

donc pas surprenant que beaucoup d'isolés – pharmaciens, ingénieurs souvent retraités, quelques rares universitaires – aient eu pour souci de confier un pli cacheté sur ce thème. À l'ouverture cependant, rares sont ceux qui ont retenu l'attention. Nombre de plis comportaient une erreur fondamentale, du fait des connaissances limitées de l'époque. D'autres décrivaient une méthode de synthèse chimique certes possible, mais dépassée. Dans certains cas, la méthode préconisée n'était pas fautive, mais le procédé avait été découvert juste après la date du dépôt. Dans ces cas favorables, mais rares, qui aurait pu reconnaître une antériorité ? Tout était depuis longtemps tombé dans le domaine public. Et qui, hormis les historiens, s'intéresserait à une antériorité lointaine ?

Depuis une cinquantaine d'années, une autre sorte de plis – volumineux, touffus, de contenu ambitieux – est apparue, qui a conduit à amender le règlement. L'auteur méconnaît ou rejette les avancées de la science contemporaine. Animé d'une idée, d'une théorie qui l'inspire, il élabore son propre système, sans tenir compte de faits établis ou de la simple logique. Il demande en général l'ouverture de son pli au bout de plusieurs années, dans l'espoir toujours vain de faire reconnaître ses travaux sans passer par des canaux de publication habituels.

Une absence de plis conceptuels

Pourquoi confier un résultat, une pensée, un nouveau dispositif technique au secret de l'Académie des sciences ? Pourquoi ne pas diffuser ses idées ou ses résultats ? Pourquoi les occulter un temps, et parfois pour toujours ? Il est curieux que, à part les écrits volumineux et récents de marginaux, peu de plis aient développé un point de vue conceptuel. Dans les années dont nous analysons aujourd'hui les dépôts (après le délai réglementaire de 100 ans), des discussions fondamentales animaient le monde scientifique, en physique comme en biologie, sur la structure de la matière ou l'évolution des espèces, par exemple. Les déposants auraient pu apporter une contribution critique sur ces spéculations théoriques. Or ils n'abordent



5. TROIS PLIS DÉPOSÉS SOUS FORME D'OBJETS : un flacon scellé, non ouvert, ayant un dépôt de nature non précisée (à gauche avec sa boîte, 1760), un succédané de café destiné à remplacer la chicorée (au centre, 1864) et de la théobromine cristallisée, un composant des graines de cacao, et donc du chocolat (à droite avec sa boîte, 1907).

■ LES AUTEURS

Edgardo D. CAROSELLA est président de la Commission des plis cachetés de l'Académie des sciences. Il a rédigé cet article avec Pierre BUSER, ancien président, en étroite collaboration avec Yves Pomeau, ancien président, Roger Balian, Yves Jeannin, Jean Normant et Jean-Paul Poirier, membres de la commission, et l'aide précieuse de Sabine Clabecq, des Archives de l'Académie des sciences.

■ À ÉCOUTER

Jeudi 26 septembre, Edgardo Carosella et Sabine Clabecq reviendront sur les nombreux trésors que recèlent les plis cachetés dans l'émission *La marche des sciences*, sur France Culture. www.franceculture.fr

■ BIBLIOGRAPHIE

J. Peiffer, Jacob Bernoulli, maître et rival de son frère Johann, *Journ@l'Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 2, n° 1, juin 2006.

P. Berthon, *Les plis cachetés de l'Académie des sciences*, *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. 39, pp. 71-78, 1986.

presque jamais ces questions, leur préférant des sujets techniques ou appliqués. Est-ce le fruit du hasard ? L'appartenance socioculturelle des déposants a-t-elle été déterminante ? Aucune réponse évidente n'apparaît à l'étude des plis.

La motivation du dépôt n'est pas plus simple. On évoque celui qui veut flatter son ego en lançant, un peu comme une bouteille à la mer, ses idées qu'il estime nouvelles en direction d'une assemblée de haute compétence, avec le secret espoir (même à peine conscient) qu'il sera lu et, qui sait, immortalisé. Ou encore le savant reconnu qui souhaite mettre à l'abri, de manière plus formelle que dans ses dossiers personnels, des idées préliminaires ou des résultats encore douteux ; leur confirmation ou invalidation ultérieure lui ôte en général tout intérêt à demander l'ouverture de son pli.

Certains ont peut-être obéi à des impératifs plus concrets et matériels, en considérant que leur pli serait un élément décisif dans une future campagne de candidatures. D'autres se sont juste fait plaisir, en déposant, dans le sein d'une assemblée d'experts accueillante, un projet dont ils n'auraient su que faire. D'autres enfin se sont tournés vers l'Académie parce que leur manuscrit avait été refusé pour publication. Peut-être existe-t-il d'autres motifs encore. Entre une mise au secret utilisée comme moyen et une démarche gratuite, presque ludique, dont la finalité est difficile à cerner, connaissons-nous jamais la vérité ou, mieux, les vérités ? ■

LOGIQUE & CALCUL

Les pavages pentagonaux : une classification qui s'améliore

L'énumération des pavés convexes pentagonaux a plusieurs fois été proposée. À chaque fois, elle s'est révélée incomplète. Heureusement, les amateurs s'en mêlent.

Jean-Paul DELAHAYE

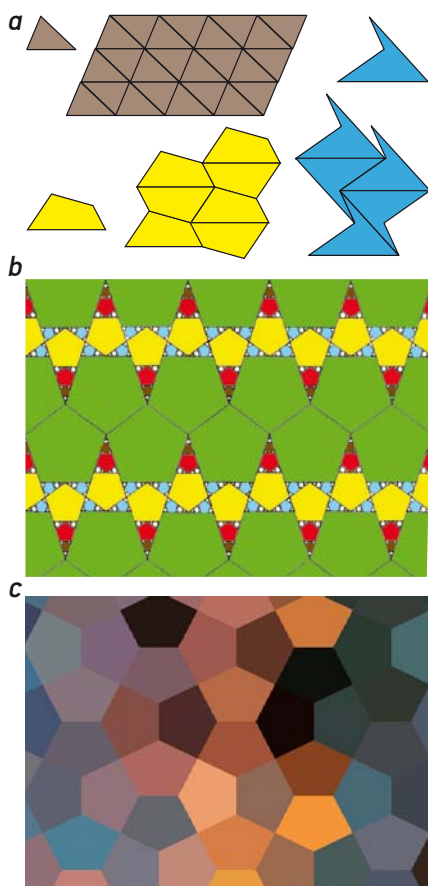
Des énumérations de figures qui n'en finissent pas ; les travaux d'une mère au foyer qui perturbent les certitudes des mathématiciens professionnels ; un chercheur japonais qui progresse dans l'étude de l'énigme fondamentale des pentagones, mais ne parvient pas à la résoudre ; un passionné de casse-tête qui écrit un programme et améliore les résultats dans un domaine où, pourtant, de nombreux chercheurs ont tenté tout leur possible ; une infinité de figures optimales là où on n'en attendait qu'une seule. Voilà ce que réserve l'histoire et l'actualité de la géométrie des pavages pentagonaux.

Trois, quatre ou cinq côtés

Les pavages du plan par des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones réguliers sont familiers. Le fait que n'importe quel triangle et n'importe quel quadrilatère (convexe ou non) pavent parfaitement le plan (voir la figure 1a) l'est un peu moins. Une question vient immédiatement à l'esprit : et pour cinq côtés ? Autrement dit : peut-on paver le plan avec des pentagones, et si oui, comment ?

Pour le pentagone régulier – cinq côtés égaux, cinq angles égaux –, on y arrive... en acceptant de prendre des pavés de tailles de plus en plus réduites (voir la figure 1b).

Nous nous interdirons cette astuce, car tout serait alors sans intérêt : on montre que n'importe quelle forme pave aussi le



1. ON PEUT PAVER LE PLAN (sans laisser de trous) avec n'importe quel triangle ou quadrilatère, convexe ou non [a]. Avec des pentagones réguliers, c'est possible, à condition d'accepter une infinité de tailles différentes [b]. Le « pavage du Caire » est obtenu avec un pentagone équilatéral [c].

plan quand on accepte d'en prendre des copies de différentes tailles.

En cherchant à paver le plan avec des pentagones réguliers de même taille, on échoue. En effet, les angles intérieurs du pentagone font 108° ($180^\circ - 360^\circ/5$) ; il est donc impossible de placer un nombre entier de pentagones réguliers autour d'un point : en plaçant trois pentagones autour d'un point, on obtient 324° , ce n'est pas assez ; en plaçant quatre pentagones autour d'un point, cela donne 432° , c'est trop !

Tant pis pour le pentagone régulier, il y en a bien d'autres. Les paveurs de rue égyptiens savent qu'il existe des pentagones recouvrant le plan sans laisser d'espace vide. Le « pavage du Caire » est réalisé avec un pentagone équilatéral, dont les cinq côtés sont égaux, mais pas les cinq angles (voir la figure 1c). Ce pentagone comporte deux angles de 90° et trois de 120° . C'est un pavé convexe : tout segment AB qui joint deux points A et B du pavé reste dans le pavé.

Trois questions de base

Les formes non convexes (tel le quadrilatère bleu de la figure 1a) compliquent la question des pavages du plan. Aussi, dans la plupart des problèmes, nous n'envisagerons que des pentagones convexes.

Trois types de questions principales se posent alors.

—Quels sont les pavés pentagonaux convexes qui autorisent au moins un pavage du plan ?

Les 14 classes connues de pavés convexes pentagonaux

Les pentagones convexes (par définition, une forme est convexe si le segment joignant deux de ses points ne sort jamais de F) pouvant paver parfaitement le plan semblent se ranger en 14 classes. Chaque classe est définie par des

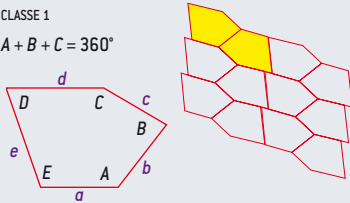
relations entre les angles et entre les longueurs des côtés. Certains pentagones appartiennent à plusieurs classes à la fois, ce qui implique qu'ils donnent plusieurs pavages différents du plan. Ces 14 classes n'ont été trouvées que

très progressivement : cinq en 1918, trois en 1968, une en 1975, quatre entre 1975 et 1984, puis enfin une en 1985. À chaque étape de ce lent processus de découverte, on a pensé que l'énumération était complète. C'est encore le cas aujourd'hui, et

la communauté mathématique attend une preuve soignée pour éviter de répéter les annonces erronées du passé. Malgré des recherches approfondies, la preuve que la liste des 14 classes est complète manque toujours.

CLASSE 1

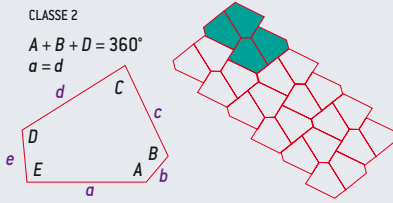
$$A + B + C = 360^\circ$$



CLASSE 2

$$A + B + D = 360^\circ$$

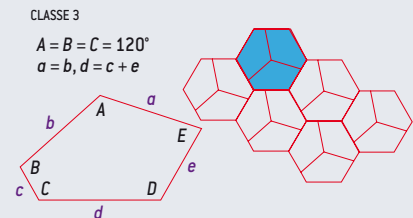
$$a = d$$



CLASSE 3

$$A = B = C = 120^\circ$$

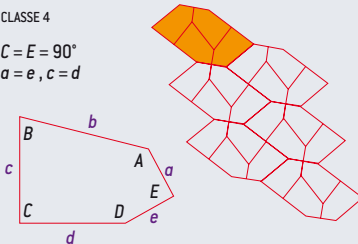
$$a = b, d = c + e$$



CLASSE 4

$$C = E = 90^\circ$$

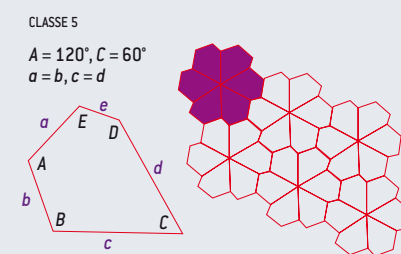
$$a = e, c = d$$



CLASSE 5

$$A = 120^\circ, C = 60^\circ$$

$$a = b, c = d$$

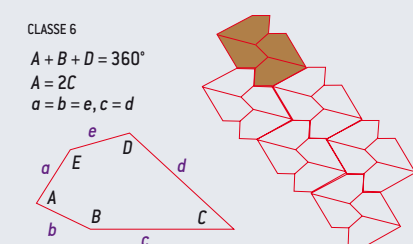


CLASSE 6

$$A + B + D = 360^\circ$$

$$A = 2C$$

$$a = b = e, c = d$$

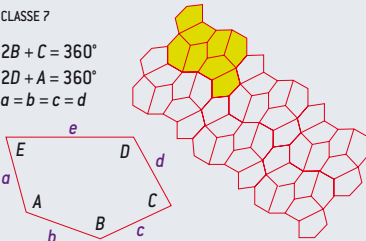


CLASSE 7

$$2B + C = 360^\circ$$

$$2D + A = 360^\circ$$

$$a = b = c = d$$

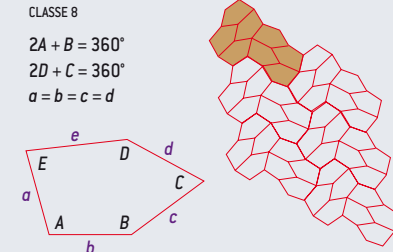


CLASSE 8

$$2A + B = 360^\circ$$

$$2D + C = 360^\circ$$

$$a = b = c = d$$

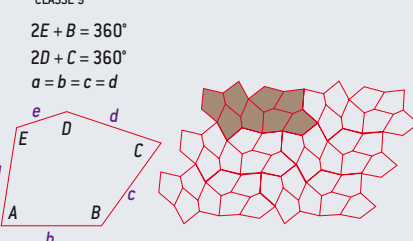


CLASSE 9

$$2E + B = 360^\circ$$

$$2D + C = 360^\circ$$

$$a = b = c = d$$



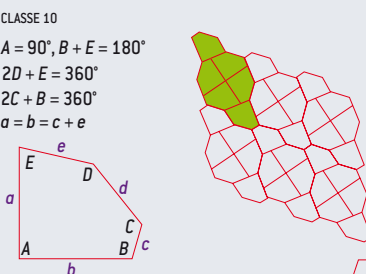
CLASSE 10

$$A = 90^\circ, B + E = 180^\circ$$

$$2D + E = 360^\circ$$

$$2C + B = 360^\circ$$

$$a = b = c + e$$

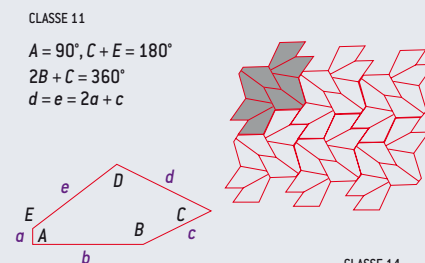


CLASSE 11

$$A = 90^\circ, C + E = 180^\circ$$

$$2B + C = 360^\circ$$

$$d = e = 2a + c$$

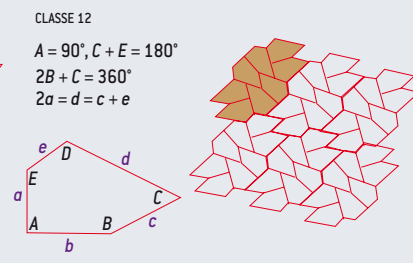


CLASSE 12

$$A = 90^\circ, C + E = 180^\circ$$

$$2B + C = 360^\circ$$

$$2a = d = c + e$$

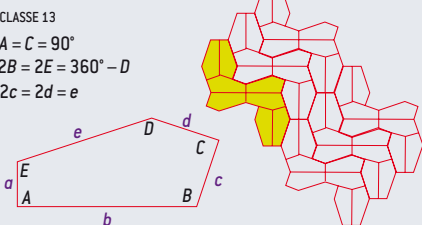


CLASSE 13

$$A = C = 90^\circ$$

$$2B = 2E = 360^\circ - D$$

$$2c = 2d = e$$



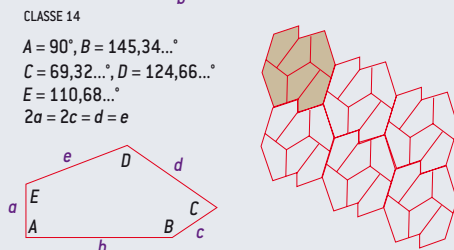
CLASSE 14

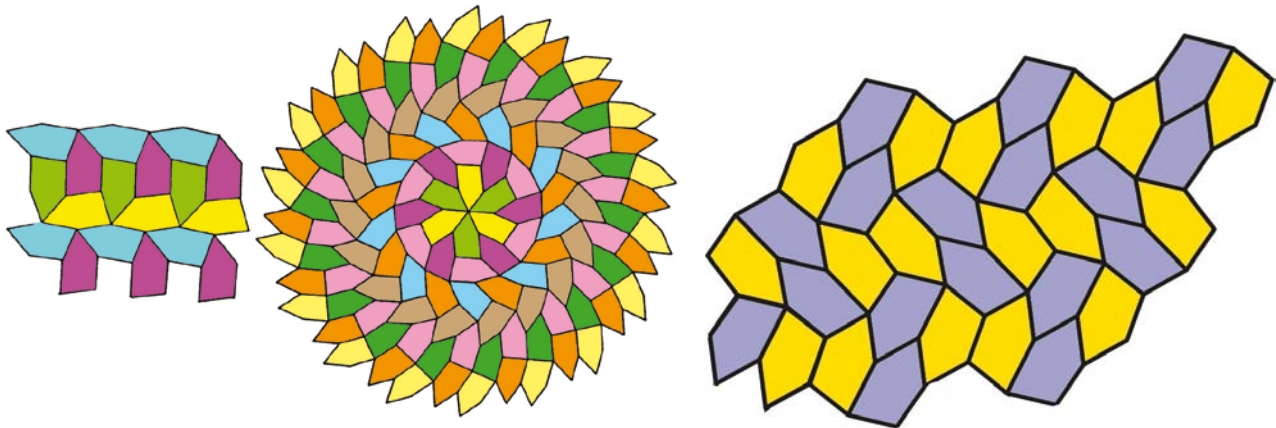
$$A = 90^\circ, B = 145,34\dots^\circ$$

$$C = 69,32\dots^\circ, D = 124,66\dots^\circ$$

$$E = 110,68\dots^\circ$$

$$2a = 2c = d = e$$





2. L'UNIQUE PENTAGONE dont les angles vérifient les relations $A + 2B = C + 2E = A + C + 2D = 360^\circ$ permet de construire plusieurs pavages différents, périodiques (comme ci-dessus à gauche) ou non (comme ci-dessus à droite).

3. DANS CE PAVAGE, tous les pavés pentagonaux mauves ont un même positionnement relatif, et il en est de même pour les pavés jaunes, mais les mauves n'ont pas le même positionnement que les jaunes. Ce pavage est dit 2-isoédrique.

— Quels sont tous les pavages du plan réalisables avec les pavés pentagonaux convexes convenables (un même pavé conduit parfois à plusieurs pavages très différents) ?

— Quels sont les pavages du plan par des pentagones convexes d'aire unité les plus économiques, c'est-à-dire ayant un périmètre aussi petit que possible ?

Aucun de ces problèmes n'est facile. Si beaucoup de résultats produisant de magnifiques figures géométriques sont connus, plusieurs n'ont été obtenus que récemment et nombreuses sont les belles énigmes qui persistent en 2013.

Erreur sur erreur !

Les mathématiciens sont têtus et sont parfois si persuadés qu'un problème est facile qu'ils croient disposer d'une solution, le disent et l'écrivent, et se trompent obstinément plusieurs fois de suite. Le problème des pavés convexes pentagonaux convenables est un exemple de cette suffisance.

En 1918, dans sa thèse soutenue à l'Université de Francfort, en Allemagne, Karl Reinhardt présente cinq classes de pentagones convexes qui pavent le plan (classes 1 à 5 de l'encadré page 79) et laisse entendre que prouver qu'il n'en existe pas d'autres est un travail fastidieux, mais facile. Pendant 50 ans, la communauté mathématique reste donc persuadée que le problème est résolu et sans intérêt.

Cependant, en 1968, Richard Kershner, de l'Université Johns Hopkins à Baltimore,

reprend l'étude plus soigneusement. Il découvre trois nouvelles classes de pentagones convexes qui pavent le plan (classes 6, 7, 8). Il écrit que c'est le manque de place qui l'empêche de détailler la preuve que les cinq classes précédentes et les trois qu'il vient de découvrir constituent la liste complète des pentagones convexes pavant le plan.

Quand, en juillet 1975, Martin Gardner présente les résultats de Kershner dans sa rubrique de jeux mathématiques du *Scientific American*, il reçoit une lettre de Richard James, informaticien californien, lui proposant une nouvelle classe (classe 10) qui montre que Kershner, comme Reinhardt avant lui, s'est trompé en croyant disposer d'une liste exhaustive.

Le plus étonnant reste à venir. L'Américaine Marjorie Rice (voir l'encadré page ci-contre), mère au foyer qui lisait le magazine de son fils, y voit l'article de Gardner relatant la découverte de R. James. Elle se met à chercher seule de nouveaux pentagones convexes pavant le plan. M. Rice ne possède aucune formation particulière en mathématiques, mais son esprit systématique et un travail minutieux mené à l'aide de petits dessins la font découvrir quatre nouvelles classes oubliées par les professionnels (les classes 9, 11, 12 et 13).

En 1985, une nouvelle classe est découverte (classe 14) par Rolf Stein, de l'Université de Dortmund. Il soutient qu'avec cette quatorzième classe, il complète définitivement l'énumération... avant qu'on découvre que sa démonstration d'exhaustivité est

fausse. Personne depuis n'a osé avancer une démonstration...

La question de savoir si ces 14 classes sont les seules n'est pas résolue depuis plus de 25 ans : ce qui semblait un problème facile est maintenant considéré comme un défi sérieux.

En 2012, le mathématicien japonais Teruhisa Sugimoto a réussi, en même temps que la mathématicienne russe Olga Bagina, à prouver qu'il existe huit classes, pas plus, de pentagones convexes convenant à des pavages « côté-contre-côté », c'est-à-dire où deux pentagones en contact se touchent soit uniquement par un sommet, soit par un côté complet pour chacun.

Ces huit classes sont celles numérotées 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans l'encadré. Les classes 3, 10, 11, 12, 13, 14 ne donnent jamais de pavages côté-contre-côté. Dans le cas de la classe 1, pour avoir des pavages côté-contre-côté, il faut ajouter la contrainte $a = d$; pour la classe 2, il faut ajouter $c = e$; tous les pentagones des classes 4 à 9 produisent des pavages côté-contre-côté sans conditions complémentaires.

Pavés équilatéraux

Un autre théorème a fait avancer nos connaissances sur les pavages pentagonaux convexes. Démontré (avec l'aide d'un ordinateur) en 1985 par Michael Hirschhorn et David Hunt, puis simplifié en 2004 par O. Bagina, le théorème stipule qu'un pentagone équilatéral pave le plan si et seulement

s'il appartient à l'une des trois catégories suivantes :

A) Deux angles adjacents ont une somme de 180° .

B) Deux angles non adjacents ont une somme de 180° .

C) Les cinq angles A, B, C, D, E vérifient les relations $A + 2B = C + 2E = A + C + 2D = 360^\circ$.

L'unique pavé de la classe C est intéressant : il permet plusieurs pavages essentiellement différents, dont certains sont non périodiques (voir la figure 2).

Pour l'instant, bien que l'on connaisse de nombreux pentagones non convexes qui pavent le plan, personne, autant que je sache, n'a proposé, même à titre de conjecture, une liste de tels pentagones qu'on puisse considérer complète.

Les trois classifications des pentagones convexes (dont deux sont définitivement établies) constituent une belle réussite et règlent presque le *Problème des pavés convexes pentagonaux convenables*. Cependant, un seul pavé est parfois utilisable de plusieurs façons pour recouvrir le plan, c'est-à-dire qu'il donne plusieurs pavages ne se ramenant pas les uns aux autres. Ainsi, les pavages de la figure 2 sont essentiellement différents, bien que construits avec le même pentagone. Sait-on classer les pavages pentagonaux convexes ? Comme pour les pavés, la réponse est double : oui dans les cas les plus contraints, non dans le cas général.

Pavages isoédriques

Le cas le plus contraint est celui où l'on impose aux pavés convexes du pavage d'être tous dans une même position les uns relativement aux autres. Pour comprendre ce que cela signifie, considérons le pavage de la figure 3, qui appartient à la classe 8 du recensement en 14 classes. Un pavé y a deux types de positionnement.

En effet, les pavés mauves n'ont pas le même positionnement que les pavés jaunes. On le voit par exemple en remarquant que les « pavés-maisons » jaunes ont sur un côté un « pavé-maison » à l'envers, alors que les « pavés-maisons » mauves n'en ont pas. En revanche, les « pavés-maisons »

Talentueuse Marjorie Rice

Certains amateurs de mathématiques réussissent parfois de véritables exploits et donnent des leçons aux professionnels. Ces professionnels avaient été insouciants vis-à-vis d'un problème, la classification des pavages de pentagones.

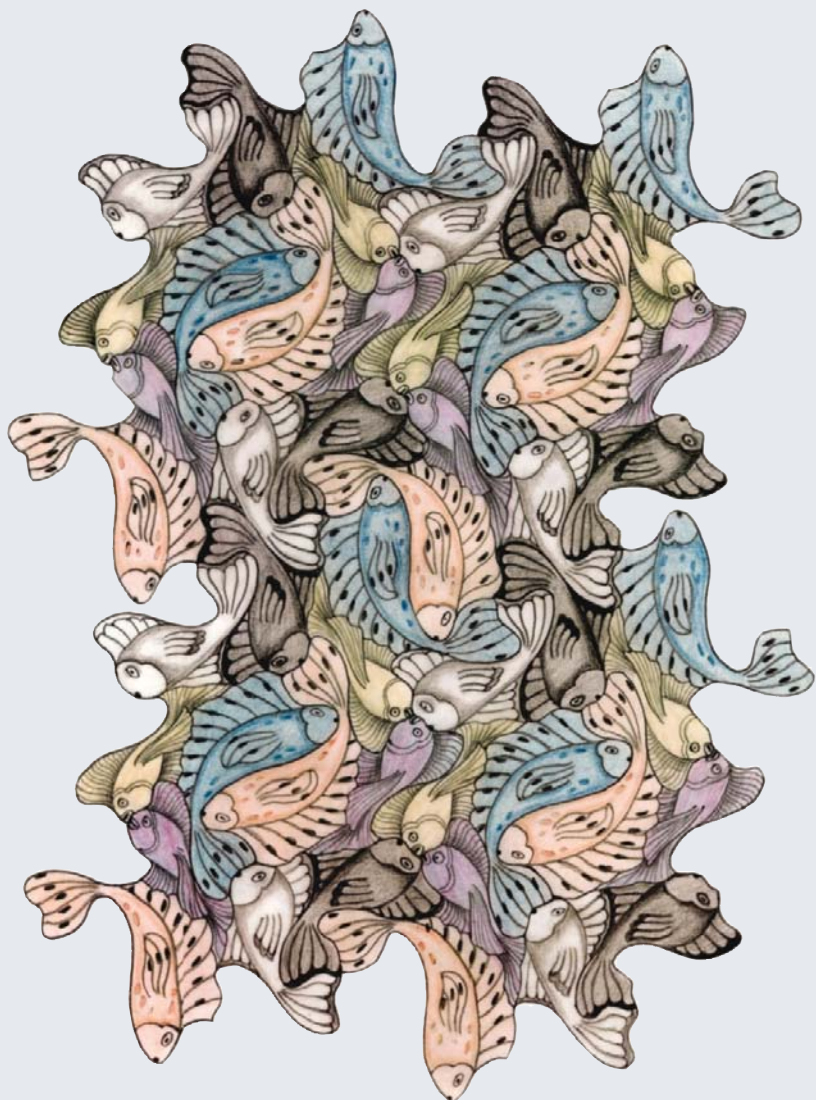
Marjorie Rice, qui a 90 ans cette année, fait partie de ces amateurs. Elle écrit :

« J'aime depuis toujours la nature, le dessin, les formes naturelles et leurs relations mathématiques. J'entrais dans le monde

des pavages, il y a 26 ans, à la suite de la lecture d'un article de Martin Gardner trouvé dans la revue *Scientific American* de mon fils. Celle-ci déclencha en moi un vif intérêt pour les pavages et il n'a pas cessé aujourd'hui. L'article présentait des pentagones pavant le plan et demandait s'il en existait d'autres. J'ai toujours aimé la casse-tête et je me dis alors qu'il était peut-être possible pour moi de trouver de nouvelles solutions. J'entrepris de développer mes propres notations qui me per-

mirent d'aborder de manière systématique le problème. » (<http://tesselations.home.comcast.net/~tesselations/>)

En plus de ces découvertes, s'inspirant des pavages décoratifs de Maurits Escher, M. Rice a dessiné ce pavage de poissons fondé sur la classe 2 de la liste des 14 classes connues de pavés pentagonaux convexes. L'enchevêtrement est ici particulièrement compliqué et difficile à déchiffrer pour celui qui ignore sa méthode de construction.



mauves ont tous des positions équivalentes, et c'est vrai aussi pour les pavés jaunes. Pour ce pavage, il y a donc deux types de positions possibles pour le pavé pentagonal : un tel pavage n'est pas isoédrique, un pavage étant isoédrique lorsqu'il n'y a qu'un seul type de position pour le pavé, ce qui est le cas pour les pavages des classes 1 à 5 représentés dans l'encadré page 79.

En termes plus techniques, un pavage isoédrique est un pavage où les isométries du plan (translations, rotations, symétries et compositions de ces transformations) laissant invariant le pavage permettent de passer d'un pavé donné à n'importe quel autre. Autrement dit, un pavage est isoédrique quand tous les pavés se valent, aux isométries du pavage près.

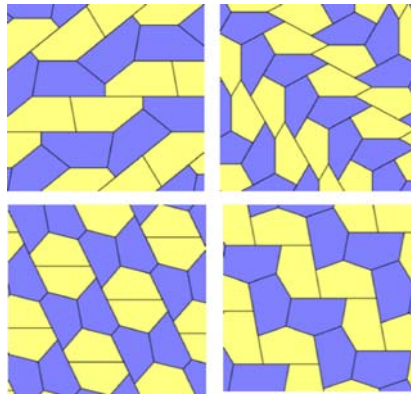
Un beau et difficile théorème, démontré par Branko Grünbaum et Geoffrey Shephard en 1977, indique qu'il existe :

- 14 catégories de pavages isoédriques par des triangles,
- 56 pour des quadrilatères convexes,
- 24 pour des pentagones convexes
- et 13 pour les hexagones convexes.

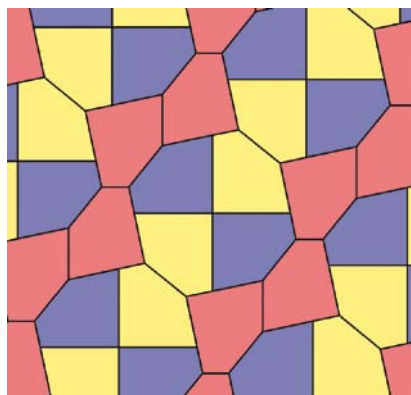
On sait par ailleurs, d'après un résultat démontré la même année par Ivan Niven, qu'il n'existe aucun pavage par un polygone convexe à k côtés lorsque $k > 6$. Cela règle définitivement la classification des pavages isoédriques par des polygones convexes : il existe 107 types de tels pavages.

Lorsqu'un pavage comporte deux types de positionnements de pavés, comme celui de la figure 3, on dit que le pavage est 2-isoédrique. Trouver toutes les catégories de pavages 2-isoédriques par des pentagones convexes est un problème difficile. C'est encore un amateur qui a, le premier, proposé une solution. Tout récemment, en programmant soigneusement une recherche systématique, le Néerlandais Jaap Scherphuis (qui est aussi un collectionneur passionné de casse-tête, voir www.jaapsch.net/puzzles/) a trouvé 97 classes de pavages par des pentagones convexes 2-isoédriques (voir la figure 4 pour quatre d'entre eux).

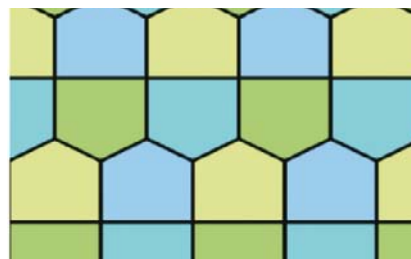
La liste de 97 pavages, qu'on trouvera sur www.jaapsch.net/tilings/, ne contient que des pavages où la proportion des pavés d'une couleur est égale à celle de l'autre



4. QUATRE PAVAGES 2-ISOÉDRIQUES
réalisés avec un pentagone convexe.



5. UN PAVAGE 3-ISOÉDRIQUE
réalisé avec un pentagone convexe.



6. LES DEUX SOLUTIONS DE BASE
pour un pavage pentagonal optimal.

couleur. Même si cela semble improbable, il se pourrait qu'il existe des pavages où ces proportions ne sont pas identiques. Si c'est le cas, l'énumération des 97 pavages de J. Scherphuis devra être complétée. Les résultats de cet amateur attendent confirmation. Qui saura démontrer que la liste des 97 pavages 2-isoédriques est complète ?

Il existe aussi des pavages 3-isoédriques du plan par des pentagones convexes : le pavé peut occuper trois types de positions différentes. C'est le cas du pavage, associé à la classe 10, représenté sur la figure 5. J. Scherphuis en propose bien d'autres.

Une énumération complète de toutes les classes de pavages pentagonaux convexes (isoédriques, 2-isoédriques, 3-isoédriques, etc.) est un objectif qui apparaît pour l'instant hors de portée. Quand on aura réussi, il restera encore à envisager les pentagones non convexes. Voilà de quoi occuper les amateurs et les professionnels pour de longues années.

Pavages optimaux

La troisième question centrale relative aux pavages pentagonaux est d'une nature un peu différente et, cette fois, elle est presque totalement résolue. Il s'agit du problème des pavages pentagonaux optimaux.

Les abeilles sont géomètres et ont choisi la forme de leurs alvéoles en utilisant un résultat mathématique qui n'a été démontré que récemment. Selon la conjecture des alvéoles d'abeilles, l'hexagone régulier d'aire unité est le polygone d'aire unité qui donne le pavage du plan le plus économique en longueur de périmètre. Cette affirmation, dont on trouve des traces chez le Romain Marcus Terentius Varro en 36 avant notre ère, semble presque évidente. Elle ne l'est pas du tout et n'a été démontrée qu'en 1999 par l'Américain Thomas Hales, connu aussi pour sa preuve de la conjecture de Kepler sur les empilements les plus denses de sphères.

Si l'on s'impose de ne considérer que des pavages par des pentagones d'aire unité, se pose une question naturelle de même nature que celle résolue par Th. Hales : quel est le pavage optimal par des pentagones ? (Les

Une infinité de pavages pentagonaux optimaux

Si l'on veut paver le plan par des polygones d'aire unité et de périmètre aussi petit que possible, la solution est le pavage par des hexagones réguliers, comme les alvéoles d'une ruche. Cette optimalité du pé-

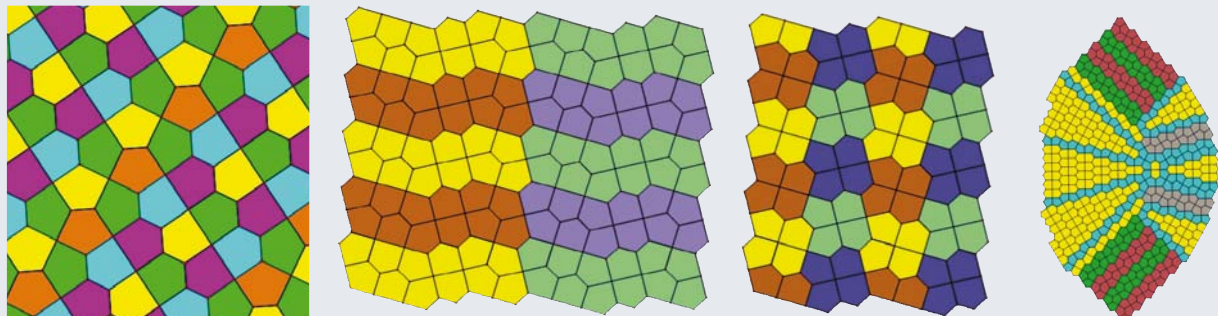
rimètre a été démontrée en 1999 par Thomas Hales.

Si l'on impose au pavé recherché d'être pentagonal, alors la solution est double. Le pavé optimal est soit une variante du pentagone

du Caire, soit le pentagone en forme de petite maison décrit dans l'article. Le plus étonnant est que ces deux pentagones optimaux se combinent d'une infinité de façons différentes, conduisant à des pavages

pentagonaux optimaux d'une remarquable variété.

Voici quatre de ces compositions optimales découvertes il y a trois ans par Ping Ngai Chung, du MIT, et ses collègues.



abeilles auraient dû résoudre cette question si les hexagones leur étaient interdits !).

La réponse a été publiée en 2012 par une équipe de mathématiciens réunis autour de Ping Ngai Chung, du MIT. Il y a une surprise : il existe plusieurs solutions optimales, alors qu'on n'en attendait qu'une seule.

Si l'on impose à tous les pavés du pavage d'avoir la même forme, il y a deux solutions (voir la figure 6) : une variante du pavage pentagonal du Caire et une variante du pavage pentagonal prismatique (cas particulier de la classe 1).

Le périmètre, pour une aire unité, de chacun de ces deux pavés est égal à : $2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 3,86$. C'est mieux que le périmètre d'un carré d'aire unité, qui est 4, mais c'est bien sûr un peu moins bien que le périmètre d'un hexagone régulier d'aire unité, qui est 3,81 (et qui, d'après le théorème de Hales, ne peut pas être battu).

Précisons que pour que les pavés pentagonaux soient optimaux, il faut prendre les longueurs des côtés des pentagones de manière à ce que ces derniers contiennent un cercle inscrit. Cela signifie en pratique qu'il faut introduire trois constantes pour décrire ces pentagones. La variante optimale du pentagone du Caire a un petit côté de longueur a , ses quatre autres côtés étant de longueur b . La variante optimale du pavage

prismatique est telle que la longueur des côtés formant le toit est a , celle des murs est b et celle de la base est c , et tout cela avec : $a = (2/3)\sqrt{6-3\sqrt{3}} = 0,5977\dots$, $b = (3+\sqrt{3})(\sqrt{2-\sqrt{3}})/3 = 0,8165\dots$, $c = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1,0353\dots$

Ce qui a le plus surpris les chercheurs est que ces deux pavés optimaux se combinent et donnent d'autres pavages optimaux utilisant cette fois les deux formes pentagonales optimales dans des proportions variables. La variété des combinaisons est étonnante.

Concernant ce beau résultat, signalons que la démonstration proposée suppose que les pavés sont convexes. Tout le monde est persuadé qu'un pavé pentagonal non convexe ne peut pas faire mieux que les deux pavés trouvés (et leurs associations), mais cela n'est pas démontré.

Les recherches sur les pavages sont pleines de pièges. Qu'il ait fallu attendre 1999 pour que l'on démontre la sagesse instinctive des abeilles, qu'on ait pu se tromper si souvent sur l'énumération des classes de pentagones convexes (dont on n'a pas démontré qu'elle était complète), qu'on ne puisse énumérer les pavages pentagonaux non convexes, ou non isoédriques, voilà de quoi encourager l'humilité des mathématiciens, qu'ils soient amateurs patients, programmeurs experts ou théoriciens acharnés.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Scherphuis, *Tilings*, 2013 : <http://www.jaapsch.net/tilings/>

M. Rice, *Tessellations*, 2013 : <http://home.comcast.net/~tessellations/index.htm>

P. N. Chung *et al.*, *Isoperimetric pentagonal tilings*, *Notices of the AMS*, vol. 59(5), pp. 632-649, 2012.

Th. Hales, *The honeycomb conjecture*, *Discrete and Computational Geometry*, vol. 25, pp. 1-22, 2001.

B. Grünbaum et G. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Company, 1987.

D. Schattschneider, *Tiling the plane with congruent pentagons*, *Mathematics Magazine*, vol. 51, pp. 29-44, 1978.

SCIENCE & FICTION

Menaces invisibles

Les bactéries et les virus sont des micro-organismes invisibles à l'œil nu, mais dont les conséquences sont parfois dramatiques. Rien de tel pour stimuler les imaginations !

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Quand la science-fiction met en scène l'extinction de l'espèce humaine, elle n'invoque pas uniquement le débarquement d'une armada extraterrestre, mais aussi l'invasion par des tueurs microscopiques, bactéries ou virus. Ainsi, le roman *World War Z* de Max Brooks (2006), récemment adapté au cinéma, met en scène un mystérieux virus transformant les humains en zombies. Dans notre monde, ces tueurs existent réellement et leur taille ne limite en rien leur capacité de destruction massive.

Le terme « bactérie » apparaît dans la littérature en 1828 avec le microbiologiste allemand Christian Ehrenberg. Ce dernier levait le voile sur un règne dont la masse est supérieure à celle de toutes les autres espèces vivantes ! Les bactéries sont les premières formes de vie apparues sur Terre et sont présentes partout : dans l'eau, l'air, le sol ou la glace. L'organisme humain héberge même dix fois plus de bactéries que de cellules : il y en aurait sans doute quelques milliers d'espèces, et elles pèsent environ un kilogramme chez un adulte ! Omniprésentes, elles sont aussi très résistantes : beaucoup sont extrémophiles, capables de résister à des conditions extrêmes de température, pression, salinité ou acidité.

Deinococcus radiodurans, par exemple, résiste au dessèchement, aux rayonnements ultraviolets et ionisants, au vide ou encore à l'acide, et ce grâce à sa structure cellulaire particulière et à son système très efficace de réparation de l'ADN. Elle supporte aussi

des doses de radioactivité 5 000 fois supérieures à celles qui tuent une cellule humaine.

Pourquoi s'intéresser aux bactéries ? Parce que certaines d'entre elles sont très dangereuses pour l'homme, comme l'ont montré pour la première fois Louis Pasteur et Robert Koch dès la seconde moitié du XIX^e siècle. Certaines bactéries sont responsables de graves maladies infectieuses, et avant l'invention des antiseptiques, désinfectants et antibiotiques, les bactéries faisaient des ravages. D'ailleurs, bien avant que leur nature réelle soit connue, elles furent utilisées comme arme de destruction massive : lors du siège de Caffa – aujourd'hui Féodosie, cité ukrainienne au Nord de la mer Noire – en 1346, l'armée tatare, alors atteinte d'une grave épidémie, catapulta les cadavres de ses soldats derrière les murs de la cité assiégée. Et avec eux *Yersinia pestis*, minuscule bacille (bactérie en forme de bâtonnet) responsable de la peste noire. Le bacille tua près de la moitié de l'Europe – 25 millions de personnes – entre 1347 et 1352.

Dans le *Retour du Roi*, troisième tome du *Seigneur des Anneaux* de J. R. R. Tolkien (1955), les Orques emploient la même technique en bombardant Minas Tirith de divers projectiles, dont les têtes de leurs victimes décapitées par leurs lames empoisonnées, alliant ainsi guerre bactériologique et psychologique. Héritée de la guerre froide, cette attirance mêlée de crainte pour les bactéries est d'autant plus marquée que ces micro-organismes peuvent vite échapper à tout contrôle ou tomber entre de mauvaises mains.



1. DANS LE FILM WORLD WAR Z, un virus rend violentes les personnes qu'il contamine. Les victimes de cette pandémie deviennent des tueurs. Jusqu'au moment où Brad Pitt décide de s'attaquer à la cause du mal...