Le spin de chaque électron a alors autant de chance d'être *haut* que *bas* sur chaque site du réseau cristallin. L'onde de densité de spin n'existe plus, mais le matériau devient supraconduc-

teur. Cependant, les physiciens pensent qu'il obéit à une théorie semblable à la théorie BCS, si ce n'est que la force attractive entre les paires d'électrons n'a pas pour origine les vibrations du réseau cristallin. Le mécanisme de formation des paires n'est pas encore compris.

La transition entre les phases est nommée point critique quantique. Si on maintient le dopage de 30 pour cent et que l'on augmente la température, une nouvelle phase apparaît, celle des métaux étranges dont la résistance électrique évolue différemment de celle des métaux ordinaires en fonction de la température. Un phénomène d'intrication massif entre ses électrons semble la décrire.

et de la constante de Planck, le paramètre fondamental de la théorie quantique, lequel n'intervient pas dans le comportement des autres phases. Nous avons expliqué ce comportement en imaginant que le fluide critique quantique était l'équivalent par dualité d'un trou noir dans la théorie des cordes.

La dualité a pourtant un inconvénient. Par nature, elle transforme ce qui est complexe en quelque chose de simple. Mais nous ne voulons pas toujours transformer le problème : nous voulons aussi comprendre la complexité en elle-même. La dualité est une boîte noire mathématique qui nous cache les détails des états intriqués ou la façon dont ces états apparaissent dans les matériaux réels. L'explication des mécanismes en jeu en est encore à ses débuts. Pour ceux d'entre nous qui ont l'habitude de réfléchir à la dynamique des électrons dans les cristaux, la théorie des cordes a apporté une nouvelle perspective à la dynamique des états quantiques complexes faisant intervenir l'intrication. Pour les théoriciens des cordes, l'intérêt que nous portions à leur approche a piqué leur curiosité pour les phases des matériaux quantiques, des phénomènes bien éloignés de la physique des commencements de l'Univers ou de ce qui se passe dans les accélérateurs de particules. L'étrange confluence de ces courants de pensée met en lumière d'une façon inattendue l'unité de la nature. ■

■ L'AUTEUR



Subir SACHDEV est professeur de physique à l'Université Harvard, aux États-Unis.

Il est l'auteur de l'ouvrage *Quantum Phase Transitions* [Cambridge University Press, 2011].

■ BIBLIOGRAPHIE

S. Sachdev, *What can gauge-gravity duality teach us about condensed matter physics ?*, *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 3, pp. 9-33, 2012.

C. V. Johnson et P. Steinberg, *What black holes teach about strongly coupled particles*, *Physics Today*, vol. 63(5), pp. 29-33, 2010.

I. R. Klebanov et J. M. Maldacena, *Solving quantum field theories via curved spacetimes*, *Physics Today*, vol. 62(1), pp. 28-33, 2009.

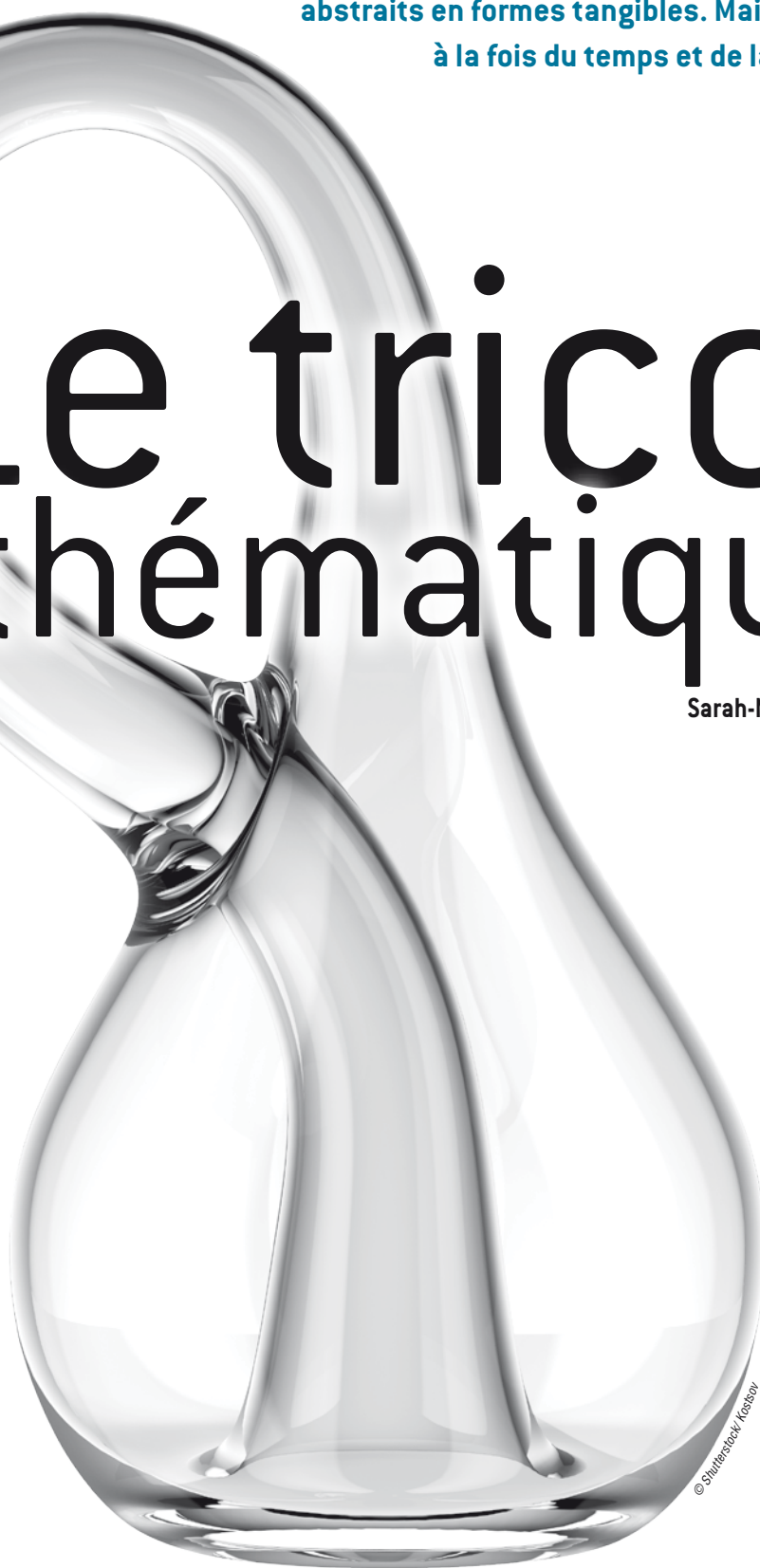
Le tricotage permet de traduire
des surfaces et des objets mathématiques
abstraits en formes tangibles. Mais cela exige
à la fois du temps et de la créativité.

Le tricot mathématique

Sarah-Marie Belcastro

L'ESSENTIEL

- Les premiers tricots représentant des objets mathématiques datent d'il y a au moins un siècle.
- La représentation d'objets mathématiques par des tricots soulève des difficultés qui ne sont pas juste matérielles ou techniques, surtout si l'on cherche à être fidèle aux mathématiques.
- L'auteur a notamment tricoté des bandes de Möbius, des bouteilles de Klein, des nœuds ou des graphes intégrés à une surface torique.



© Shutterstock / Kasey

Je sais tricoter depuis l'école primaire, mais je ne me souviens pas vraiment quand j'ai commencé pour la première fois à tricoter des objets mathématiques. Au plus tard, ce devait être durant ma première année de troisième cycle à l'université. J'ai beaucoup tricoté cette année-là, car je manquais de sommeil et il me fallait rester éveillée pendant les cours. Durant la session d'automne, j'ai fait un pull-over pour mon père, en terminant les dernières coutures juste après mon dernier examen, et au printemps suivant, je terminais un pull-over pour ma mère. C'est également au cours de ce printemps que j'ai tricoté, pendant le cours de topologie, une bouteille de Klein, une surface mathématique n'ayant ni extérieur ni intérieur, et qui ne peut donc pas servir de récipient (voir la figure 1). J'ai achevé ce tricot pendant un exposé. Il était imparfait, mais j'étais si enthousiaste que, à la fin du cours, je l'ai lancé au professeur afin qu'il puisse y jeter un œil.

Au fil des ans, j'ai tricoté de nombreuses bouteilles de Klein ainsi que d'autres objets mathématiques, et j'ai sans cesse amélioré mes modèles. À l'époque où je me suis mise à tricoter des objets mathématiques, j'ignorais totalement si quelqu'un avait entrepris un tel travail auparavant. J'ai appris plus tard qu'il y a longtemps que des gens font du tricot mathématique.

Il y a un siècle déjà...

Les plus anciennes surfaces mathématiques tricotées connues ont été créées à la fin du XIX^e siècle ou au début du XX^e par Alexander Crum Brown, un professeur de chimie écossais (voir l'encadré page 50). En 1971, Miles Reid, de l'Université de Warwick en Grande-Bretagne, a publié un article sur le tricotage de diverses surfaces. Au milieu des années 1990, une technique permettant de tricoter des bandes de Möbius, issue de l'article de M. Reid, a été reproduite et répandue *via* Internet, qui en était alors à ses débuts (une bande de Möbius est un ruban dont on joint les deux extrémités après avoir fait tourner de 180 degrés l'une de ces dernières, de telle façon que la surface résultante n'ait



1. QUAND ON TENTE de la représenter en trois dimensions, la bouteille de Klein, objet mathématiquement défini à partir d'un rectangle plan et qui n'a ni intérieur ni extérieur, devient une surface qui se recoupe avec elle-même. Ci-dessus, une bouteille de Klein tricotée par l'auteur en 2013. Au lieu d'une auto-intersection fixe, l'objet tricoté a un trou ; on peut ainsi le manipuler pour montrer ses propriétés. Les bandes colorées différemment correspondent à des bandes de Möbius.

qu'un seul côté : on peut la parcourir en totalité sans lever le doigt).

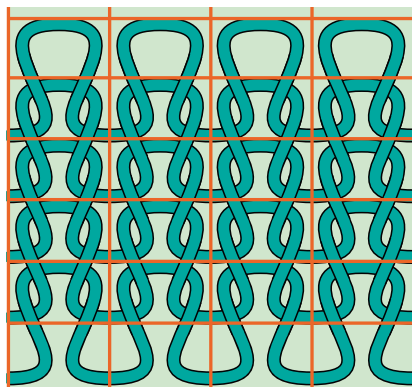
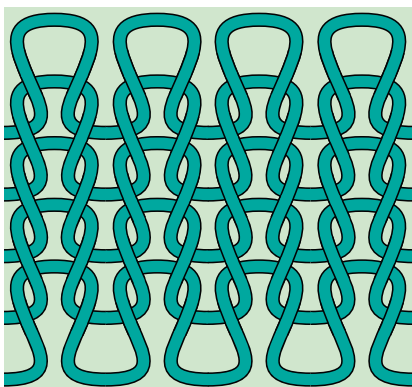
Des tricoteurs non mathématiciens ont également créé des modèles pour bandes de Möbius ; l'un d'eux, conçu pour être porté en tant qu'écharpe, a été créé en 1989 par Elizabeth Zimmerman, une célèbre tricoteuse d'origine britannique.

J'ai pris connaissance du modèle de M. Reid, et il m'inspira une nouvelle conception de la bouteille de Klein. Le tricotage mathématique a depuis rencontré du succès, et de nombreux nouveaux modèles sont maintenant disponibles. Certains d'entre eux figurent dans les deux ouvrages que j'ai coédités avec Carolyn Yackel, enseignante de mathématiques à l'Université Mercer, aux États-Unis.

Des ouvrages utiles à l'enseignement

On pourrait se demander quel peut être l'intérêt de tricoter des objets mathématiques. L'un des bénéfices de cette activité est que les tricots, une fois achevés, constituent une très bonne aide pour l'enseignement des mathématiques. Un tricot est souple et peut être manipulé physiquement, contrairement aux infographies, souvent magnifiques et scientifiquement parfaites, mais impalpables. Et l'activité de tricotage elle-même est éclairante : en créant un objet, sans suivre le modèle de quelqu'un d'autre, on en retire une connaissance approfondie. Pour concrétiser une abstraction, il faut la comprendre suffisamment pour décider quelles propriétés mettre en valeur. De telles décisions constituent une partie cruciale du processus de conception.

Considérons d'abord le tricotage d'un point de vue géométrique. Les mailles du tricot forment un réseau de rectangles, chaque rectangle contenant une maille (voir la figure 2). On élabore la forme du tricot principalement à l'aide des « augmentations » et des « diminutions ». Comme leurs noms l'indiquent, les augmentations augmentent le nombre de mailles dans un rang (voir la figure 3), et les diminutions le diminuent. Ces deux processus permettent de créer une courbure dans le tricot. On peut remarquer que faire une diminution a le même effet qu'une



2. LES RANGS DE MAILLES D'UN TRICOT dessinent un motif régulier (à gauche). La périodicité du motif permet de superposer aux mailles un réseau rectangulaire, où chaque rectangle contient une maille (à droite). Le réseau rectangulaire peut aussi être assimilé à un système de deux coordonnées cartésiennes.

augmentation sur le réseau de mailles : une diminution ressemble à une augmentation si l'on renverse le tricot.

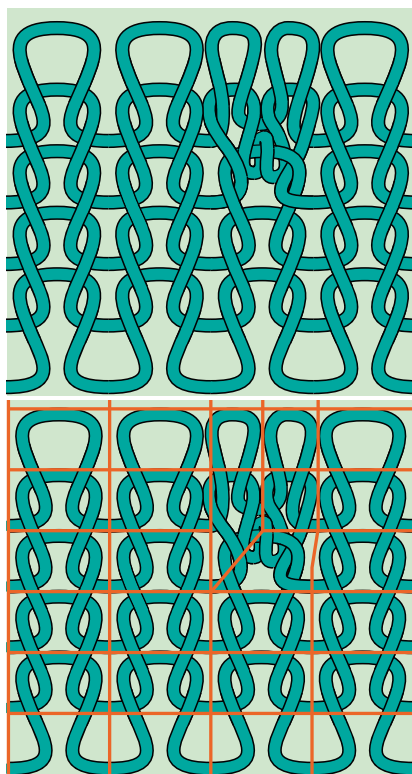
Les rangs et les colonnes de mailles guident l'œil le long de trajectoires tout au long de la surface. Ainsi, lorsqu'on observe une sphère tricotée d'un pôle à l'autre, les rangs et les colonnes de mailles correspondent aux lignes de latitude et de longitude (voir la figure 4).

Tout tricotage revient à édifier une structure globale au moyen de choix opérés à l'échelle locale, au niveau des mailles. Un groupe de mailles ressemble à un système de coordonnées (un quadrillage dans un plan). Un tricot n'est cependant pas plan en général : un tel système de coordonnées ne s'applique que localement, pour le petit ensemble de mailles en question.

Les mailles, un système de coordonnées ?

Un objet muni d'un système de coordonnées ordinaires à l'échelle locale (c'est-à-dire qu'un tel système de coordonnées est attaché en chaque point et à sa proximité immédiate), mais peut-être pas à l'échelle globale, est ce que les mathématiciens nomment une variété. L'étude des différentes familles de variétés constitue d'ailleurs une partie importante des mathématiques actuelles.

La notion de variété sous-entend que le nombre de dimensions (le nombre de coordonnées indépendantes) est constant : à chaque point de la variété correspond un système de coordonnées qui peut être différent, mais de même dimensionnalité. Un pull-over représente ainsi une variété



3. POUR AJOUTER UNE MAILLE à un rang, on réalise une « augmentation » (en haut), qui peut être représentée sur le réseau par deux rectangles naissant d'un seul rectangle (en bas). L'augmentation crée une courbure dans le tricot. Une « diminution » a un effet similaire et ressemble à une augmentation lorsqu'on inverse le haut et le bas du tricot.

de dimension deux – à moins qu'il ait des poches cousues, car là où la poche est reliée au pull-over, trois coordonnées indépendantes (haut-bas, gauche-droite sur la poche et gauche-droite sous la poche) sont nécessaires pour repérer les points voisins de la couture.

La plupart des objets mathématiques tricotés correspondent à des variétés. En particulier, bien qu'une pièce de laine tricotée soit bien sûr tridimensionnelle, elle peut représenter des objets bidimensionnels, au même titre qu'une feuille de papier représente une surface bidimensionnelle. Autrement dit, un tricot peut être considéré comme un objet bidimensionnel – ou comme la frontière (la peau ou l'enveloppe) d'un objet tridimensionnel.

Certains objets mathématiques sont bidimensionnels, mais ne peuvent pas être représentés dans l'espace à trois dimensions sans qu'ils se traversent eux-mêmes ou sans l'ajout de trous (en termes mathématiques, ces objets peuvent être « immergés », mais pas « plongés » dans l'espace réel à trois dimensions). C'est le cas de la bouteille de Klein.

Des bouteilles de Klein en laine

Comme nous l'avons mentionné, la bouteille de Klein est une surface mathématique abstraite dépourvue de bords et formée de telle sorte que son intérieur ne se distingue pas de son extérieur (voir la figure 5). En d'autres termes, on peut faire courir le doigt le long de la surface, en partant de tout point situé sur l'extérieur, et arriver au point correspondant à l'intérieur, sans lever le doigt.

Une représentation correcte de la bouteille de Klein consiste, à deux dimensions, à partir d'un rectangle dont deux côtés parallèles sont orientés (par des flèches) dans le même sens, tandis que les deux autres côtés sont munis d'orientations de sens opposés. La bouteille de Klein est l'objet bidimensionnel et abstrait obtenu quand on identifie (ou quand on fait se rejoindre) les côtés parallèles du rectangle, en respectant les orientations. Lorsqu'on cherche à figurer cela en trois dimensions, on obtient une surface qui semble se traverser elle-même, en présentant une auto-intersection ou un trou.

Ma première bouteille de Klein, du moins sa représentation en trois dimen-

sions, a été réalisée avec les aiguilles à tricoter parallèles aux flèches simples du rectangle, et les tours de tricotage formés dans la direction des flèches doubles (voir la figure 5). Elle avait beaucoup d'imperfections, mais à l'époque, je n'en avais relevé qu'une seule : cette bouteille en laine était figée dans une configuration tridimensionnelle unique, parce que je l'avais réalisée avec une auto-intersection. Pour régler ce problème, j'ai rapidement réalisé une bouteille de Klein, assez vilaine, dotée d'un trou (voir la figure 6).

Les défauts de mes premières bouteilles de Klein tricotées se rangeaient en deux catégories : esthétique et mathématique. D'abord l'esthétique : ces objets étaient affreux ! L'une des raisons était que j'utilisais du mauvais matériel. J'ai toujours préféré me servir d'aiguilles à tricoter circulaires, qui sont composées de deux extrémités pointues reliées par un câble fin et souple. À l'université, j'utilisais souvent des aiguilles dont je raccourcissais les câbles en plastique en les faisant fondre, ou je fabriquais mes propres aiguilles circulaires avec du fil métallique et du ruban d'emballage (qui accrochait sans arrêt le fil à tricoter).

Ces tentatives pour fabriquer des aiguilles à la fois suffisamment courtes et suffisamment flexibles pour mes besoins ont donné lieu à une expérience de tricotage plutôt frustrante et à des résultats pas très heureux. Par la suite, j'ai pu me procurer des aiguilles en bambou fixées à des câbles creux que l'on peut allonger ou raccourcir à volonté. Et j'ai appris comment utiliser tout l'attirail standard du tricotage pour obtenir les résultats que je désire.

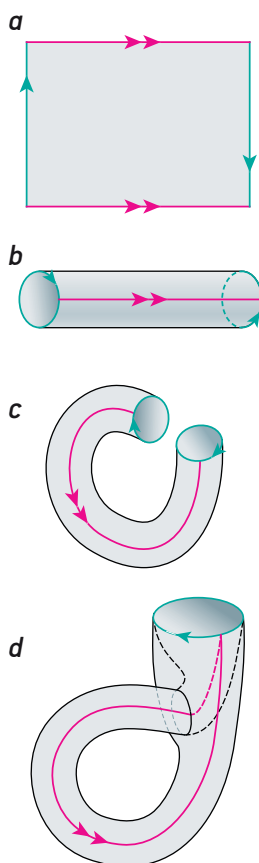
Difficultés matérielles et mathématiques

Cependant, il n'y avait pas que les aiguilles : le fil à tricoter posait lui aussi problème. Ma première bouteille de Klein a été fabriquée avec un fil d'acrylique acceptable, mais de qualité médiocre. La deuxième a été fabriquée avec un fil d'origine inconnue, que j'avais trouvé dans une brocante. Il était difficile à travailler et son toucher « plastique-fibre de verre » m'horripilait. Aujourd'hui, j'ai tendance à utiliser du fil de haute qualité plutôt que le tout-venant, et je choisis la couleur, le type de teinture et la texture du fil en fonction de mes objectifs mathématiques. En fin de compte, dans la

conception de ces objets, j'ai improvisé sans trop penser aux détails, de sorte que ma première bouteille de Klein est difforme et que la deuxième présente une ligne verticale bizarre (non visible sur la figure 6).

Venons-en maintenant aux problèmes mathématiques. L'approche que j'ai utilisée dans les deux cas consistait à tricoter quelque chose ressemblant à un cylindre, à faire passer l'une des extrémités de ce cylindre à travers son côté, puis à joindre les deux extrémités du cylindre. Pour passer à travers le cylindre, on peut intégrer une ouverture latérale (comme je l'ai fait avec ma deuxième bouteille de Klein), ou créer une auto-intersection en faisant passer des mailles à travers le côté du cylindre (comme je l'ai fait avec ma première bouteille de Klein).

De l'une ou l'autre manière, en utilisant cette méthode, on crée une bouteille de Klein à partir du rectangle aux côtés orientés et identifiés, les rangs de mailles étant parallèles à deux des côtés du rectangle



5. UNE BOUTEILLE DE KLEIN est l'objet mathématique obtenu à partir d'un rectangle aux côtés orientés [a, flèches], que l'on identifie (ou que l'on joint) deux à deux. Un modèle tridimensionnel de la bouteille de Klein s'obtient en courbant et en étirant le rectangle dans la troisième dimension, de façon à coller les côtés qui se correspondent [b, c]. Mais la surface formée doit alors se traverser [d]. L'ouvrage ci-dessus est la première bouteille de Klein tricotée par l'auteur [cette surface comporte ici une auto-intersection tricotée].



4. LES RANGS ET LES COLONNES de mailles guident l'œil le long de trajectoires qui équivalent à des lignes de latitude et de longitude, un système de coordonnées adapté à la courbure de la sphère.





6. LA DEUXIÈME BOUTEILLE DE KLEIN tricotée par l'auteur. Elle comporte une ouverture et non une auto-intersection tricotée, de sorte que la surface coulisse au sein d'elle-même. Bien que ce modèle ait constitué une amélioration par rapport au premier, les coordonnées suggérées par les rangs et les colonnes de mailles ne correspondent toujours pas au système de coordonnées associé au rectangle permettant de définir mathématiquement la bouteille de Klein.



7. CETTE BOUTEILLE DE KLEIN d'une dizaine de centimètres a été réalisée en utilisant la méthode de tricotage d'une bande de Möbius proposée par Miles Reid. Une torsion d'un demi-tour est d'emblée intégrée au tricot, de sorte que l'identification souhaitée des côtés du rectangle de définition de la bouteille de Klein se produit automatiquement, avec des coordonnées qui correspondent à celles suggérées par les rangs et les colonnes de mailles.

(les flèches simples dans la figure 5) et les colonnes de mailles étant parallèles aux deux autres côtés du rectangle (les flèches doubles dans la figure 5).

Il est très facile de joindre les extrémités du cylindre de façon incorrecte. À moins que le tricoteur ou la tricoteuse n'introduise une torsion d'un demi-tour avant de réunir les deux extrémités, les quatre coins du rectangle ne se rejoindront pas. Sans cette torsion, le résultat est encore une bouteille de Klein, mais les coordonnées suggérées par les rangs et les colonnes de mailles ne correspondent pas aux coordonnées du rectangle sous-jacent, et la géométrie de l'objet achevé n'est pas celle souhaitée. Un cylindre tricoté, cependant, oppose de la résistance à la torsion, d'où la difficulté que présente cette étape.

Donner au tricot une torsion intrinsèque

J'ai fini par trouver une solution à ce problème : créer le demi-tour de torsion intrinsèquement au lieu de l'ajouter à la fin. J'ai effectué cela en partant de la construction de la bande de Möbius indiquée par M. Reid. Dans cette méthode, les aiguilles sont parallèles aux flèches doubles du rectangle de base, et le tricotage se déroule en suivant simultanément les deux côtés à flèches simples du rectangle. Comme le demi-tour de torsion est ainsi d'emblée présent dans le tricot, la jointure souhaitée du rectangle sous-jacent se produit automatiquement,

L'AUTEUR



Sarah-Marie BELCASTRO est mathématicienne au *Smith College*, à Northampton (Massachusetts, États-Unis), et membre invitée du *Sarah Lawrence College*, (État de New York).

Article publié avec l'aimable autorisation de *American Scientist*.



8. CETTE BANDE DE MÖBIUS intègre un motif représentant le graphe complet K_6 (six sommets tous connectés deux à deux par une arête). Le fil étant grossier, les arêtes ne se distinguent pas bien, les mailles adjacentes entretenant les couleurs.

avec des coordonnées (abscisses et ordonnées) qui correspondent bien aux rangs et aux colonnes de mailles (voir la figure 7). Des instructions sommaires pour tricoter une bouteille de Klein sont disponibles sur mon site Web de tricotage mathématique.

Cette solution était le fruit de plusieurs années de réflexion. Après m'être rendu compte à quel point mes premières bouteilles de Klein étaient défectueuses, je souhaitais faire mieux et créer un modèle qui fût plus fidèle aux mathématiques. Et c'est ainsi que la question s'est posée : que signifie être mathématiquement fidèle pour un objet tricoté ?

Être fidèle aux mathématiques

La façon dont un objet est construit, dans tout art ou technique, met en lumière certaines des propriétés de cet objet et en masque d'autres. La modélisation d'objets mathématiques ne fait pas exception à cette règle : elle nécessite que nous fassions des choix sur les aspects mathématiques de cet objet qui nous semblent les plus importants. Chaque fois que possible, je tricote des objets de telle façon qu'un ensemble particulier de propriétés soit intrinsèque à la construction.

La plupart des objets que je confectionne présentent à la fois des aspects topologiques et des aspects géométriques. Autrement dit, ces objets ont une forme globale qui est conservée lorsqu'on les courbe ou qu'on les étire, et ils ont une configuration et

une structure particulière dans l'espace. Parfois, la topologie prend le pas sur la géométrie, parfois c'est l'inverse ; cette différence détermine si l'objet doit être muni d'une courbure, et si oui, où.

Je tricote souvent des surfaces. Elles sont bidimensionnelles et généralement lisses, ce qui signifie que les modèles tricotés ne doivent pas comporter de coutures, visibles ou non. Un modèle idéal d'une surface ne devrait pas comporter de mailles d'arrêt pour les bords. Dans le monde réel, le fil doit avoir deux extrémités. De même, une pièce tricotée peut être fabriquée à partir de plus d'une pièce de fil à tricoter, mais la transition d'une pelote à une autre devrait être invisible. Ces caractéristiques font partie d'un modèle topologique pour le tricotage que j'ai décrit en 2009.

Textures et motifs

Un autre aspect à considérer quand on tricote des objets mathématiques est la texture de leur surface. Par exemple, l'intérieur et l'extérieur d'une bouteille de Klein abstraite se confondent, et donc la texture d'une bouteille de Klein tricotée devrait être la même sur ses deux côtés (ou faces) physiques. Il devrait être impossible de dire quelle face réelle on est en train d'observer ou toucher, et aucune transition ne devrait être perceptible entre les différentes parties de la pièce tricotée. Pour certains autres objets, les deux faces sont mathématiquement distinctes, et leurs textures devraient par conséquent être distinguables.

On peut aussi mettre en exergue certains sous-objets ou propriétés mathématiques au moyen d'un motif intégré au tricot. Par exemple, on peut se servir de motifs à rayures pour faire apparaître des bandes de Möbius au sein d'une bouteille de Klein.

La plupart de ces modèles à motifs posent des difficultés mathématiques en raison du problème de la discrétisation : une courbe régulière ou une aire colorée dessinées sur un morceau de papier ou électroniquement doivent, dans le tricot, être traduites en une séquence de mailles discrètes. Cela nous ramène à la question du maillage (voir les figures 3 et 4). Les informaticiens qui travaillent sur la visualisation d'objets en trois dimensions ont mis au point des algorithmes pour imposer un maillage sur un objet idéalisé. Un maillage plus fin donne un aspect plus lisse ; de fait, c'est grâce à l'utilisation de maillages très

fins que l'on obtient des infographies très réalistes. Dans le tricotage, l'obtention d'un maillage plus fin nécessite à la fois un fil plus fin et beaucoup plus de temps.

La discrétisation d'un motif n'est pas aussi simple que la surimposition d'un maillage. En effet, les mailles d'un tricot ne sont pas tout à fait carrées en proportion ; leur « rapport d'aspect », c'est-à-dire le rapport largeur/hauteur, est proche de 5:6. Ce fait doit être pris en considération avant de passer à l'exécution du tricot ; sinon, l'objet obtenu sera incorrectement allongé. En général, je réalise un échantillon de tricot avec le fil que j'ai l'intention d'utiliser, ce qui me permet de voir quel sera le rap-

port d'aspect de la maille, puis je crée un papier quadrillé constitué de rectangles élémentaires ayant les proportions appropriées. Il faut ensuite déterminer la forme globale – là où il y aura des augmentations et des diminutions, des rangs raccourcis et d'autres éléments de construction – et traduire cela sur le papier quadrillé. Le défi consiste alors à placer avec précision des motifs ou des couleurs sur cette forme. Voici quelques exemples.

Tout d'abord, considérons le tore. Un tore est une surface de révolution ayant la forme d'une chambre à air ou d'une bouée – il est engendré en faisant tourner un cercle autour d'un axe extérieur au cercle et situé



9. UN TORE COMPORTANT UN MOTIF correspondant au graphe complet K_7 (sept sommets tous reliés deux à deux par une arête) tracé sur le tore. La conception d'un tel modèle tricoté, où plusieurs segments de droite doivent être représentés sur une surface courbe, n'est pas facile.



10. CES TORES TRICOTÉS EN DEUX COULEURS représentent des nœuds de trèfle (en médailles) tracés sur une surface torique. Sur le tore, le nœud de trèfle correspond à une courbe fermée qui ne se recoupe pas. Il existe en deux chiralités : chaque nœud est une image miroir de l'autre, ici en structure comme en couleur.



11. CETTE BANDE DE MÖBIUS, tricotée avec un fil de laine et soie, est destinée à être portée comme une écharpe. Le motif tricoté représente le graphe complet K_6 .

dans son plan. Un nœud torique est une courbe fermée et sans croisements que l'on peut tracer sur le tore, de telle façon que lorsqu'on efface la surface torique, la courbe qui subsiste forme un nœud (voir la figure 10). Sur le « tore plat », le rectangle analogue à celui qui sert à définir la bouteille de Klein, mais dont les côtés opposés sont simplement identifiés ou recollés, un nœud torique peut être représenté par une courbe rectiligne, c'est-à-dire une droite de pente constante. Pour traduire cela sur un tricot, il faut modifier la pente de la courbe d'une façon qui soit cohérente avec la courbure de la surface torique. Heureusement, il existe une construction permettant d'obtenir un tore tricoté en n'opérant qu'un petit nombre de modifications.

Comment tricoter des droites sur un tore ?

Un défi supplémentaire est de tricoter une ligne ou une courbe dans un objet dont la surface a une texture bosselée. Chaque maille doit être tricotée dans une seule couleur de fil (car une maille représente la taille minimale du maillage). Or avec des

mailles adjacentes de couleurs différentes, les couleurs s'entrelacent. Par conséquent, pour représenter une courbe bien nette, la largeur de cette dernière doit être d'au moins deux mailles (voir les figures 8 et 11, où les maillages n'ont pas la même finesse).

Tricoter plusieurs segments de droite sur une surface courbe est également très difficile. Dans un autre projet, j'ai tricoté le graphe complet K_7 , c'est-à-dire un ensemble de sept sommets tous reliés deux à deux par une arête, dans un tore (voir la figure 9). Cela a nécessité l'utilisation d'une symétrie d'ordre 7 (symétrie par rotation d'un septième de tour). Pour distinguer les différents segments de droite issus d'un sommet, chacun de ces segments devait avoir une pente différente, et ces pentes devaient être modifiées en conformité avec la construction du tore. Qui plus est, les sommets tricotés avaient une certaine épaisseur, ce qui perturbait les calculs des pentes.

Qu'implique exactement le processus de conception d'un modèle pour un objet mathématique ? Voici comment je procède. Après avoir choisi un objet à modéliser, je mets au clair mes objectifs mathématiques

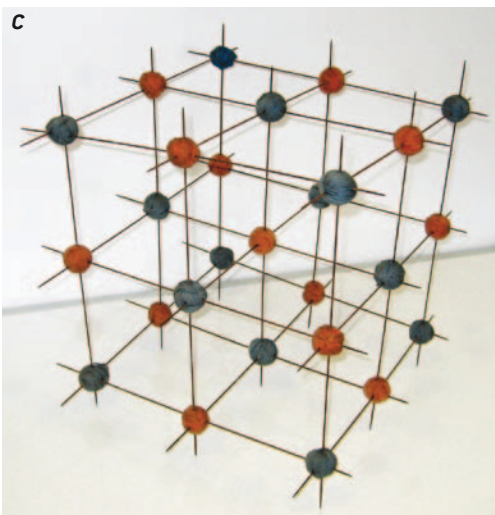
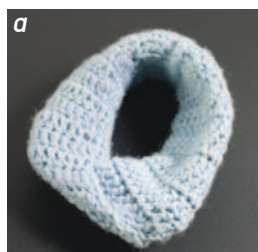
LES PREMIERS TRAVAUX D'AIGUILLES MATHÉMATIQUES : ALEXANDER CRUM BROWN

Pour ceux qui ont un penchant à la fois pour les mathématiques et les travaux d'aiguilles, la bouteille de Klein est depuis longtemps un sujet d'étude. En témoigne la bouteille de Klein ci-contre (a), réalisée par le chimiste écossais Alexander Crum Brown (1838-1922) dans les années 1890-1910.

Crum Brown était professeur de chimie à l'Université d'Édimbourg et membre de la *Royal Society* d'Édimbourg. Enfant, il aimait fabriquer des modèles et il inventa une machine à tisser. Il continua à s'intéresser à la fabrication de modèles à l'âge adulte ; sa thèse pour son diplôme de médecine à l'Université d'Édimbourg détaillait un système graphique permettant de représenter la structure des composés organiques, les atomes étant représentés par des cercles et les liaisons par des lignes. Les activités manuelles de Crum Brown l'ont sans doute aidé pour ses travaux plus abstraits. La figure (c) montre un modèle qu'il a fabriqué en 1883, et qui représente la structure cristalline du chlorure de sodium (NaCl). Les atomes sont représentés par des boules de laine rouges et bleues, et les liaisons par des aiguilles métalliques.

Les travaux d'aiguilles ne constituaient que l'une des nombreuses activités de Crum Brown. Il était également fasciné par les voyelles, et il a fabriqué une « bouteille parlante » qui produisait des sons de voyelles quand on soufflait dedans. En plus de la bouteille de Klein, il a fabriqué une grande variété d'objets en tricot, et a pour certains utilisé plusieurs couleurs afin de montrer les intersections des surfaces. L'objet (b) a ainsi été tricoté en trois couleurs, avec des couches entrelacées.

Tous ces travaux se sont révélés utiles pour les vieux jours de Crum Brown. James Walker, qui lui succéda à la chaire de chimie à l'Université d'Édimbourg, écrivit dans une nécrologie consacrée à Crum Brown que celui-ci avait passé dans l'invalidité les sept dernières années de sa vie, mais il fit remarquer : « Son esprit perdit très peu de son activité. Il lisait beaucoup et s'amusait avec des méthodes originales de tricotage. »



a : Science & Society Picture Library, b et c : Andrew Alexander, University of Edinburgh School of Chemistry



12. LE TRICOT CI-DESSUS EST INSPIRÉ d'un diagramme figurant dans le manuel de topologie algébrique d'Allen Hatcher. La structure est celle d'une tige dont la section est un Y aux bras de même longueur, la tige étant recourbée pour joindre l'une de ses deux extrémités à l'autre, après une torsion d'un tiers de tour. La surface

ainsi obtenue ne comporte qu'un seul bord continu. L'ouvrage est ici renforcé avec du fil de fer pour mieux montrer sa structure. Le tricot de droite est mathématiquement identique, mais il est dépourvu d'armature métallique et est dimensionné pour être porté comme un capuchon.

(en pratique, je le fais souvent inconsciemment). Les objectifs choisis imposent des contraintes sur le tricotage. Cela me donne un cadre pour concevoir le tricotage de l'objet dans sa structure globale.

Je dois ensuite considérer la structure fine de cet objet. Y a-t-il des aspects particuliers des mathématiques que l'on peut mettre en valeur avec de la couleur ou un motif? Des textures particulières sont-elles nécessaires? Pendant la résolution du problème de discrétisation qui s'ensuit, je produis habituellement un modèle que je peux suivre – j'ai mauvaise mémoire et sans cela je perdrais tout mon travail.

Se coiffer d'une bande de Möbius généralisée

Une création mathématique récente peut illustrer cela. Un jour, un dessin figurant dans le livre *Algebraic Topology* de Allen Hatcher (en accès libre sur Internet) attira mon regard; il me semblait que si la surface représentée était tricotée, le résultat serait formidable. Sa structure est celle d'une tige dont la section est un Y ayant ses trois bras de même longueur, la tige étant recourbée sur elle-même de façon à ce que ses deux extrémités se rejoignent, mais après une torsion de la tige d'un tiers de tour. On obtient ainsi une sorte de bande circulaire qui n'a qu'un seul bord continu (le doigt peut continûment parcourir le bord dans sa totalité et revenir au point de départ).

Bien que cette surface ne constitue pas une variété (il n'est pas possible d'associer un système de coordonnées univoque aux points de l'axe central de la tige), elle res-

semble à une bande de Möbius – c'en est une généralisation. J'ai donc pensé que je pouvais utiliser une construction similaire à celle d'une bande de Möbius – à condition de trouver une façon de tricoter vers l'extérieur, à partir du cercle central (l'axe circulaire de la tige en Y).

Je souhaitais que l'objet tricoté soit fait à partir d'une pelote unique de fil, l'objet mathématique n'ayant qu'un seul bord. Je devais ainsi trouver une façon d'utiliser un seul fil pour produire trois ensembles entrelacés de mailles libres (un tricot ordinaire n'a que deux ensembles de mailles, supérieur et inférieur, par fil). Après avoir résolu ce problème – et cela m'a pris du temps –, je décidai d'utiliser une texture qui aurait le même aspect à partir de tous les points de vue, de sorte que le cercle central serait moins visible. Pour ma première tentative, j'ai décidé de faire simple et je n'ai pas ajouté davantage de conditions (voir la figure 12).

Après avoir terminé ma première réalisation, je l'ai examinée et me suis rendu compte qu'elle ressemblait à un capuchon. J'ai redimensionné la version suivante afin de produire un véritable vêtement. Un objet mathématique que l'on peut porter est un résultat pratique rare, et bienvenu!

Bien que j'aie travaillé sur différents projets de tricot mathématique, je n'en ai pas encore fini avec mes modèles de bouteille de Klein – et cela fait environ 20 ans que j'ai commencé. On m'a demandé d'adapter ma construction pour en faire un chapeau qui puisse être porté. C'est l'un des nombreux défis de tricot mathématique que je compte bien relever. ■

■ SUR LE WEB

The Home of Mathematical Knitting [site Web de l'auteur] : www.toroidalsnark.net/mathknt.html

■ BIBLIOGRAPHIE

S.-M. Belcastro et C. Yackel (éds.), *Crafting by Concepts: Fiber Arts and Mathematics*, AK Peters, 2011.

S.-M. Belcastro, *Every topological surface can be knit: A proof*, *Journal of Mathematics and the Arts*, vol. 3(2), pp. 67-83, 2009.

S.-M. Belcastro et C. Yackel (éds.), *Making Mathematics with Needlework: Ten Papers and Ten Projects*, AK Peters, 2007.

M. O. Reid, *The knitting of surfaces*, *Eureka - The Journal of the Archimedeans*, vol. 34, pp. 21-26, 1971.

Des VOLS SPATIAUX pour tous

Alan Stern

L'espace de demain ne sera pas réservé uniquement aux touristes fortunés. Pour les chercheurs, l'industrie spatiale commerciale naissante ouvre des possibilités nouvelles, moins chères et variées.

L'un des problèmes les plus frustrants de la recherche spatiale est le mode d'accès à l'espace, qui n'a pas changé depuis 50 ans. Aller dans l'espace reste à la fois cher et rare. Nous sommes encore loin du stade où les scientifiques iront régulièrement en orbite pour utiliser eux-mêmes leurs instruments de mesures. D'ailleurs, certaines régions de la haute atmosphère ne sont aujourd'hui accessibles que par des systèmes automatisés.

Tout cela devrait bientôt changer. L'avènement de vols spatiaux commerciaux réguliers à but lucratif (récemment illustré par les lancements réussis du vaisseau cargo spatial *Dragon*, construit et exploité par *SpaceX*, vers la Station spatiale internationale, l'ISS) transformera probablement la recherche spatiale. Les scientifiques bénéficieront de coûts de lancement réduits, d'un accès plus fréquent à l'espace et de la possibilité de réaliser eux-mêmes leurs expériences en orbite. Ces avancées rendront certainement service aux grandes missions de recherche de la NASA et des agences spatiales japonaise

L'ESSENTIEL

- **Le coût et la rareté des vols vers l'espace ont été des obstacles au développement de la recherche spatiale.**
- **Des sociétés privées annoncent une ère de vols spatiaux moins chers et plus fréquents.**
- **Bien que la plupart de ces entreprises aient pour objectif premier d'envoyer des touristes dans l'espace, les chercheurs pourront y trouver une place pour eux et leurs expériences.**
- **Ces sociétés espèrent, à terme, atteindre la Lune ou Mars...**

et européenne. Et elles rendront l'espace plus abordable pour de nombreux pays, institutions académiques et entreprises.

J'ai commencé à m'intéresser au potentiel des vols spatiaux commerciaux lorsque j'étais administrateur adjoint de la NASA, en charge de toutes les études scientifiques spatiales et terrestres. Depuis, j'ai été conseiller pour des sociétés spatiales commerciales, directeur scientifique de deux équipes participant au *Google Lunar X PRIZE* (qui récompensera d'une bourse de plus de 30 millions de dollars la première mission robotisée qui se posera sur la Lune et renverra une vidéo vers la Terre) et me suis occupé d'achats de vols habités commerciaux pour la recherche à travers mon institution. Autrement dit, j'ai vu grandir de mes propres yeux la promesse des vols spatiaux commerciaux.

Dans les années à venir, toute une panoplie de systèmes spatiaux commerciaux entrera en service et offrira un éventail de possibilités très intéressantes pour les chercheurs. C'est une nouvelle étape pour les sciences spatiales, qui ont débuté au