

Une infinité de pavages pentagonaux optimaux

Si l'on veut paver le plan par des polygones d'aire unité et de périmètre aussi petit que possible, la solution est le pavage par des hexagones réguliers, comme les alvéoles d'une ruche. Cette optimalité du pé-

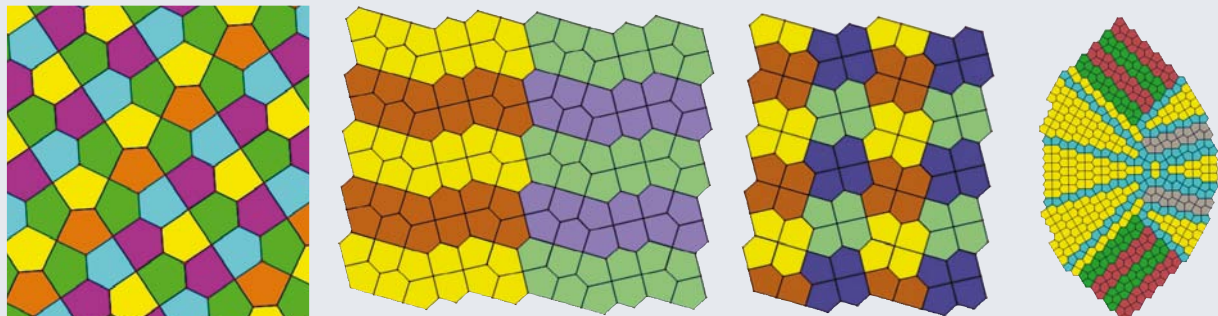
rimètre a été démontrée en 1999 par Thomas Hales.

Si l'on impose au pavé recherché d'être pentagonal, alors la solution est double. Le pavé optimal est soit une variante du pentagone

du Caire, soit le pentagone en forme de petite maison décrit dans l'article. Le plus étonnant est que ces deux pentagones optimaux se combinent d'une infinité de façons différentes, conduisant à des pavages

pentagonaux optimaux d'une remarquable variété.

Voici quatre de ces compositions optimales découvertes il y a trois ans par Ping Ngai Chung, du MIT, et ses collègues.



abeilles auraient dû résoudre cette question si les hexagones leur étaient interdits !).

La réponse a été publiée en 2012 par une équipe de mathématiciens réunis autour de Ping Ngai Chung, du MIT. Il y a une surprise : il existe plusieurs solutions optimales, alors qu'on n'en attendait qu'une seule.

Si l'on impose à tous les pavés du pavage d'avoir la même forme, il y a deux solutions (voir la figure 6) : une variante du pavage pentagonal du Caire et une variante du pavage pentagonal prismatique (cas particulier de la classe 1).

Le périmètre, pour une aire unité, de chacun de ces deux pavés est égal à : $2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 3,86$. C'est mieux que le périmètre d'un carré d'aire unité, qui est 4, mais c'est bien sûr un peu moins bien que le périmètre d'un hexagone régulier d'aire unité, qui est 3,81 (et qui, d'après le théorème de Hales, ne peut pas être battu).

Précisons que pour que les pavés pentagonaux soient optimaux, il faut prendre les longueurs des côtés des pentagones de manière à ce que ces derniers contiennent un cercle inscrit. Cela signifie en pratique qu'il faut introduire trois constantes pour décrire ces pentagones. La variante optimale du pentagone du Caire a un petit côté de longueur a , ses quatre autres côtés étant de longueur b . La variante optimale du pavage

prismatique est telle que la longueur des côtés formant le toit est a , celle des murs est b et celle de la base est c , et tout cela avec : $a = (2/3)\sqrt{6-3\sqrt{3}} = 0,5977\dots$, $b = (3+\sqrt{3})(\sqrt{2-\sqrt{3}})/3 = 0,8165\dots$, $c = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1,0353\dots$

Ce qui a le plus surpris les chercheurs est que ces deux pavés optimaux se combinent et donnent d'autres pavages optimaux utilisant cette fois les deux formes pentagonales optimales dans des proportions variables. La variété des combinaisons est étonnante.

Concernant ce beau résultat, signalons que la démonstration proposée suppose que les pavés sont convexes. Tout le monde est persuadé qu'un pavé pentagonal non convexe ne peut pas faire mieux que les deux pavés trouvés (et leurs associations), mais cela n'est pas démontré.

Les recherches sur les pavages sont pleines de pièges. Qu'il ait fallu attendre 1999 pour que l'on démontre la sagesse instinctive des abeilles, qu'on ait pu se tromper si souvent sur l'énumération des classes de pentagones convexes (dont on n'a pas démontré qu'elle était complète), qu'on ne puisse énumérer les pavages pentagonaux non convexes, ou non isoédriques, voilà de quoi encourager l'humilité des mathématiciens, qu'ils soient amateurs patients, programmeurs experts ou théoriciens acharnés.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Scherphuis, *Tilings*, 2013 : <http://www.jaapsch.net/tilings/>

M. Rice, *Tessellations*, 2013 : <http://home.comcast.net/~tessellations/index.htm>

P. N. Chung *et al.*, *Isoperimetric pentagonal tilings*, *Notices of the AMS*, vol. 59(5), pp. 632-649, 2012.

Th. Hales, *The honeycomb conjecture*, *Discrete and Computational Geometry*, vol. 25, pp. 1-22, 2001.

B. Grünbaum et G. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Company, 1987.

D. Schattschneider, *Tiling the plane with congruent pentagons*, *Mathematics Magazine*, vol. 51, pp. 29-44, 1978.

SCIENCE & FICTION

Menaces invisibles

Les bactéries et les virus sont des micro-organismes invisibles à l'œil nu, mais dont les conséquences sont parfois dramatiques. Rien de tel pour stimuler les imaginations !

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Quand la science-fiction met en scène l'extinction de l'espèce humaine, elle n'invoque pas uniquement le débarquement d'une armada extraterrestre, mais aussi l'invasion par des tueurs microscopiques, bactéries ou virus. Ainsi, le roman *World War Z* de Max Brooks (2006), récemment adapté au cinéma, met en scène un mystérieux virus transformant les humains en zombies. Dans notre monde, ces tueurs existent réellement et leur taille ne limite en rien leur capacité de destruction massive.

Le terme « bactérie » apparaît dans la littérature en 1828 avec le microbiologiste allemand Christian Ehrenberg. Ce dernier levait le voile sur un règne dont la masse est supérieure à celle de toutes les autres espèces vivantes ! Les bactéries sont les premières formes de vie apparues sur Terre et sont présentes partout : dans l'eau, l'air, le sol ou la glace. L'organisme humain héberge même dix fois plus de bactéries que de cellules : il y en aurait sans doute quelques milliers d'espèces, et elles pèsent environ un kilogramme chez un adulte ! Omniprésentes, elles sont aussi très résistantes : beaucoup sont extrémophiles, capables de résister à des conditions extrêmes de température, pression, salinité ou acidité.

Deinococcus radiodurans, par exemple, résiste au dessèchement, aux rayonnements ultraviolets et ionisants, au vide ou encore à l'acide, et ce grâce à sa structure cellulaire particulière et à son système très efficace de réparation de l'ADN. Elle supporte aussi

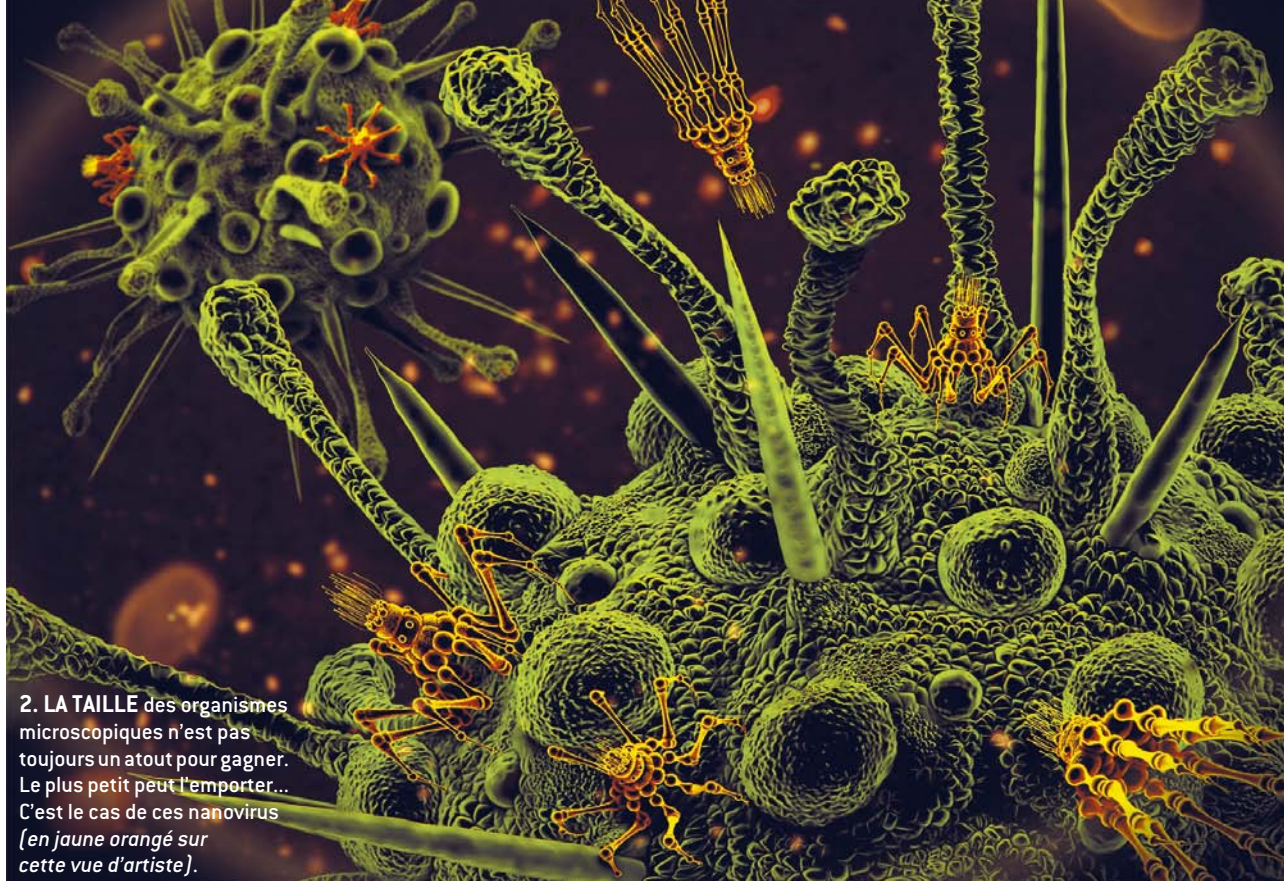
des doses de radioactivité 5 000 fois supérieures à celles qui tuent une cellule humaine.

Pourquoi s'intéresser aux bactéries ? Parce que certaines d'entre elles sont très dangereuses pour l'homme, comme l'ont montré pour la première fois Louis Pasteur et Robert Koch dès la seconde moitié du XIX^e siècle. Certaines bactéries sont responsables de graves maladies infectieuses, et avant l'invention des antiseptiques, désinfectants et antibiotiques, les bactéries faisaient des ravages. D'ailleurs, bien avant que leur nature réelle soit connue, elles furent utilisées comme arme de destruction massive : lors du siège de Caffa – aujourd'hui Féodosie, cité ukrainienne au Nord de la mer Noire – en 1346, l'armée tatar, alors atteinte d'une grave épidémie, catapulta les cadavres de ses soldats derrière les murs de la cité assiégée. Et avec eux *Yersinia pestis*, minuscule bacille (bactérie en forme de bâtonnet) responsable de la peste noire. Le bacille tua près de la moitié de l'Europe – 25 millions de personnes – entre 1347 et 1352.

Dans le *Retour du Roi*, troisième tome du *Seigneur des Anneaux* de J. R. R. Tolkien (1955), les Orques emploient la même technique en bombardant Minas Tirith de divers projectiles, dont les têtes de leurs victimes décapitées par leurs lames empoisonnées, alliant ainsi guerre bactériologique et psychologique. Héritée de la guerre froide, cette attirance mêlée de crainte pour les bactéries est d'autant plus marquée que ces micro-organismes peuvent vite échapper à tout contrôle ou tomber entre de mauvaises mains.



1. DANS LE FILM *WORLD WAR Z*, un virus rend violentes les personnes qu'il contamine. Les victimes de cette pandémie deviennent des tueurs. Jusqu'au moment où Brad Pitt décide de s'attaquer à la cause du mal...



2. LA TAILLE des organismes microscopiques n'est pas toujours un atout pour gagner. Le plus petit peut l'emporter... C'est le cas de ces nanovirus [en jaune orangé sur cette vue d'artiste].

Mais les virus sont encore, plus que les bactéries, les héros d'un genre à part entière, la science-fiction « horrifique » ou « apocalyptique » : dans *L'Armée des douze singes* (Terry Gilliam, 1995), les survivants d'une terrible pandémie envoient des prisonniers dans leur passé pour tenter de trouver l'antidote. En 1978, Stephen King met en scène dans *Le Fléau* un virus échappé d'une base de recherches de l'armée américaine et qui répand la mort.

Généralement plus petit qu'une bactérie, un virus est une entité dépourvue de noyau dont la capacité de reproduction et d'évolution est foudroyante. Mais, contrairement à une bactérie, un virus ne peut se reproduire de façon autonome. Il pénètre dans sa victime et détourne sa machinerie biologique à son profit et s'y multiplie. De surcroît, les virus peuvent rester dans un état de latence, durant lequel ils sont inoffensifs, se transmettre par l'intermédiaire des fluides vitaux – sang, salive ou sperme –, se propager et se « réveiller » brusquement. Ces scénarios intéressent les auteurs de science-fiction, par exemple dans *Alerte !* (W. Petersen, 1995) – où le virus mis en cause rappelle étrangement *Ebola* – ou *Contagion* (S. Soderbergh, 2011) qui traite surtout de la panique mondiale se propageant plus vite que le virus !

La fiction se nourrit de la réalité, mais certains faits divers dépassent la fiction. Ainsi, durant l'été 1999, un New-Yorkais rentre de voyage, ignorant qu'il a été piqué par un mous-

tique porteur d'un virus très dangereux, le virus du Nil occidental. Après avoir gagné le Queens, la souche partira, pour la première fois de son histoire, à l'assaut de l'Occident. Dans 80 pour cent des cas, le virus du Nil s'installe *incognito* dans l'organisme, créant une infection dite asymptomatique. Dans les 20 pour cent qui restent, les sujets souffrent de diverses infections, d'une pseudogrippe jusqu'à la liquéfaction de l'encéphale... Quant aux sujets infectés dans le film *28 jours plus tard*, ils se transforment quasi instantanément en zombies hyperactifs.

Un rôle dans l'évolution ?

Aujourd'hui, virus et science-fiction nous rappellent qu'*Homo sapiens* est avant tout *Homo vulnerabilis*, et que des virus apparaissent tous les jours, les plus connus étant le VIH, responsable du sida et apparu à la fin des années 1970, et H5N1, virus de la grippe aviaire, à l'honneur en 2004, car on craignait une pandémie. Enfin, les virus ne connaissent aucune frontière : la grippe de 1918, dite grippe espagnole, a été déclenchée par une souche particulièrement virulente et contagieuse qui s'est répandue dans le monde entier. Cette pandémie a fait au moins 30 millions de morts selon l'Institut Pasteur ; ce fut la plus mortelle de l'histoire en un laps de temps si court.

Quels sont les liens évolutifs entre l'homme et ces micro-organismes patho-

gènes ? Certains biologistes se demandent si notre espèce (et bien d'autres) ne serait pas apparue au cours de l'évolution... uniquement pour servir de support aux bactéries et aux virus ! Une idée qui se rapproche de celle du film *Phénomènes* (M. Night Shyamalan, 2008) où, pour se défendre contre les humains, les plantes développent un virus qui les pousse à se suicider en masse.

Ce concept de planète vivante capable d'autoréguler ses habitants est issu de l'hypothèse Gaïa, que le Britannique James Lovelock proposa en 1974. Il suggérait que la Terre est une sorte de superorganisme au sein duquel nous habiterions – un peu comme les bactéries et nous. Cela n'est pas sans rappeler *Matrix*, quand l'agent Smith dit à Morpheus retenu prisonnier : « Les humains s'installent pour se multiplier jusqu'à épuiser les ressources naturelles de l'endroit où ils vivent et leur seul espoir de survie, c'est de se déplacer jusqu'à un autre endroit. Il y a d'autres organismes sur la Terre qui ont adopté la même méthode, savez-vous lesquels ? Les virus. Les humains sont une maladie contagieuse, le cancer de la planète, ils sont la peste, et nous sommes le remède. » ■

J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.

Retrouvez les articles de J.-S. Steyer et R. Lehoucq sur www.pourlascience.fr



ART & SCIENCE

Le crochet, le corail et la géométrie

La forme du corail est l'une des manifestations de la géométrie hyperbolique. L'un des seuls moyens de représenter concrètement les espaces correspondant à cette géométrie est une activité surannée : le crochet.

Loïc MANGIN

Le crochet a mauvaise réputation : cet avatar de la dentelle ne serait pratiqué que par des femmes, plutôt âgées, réunies dans des clubs. Cette image désuète est fautive, au moins en partie. Depuis quelques années, l'art du crochet est redevenu à la mode et l'on ne compte plus les blogs dédiés. Mieux, de la science se cache dans ces ouvrages en mailles qui ornent les fauteuils et le dessus des téléviseurs.

Cet aspect a été exploré en 2005 par Margaret et Christine Wertheim, fondatrices de l'*Institute for Figuring* (IFF), à Los Angeles. Cette institution promeut l'esthétique et les dimensions poétiques de la science et des mathématiques sans recourir à la manipulation de concepts abstraits.

Leur premier projet, nommé *Crochet coral reef*, fut la confection en crochet d'un récif corallien ! L'idée semble saugrenue, elle est pourtant pertinente. Voyons pourquoi. Dans le monde vivant, beaucoup de formes sont crénelées, dentelées, frisées... Citons les algues, les feuilles de laitue, les limaces de mer... et les coraux. Ces surfaces relèvent de la géométrie hyperbolique, l'un des trois types de géométries qui existent.

Une façon de les décrire est fondée sur le postulat des parallèles. Selon Euclide, par un point extérieur à une droite donnée ne passe qu'une parallèle à cette droite. Pendant quelque 2 000 ans, on a tenu ce postulat pour incontournable. Pourtant, au XIX^e siècle, des mathématiciens (Riemann, Lobatchevski...) s'en sont

affranchis. Dans la géométrie sphérique, le nombre de parallèles à une droite donnée est nul ; dans la géométrie hyperbolique, il est infini.

Ainsi, depuis des millions d'années, des organismes exhibent, souvent avec moult couleurs, des concepts découverts il y a moins de 200 ans ! Cependant, alors que les géométries euclidienne et sphérique sont facilement modélisables par un objet physique, respectivement un plan et la surface d'un ballon, la géométrie hyperbolique a longtemps résisté aux tentatives. L'idée est de représenter graphiquement et de façon cohérente une géométrie et ses propriétés.

Depuis des millions d'années, des organismes vivants exposent en couleurs des concepts découverts il y a moins de 200 ans.

Pour la géométrie hyperbolique, la difficulté est telle que beaucoup en ont conclu que cette représentation était impossible.

Plusieurs modèles ont certes été proposés, par exemple celui de Klein-Beltrami et le disque de Poincaré (plusieurs œuvres d'Escher sont fondées sur cette représentation), mais ils restaient trop conceptuels. Le mathématicien William Thurston avait créé un modèle en papier, mais il était très fragile. Puis, en 1997, Daina Taimina, mathématicienne à l'Université Cornell, montra que le crochet pouvait relever le défi.

De fait, le principe du crochet, selon lequel on augmente progressivement le nombre

de mailles des rangs, coïncide avec une propriété de la géométrie hyperbolique : la circonférence d'un cercle augmente de façon linéaire avec le rayon sur un plan euclidien, mais de façon exponentielle sur un plan hyperbolique. Ainsi, la géométrie hyperbolique, dont le corail est une des représentations, peut être confectionnée au crochet !

Plus encore, selon la règle suivie, on obtient des modèles différents. Par exemple, on augmente d'une maille à chaque rang dans la figure *b* et tous les trois rangs dans la figure *c*. La figure *d* montre des droites (*en jaune*) cousues sur un plan hyperbolique.

Le projet de l'IFF a commencé par une petite annonce pour recruter des « crocheteurs ». Il a pris de l'ampleur et rassemble aujourd'hui des milliers de participants de par le monde. Le musée Andy Warhol, de Pittsburg, en Pennsylvanie, fut parmi les premiers intéressés par le projet : l'institution exposa un premier récif corallien en laine (*voir la figure a*) dans le cadre de son exposition consacrée au réchauffement climatique.

Puis ce fut Chicago, où une galerie de 300 mètres carrés fut remplie, ensuite New York, Londres... Aujourd'hui, le résultat de cette œuvre participative est visible à Denver et à Copenhague. À chaque fois, une antenne locale de l'IFF est créée afin de fédérer les bonnes volontés de la région. Le *Crochet coral reef* est sans doute devenu l'un des plus grands projets associant l'art et la science. ■