

7. Les rideaux fractals

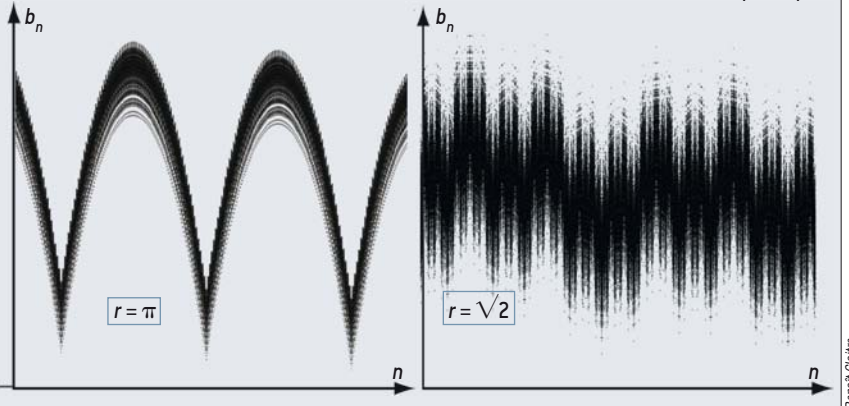
Un procédé inédit d'obtention d'empreintes de nombres a été récemment proposé par B. Cloitre.

Pour chaque nombre réel r , on s'intéresse à ses multiples $r, 2r, 3r, \dots$ dont on ne retient que la partie après la virgule. Pour $r = \pi$, on considère ainsi :

$r = 3,1415926 \rightarrow a_1 = 0,1415926$
 $2r = 6,28318530 \rightarrow a_2 = 0,28318530$
 $3r = 9,4247777 \rightarrow a_3 = 0,4247777$,
 et ainsi de suite.

On calcule les sommes $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ de ces nombres. Comme chaque terme oscille autour de $1/2$, la somme a une valeur autour de $n/2$.

Pour obtenir une valeur centrée, on utilise donc le nombre $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n/2$. En représentant de nombreuses valeurs de b_n (c'est-à-dire des points de coordonnées (n, b_n)), le dessin obtenu est, comme avec les promenades de l'encadré 6, structuré et spécifique.



construction de promenades sur le plan dont la définition se fonde, comme précédemment, sur un nombre réel unique. Ces procédés produisent bien d'autres choses que des mouvements browniens et, avec eux, les constantes préférées des mathématiciens deviennent visuellement distinctes [voir l'encadré 6].

Ces méthodes engendrent des images qui personnalisent les nombres et semblent exhiber leur identité profonde. La structure visuelle est très différente d'un nombre à l'autre, confirmant ce que bien des mathématiciens avaient perçu : chaque nombre a une identité cachée dans ses chiffres. L'image ainsi associée à un nombre peut être vue comme son empreinte « digitale » ou, pourquoi pas, son génome.

Avant B. Cloitre, d'autres méthodes avaient parfois réussi à faire ainsi émerger des images structurées des constantes, mais les procédés qu'il propose sont plus simples et énigmatiques. On est loin de comprendre ce qui se passe, mais déjà B. Cloitre en tire des conjectures et des arguments heuristiques. Ainsi, grâce aux promenades, il semble que la constante $\zeta(5)$ (la somme

infinie des $1/n^5$), dont on ignore aujourd'hui la nature, soit un nombre irrationnel.

Pour terminer, signalons encore une trouvaille toute récente de B. Cloitre : un procédé qui, comme ses promenades, associe des cartes de visite clairement distinctes aux constantes irrationnelles, cette fois sous la forme de « rideaux » géométriques [voir l'encadré 7] que l'on soupçonne être fractals (ce qu'on ne sait pas démontrer aujourd'hui).

De nouvelles formes de la beauté mathématique

Pour l'instant, nul ne sait ce que l'on réussira à tirer mathématiquement de ces dessins personnalisés des nombres. Il est cependant probable que les comprendre nous aidera à percer quelques mystères arithmétiques. Le mathématicien, s'il ne sait pas encore lire sur ces images géométriques, ne peut manquer de se réjouir de voir ses constantes préférées se dévoiler et révéler de nouvelles formes, jusque-là inconnues, de la beauté mathématique. ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Site de Benoît Cloitre, consulté en novembre 2013 : <http://bcmathematics.monsite-orange.fr/>

B. Cloitre, *Fractal curtains of irrational numbers*, 2013, <https://dl.dropboxusercontent.com/u/46675017/Fractalcurtains.pdf>

F. Aragon Artacho et al., *Walking on real numbers*, *Mathematical Intelligencer*, vol. 35(1), pp. 42-60, 2013 http://rua.ua.es/dspace/stream/10045/29042/1/2013_Aragon_etal_MathIntell.pdf

K. Cooney, *Visualising prime numbers*, *The Irish Undergraduate Mathematical Magazine*, vol. 1, pp. 17-26, 2012.

J.-P. Delahaye, *Être normal, pas si facile !*, *Pour la Science* n°422, pp. 126-131, décembre 2012.

R. Sacks, *Number spiral*, 2007, www.numberspiral.com

J.-P. Delahaye, *Les nombres zébrés*, *Pour la Science* n° 301, pp. 90-95, juillet 2004.

SCIENCE & FICTION

Le vol du banshee

Les monstres volants de la science-fiction ont des proportions qui interdiraient la plupart des prouesses dont leurs concepteurs les dotent.

Roland LEHOUCQ et J.-Sébastien STEYER

Les animaux fabuleux des mythologies ne hantent pas seulement les forêts et les montagnes, les océans et les lacs. On les trouve aussi dans les airs. L'une des créatures les plus célèbres de la mythologie grecque est Pégase, le cheval ailé qui permit à Bellérophon de vaincre la Chimère. Une autre créature emblématique est le dragon, dont la version occidentale est un gigantesque reptile écailleux et cracheur du feu, capable de voler grâce à des ailes membraneuses semblables à celles des chauves-souris. Citons également le griffon (un corps d'aigle greffé sur l'arrière d'un lion) qui apparaît en Élam à la fin du IV^e millénaire avant notre ère, l'hypogriffe (mi-cheval et mi-aigle) popularisé par la saga *Harry Potter*, ou le Roc, un oiseau gigantesque mentionné dans les contes des *Mille et Une Nuits* et dans les *Voyages de Sinbad le Marin*, capable d'enlever dans ses énormes serres des proies aussi grosses que des éléphants !

Science-fiction et *fantasy* ont aussi beaucoup contribué à étendre la « biodiversité » des organismes volants. On en trouve dans la saga *Star Wars*, tel Watto, le cupide marchand de pièces détachées de la planète Tatooine (*La Menace Fantôme*, 1999), ou le Bogwing de la planète Dagobah. La riche faune de la planète Pandora (*Avatar*, 2009) comprend aussi de splendides espèces, tel le banshee, un vertébré volant, ou son cousin prédateur le grand *Leonopteryx*.

Comme souvent, ces animaux imaginaires sont inspirés de la vie terrienne actuelle ou disparue. Ainsi, le banshee a incontestablement un air de parenté avec

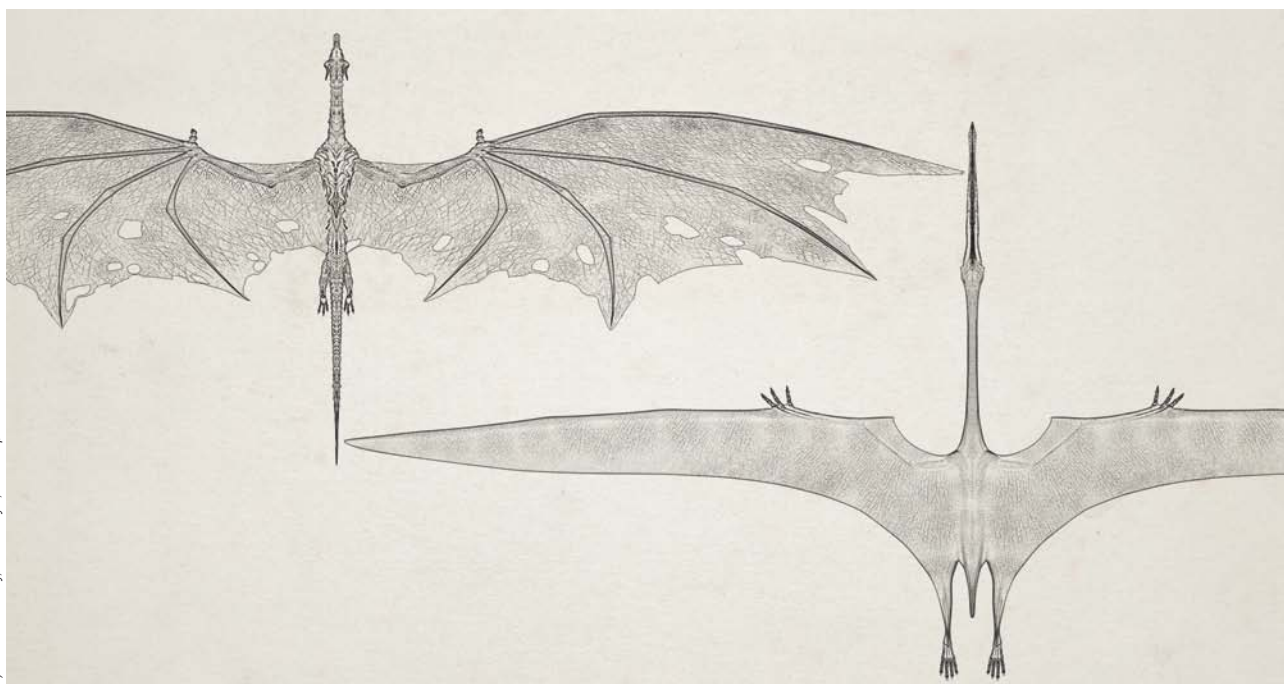
les ptérosaures. Ces reptiles volants sont apparus au Trias supérieur, il y a 230 millions d'années, et ont disparu au Crétacé supérieur, il y a 65 millions d'années, en même temps que de nombreux dinosaures. Même s'ils partagent quelques caractéristiques avec les oiseaux, par exemple des os creux, ils forment un groupe à part entière. Les ptérosaures sont les premiers vertébrés à avoir acquis le vol battu. Les ailes des banshees ressemblent à celles des ptérosaures : une membrane attachée au corps et sous-tendue par les os des membres antérieurs.

Impossibles acrobaties ?

Or les indigènes de Pandora, les Na'vis, savent dompter les banshees pour en faire leurs montures volantes et exécutent avec eux de stupéfiantes acrobaties. Est-ce plausible ? En se déplaçant dans l'air, l'aile subit une force de portance qui résulte de l'action de l'air sur sa surface. Cette force est proportionnelle à la surface des ailes et au carré de la vitesse relative de l'aile par rapport à l'air. En effet, la force est due aux molécules qui rebondissent sur l'aile ; elle est proportionnelle au nombre de molécules frappant la surface et à leur vitesse. Ce nombre est, lui aussi, proportionnel à la vitesse ; par conséquent, la portance dépend du carré de la vitesse relative de l'aile par rapport à l'air. C'est pourquoi il est plus facile de décoller face au vent : à la vitesse de l'animal s'ajoute celle du vent, ce qui augmente d'autant la portance. Pour voler à altitude constante,



1. WATTO qui, dans la saga *Star Wars*, vit sur la planète Tatooine, est un personnage volant difficilement plausible, même avec ses battements d'ailes accélérés !



2. LE DRAGON SMAUG (à gauche), présent dans le récent film *Le Hobbit : La Désolation de Smaug* de Peter Jackson, a une silhouette comparable à celle du ptérosaure (à droite), qui a bel et bien existé, et avait des ailes sous-tendues par un seul doigt.

il faut que la vitesse par rapport à l'air soit suffisamment élevée pour que la portance compense le poids de l'animal. On comprend ainsi que, dans des conditions comparables, les plus lourds doivent voler plus vite.

Dès que la portance compense le poids, l'animal vole, mais il faut ensuite vaincre les frottements aérodynamiques, ou traînée, pour que la vitesse – et donc la portance – se maintienne. Comme la force de portance, la traînée est proportionnelle au carré de la vitesse relative de l'aile par rapport à l'air. La puissance nécessaire à la sustentation, égale au produit de la traînée par la vitesse, varie comme le cube de cette vitesse. Le vol rapide est donc très coûteux en énergie.

Et si la puissance musculaire augmente avec la masse de l'animal, elle le fait moins vite que la puissance à fournir pour contrebalancer les frottements qui augmentent avec la masse. Un animal volant ne peut donc dépasser une certaine masse (et une certaine taille), déterminée par sa capacité à fournir la puissance nécessaire au maintien de sa vitesse de vol malgré les frottements. L'oiseau actuel le plus massif est la grande outarde, dont le mâle pèse une vingtaine de kilogrammes et dont l'envergure peut atteindre 2,5 mètres : un nain comparé aux grands ptérosaures, notamment *Quetzalcoatlus* qui volait à la fin du Crétacé et dont la masse est estimée à 70 kilogrammes pour une envergure d'environ 12 mètres.

Les banshees de Pandora, qui semblent bien plus massifs que les ptérosaures pour une envergure comparable, sont probablement surdimensionnés. Certes, la faible gravité de Pandora et son atmosphère plus dense sont deux paramètres favorables au vol d'organismes massifs. En revanche, ces animaux ne pourraient pas transporter un Na'vi sur leur dos : ils ne pourraient fournir l'énergie nécessaire à se maintenir en vol, et devraient se limiter au vol plané.

Quand l'évolution bégaye

Dans le même registre, le kaiju Otachi du film *Pacific Rim* (2013). Monstre volant mi-dragon mi-ptérosaure pesant des « milliers de tonnes », il tente de mettre fin à la bataille l'opposant à un robot géant tout aussi massif en l'attirant dans les airs. L'altitude atteinte est très élevée, car on voit la courbure de la Terre ! Même avec l'envergure d'un Airbus A380, les ailes d'Otachi ont à l'évidence une surface insuffisante, et ses muscles n'ont pas la puissance permettant de réaliser cet exploit. De plus, à une telle altitude, l'oxygène est si raréfié qu'il serait impossible aussi bien de voler que de respirer !

Notons que le vol battu est apparu plusieurs fois au cours de l'évolution : chez les insectes, les ptérosaures, les oiseaux [dinosaures à plumes] et les mammifères

[chiroptères]. Le vol et la portance proviennent souvent d'extensions latérales du corps, les ailes. Mais il semble qu'à l'origine ces extensions aient permis d'augmenter la surface du corps et de faciliter les échanges de chaleur. À partir d'une certaine longueur, elles cessent d'aider l'animal à se réchauffer, mais améliorent la portance. Le vol serait donc une exaptation – ou adaptation secondaire – de la thermorégulation.

Les plumes sont un autre exemple d'exaptation : ces écailles modifiées et très ramifiées sont apparues plusieurs fois au cours de l'évolution des dinosaures. Elles permettraient de limiter les pertes de chaleur, et c'est ultérieurement que de telles structures auraient été sélectionnées pour le vol chez certains dinosaures, dont les oiseaux modernes sont les descendants.

L'évolution nous montre donc que de nombreuses solutions sont possibles pour défier les lois de la pesanteur, du moins sur Terre pour l'instant. Chaque exoplanète ayant ses propres conditions physico-chimiques, à nous d'imaginer des formes de vie volantes originales..., mais plausibles ! ■

R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris.

Retrouvez les articles de J.-S. Steyer et R. Lehoucq sur www.pourlascience.fr



ART & SCIENCE

La Tour de Babel et la diversité des... spirales

La plupart des représentations de l'édifice mythique qui serait à l'origine de la diversité des langues montrent – à l'inverse des sources historiques et archéologiques –, une tour spiralée. Mais de quelle spirale s'agit-il ?

Loïc MANGIN

L'épisode biblique de la Tour de Babel (*Genèse*, 11) est célèbre. Après le Déluge, les hommes qui parlent alors tous la même langue s'installent dans le pays de Shinéar et décident d'y construire une ville, Babel, ainsi qu'une tour assez haute pour toucher le ciel et atteindre Dieu. Lequel prend ombrage de cette prétention et y met fin en introduisant des langues différentes : les hommes ne se comprennent plus, et le projet architectural est abandonné.

Le mythe a fait flores et l'on ne compte plus ses adaptations, en musique, en littérature, mais aussi au cinéma et surtout en peinture. Les représentations les plus célèbres sont celles du peintre flamand Pieter Brueghel l'Ancien (1525-1569) dont les deux *Tour de Babel*, la grande (*voir la figure f*) et la petite, sont conservées respectivement à Vienne et à Rotterdam. Dans ces deux œuvres, comme dans la plupart des autres, la tour est une spirale, la forme qui nous intéressera ici.

D'abord, remarquons que ce choix est étonnant au regard de l'histoire et de l'archéologie. En effet, Shinéar désigne la région de Sumer en Mésopotamie, et Babel serait ainsi Babylone, dans l'actuel Iraq. Le mythe de la Tour de Babel aurait alors été inspiré aux Juifs (leur population, ou du moins leur élite, a été déportée à Babylone au VI^e siècle avant notre ère, après la prise de Jérusalem par le roi Nabuchodonosor II) par la grande ziggourat de Babylone. Il s'agissait d'un édifice religieux dédié au dieu Mardouk et nommé Etemenanki, c'est-à-dire « la maison du fondement du ciel et de la terre ». Or, à en croire le témoignage

d'Hérodote et l'empreinte au sol de la ziggourat encore visible aujourd'hui, le bâtiment, certes l'un des plus imposants de l'Antiquité avec ses probables 90 mètres de hauteur, avait une base... carrée et non circulaire !

Selon certains, la forme spiralée de la plupart des représentations picturales de la Tour de Babel aurait été influencée par celle du minaret de la mosquée de Samarra, à 200 kilomètres au Nord du site de Babylone. Précisons que cette tour du IX^e siècle n'a aucun lien avec l'antique Babylone. Néanmoins, sa forme est proche de celle que l'on voit dans

La Tour de Babel aurait été inspirée par la ziggourat de Babylone, édifice dont la base était... carrée !

l'œuvre de Brueghel. Que peut-on dire de cette spirale d'un point de vue mathématique ?

Une spirale est une courbe dont les points s'éloignent d'un centre donné à mesure qu'elle tourne autour. Lorsqu'on utilise des coordonnées polaires (chaque point étant repéré par un angle θ et la distance p au centre), la spirale est décrite par une relation $p = f(\theta)$, où f est une fonction continue et monotone. Selon cette fonction, on distingue de nombreux types de spirales : citons les spirales logarithmiques $p = ae^{k\theta}$ (*voir la figure c*) et les spirales archimédiennes $p = a\theta^n$... Parmi ces dernières, on trouve la spirale d'Archimède correspondant à $n = 1$ (*voir la figure a*).

Rapprochons-nous de la Tour de Babel et ajoutons une troisième variable, la hauteur. On obtient alors une spirale en trois dimensions

telles que les spirales coniques de Pappus et de Pirondini. La première est la trajectoire d'un point se déplaçant uniformément sur une droite passant par un point O et tournant uniformément autour d'un axe vertical Oz avec un angle constant : la spirale est tracée sur un cône de révolution (*voir la figure b*). Lorsqu'on projette ce cône sur un plan, la spirale de Pappus devient la spirale d'Archimède.

Une spirale conique de Pirondini est une courbe tracée sur un cône quelconque et coupant les génératrices sous un angle constant. Quand le cône est de révolution, la spirale obtenue est une hélice conique (*voir la figure d*) qui, projetée sur un plan, correspond à une spirale logarithmique.

Comment identifier la spirale peinte par Brueghel ? Les vues du ciel de Samarra (*voir la figure e*), qui constituent des projections sur un plan, montrent que sur celles-ci les spires ont même largeur, comme dans une spirale d'Archimède : le minaret serait donc plutôt construit sur le modèle d'une spirale conique de Pappus. En outre, afin que tous les niveaux du ziggourat aient la même hauteur vus du sol, les architectes ont fait en sorte que la pente de la rampe diminue avec le diamètre de la tour. Ce stratagème plaide aussi pour une spirale conique de Pappus dont les spires apparaissent également équidistantes. D'ailleurs, une pente constante caractérise une hélice conique. On peut déduire de ces éléments que la *Tour de Babel* de Brueghel est une spirale conique de Pappus ! ■

De nombreuses informations sur les spirales : www.mathcurve.com