

Les conditions de travail de Bernard s'en trouvent quelque peu améliorées. Trois ans plus tard, Bernard rend la pareille à Pasteur, victime d'une attaque qui l'a partiellement paralysé : il devient le plus assidu de ses visiteurs, lui apportant soutien et réconfort.

De l'alcool à partir du sucre

Quand il était à Lille en 1856, Pasteur avait résolu un problème à la fois scientifique et économique : il avait découvert pourquoi la bière tournait parfois, devenant aigre. Le coupable était une levure, *Lactobacillus*, qui produisait de l'acide lactique au lieu de l'alcool attendu. Le remède était simple : cette levure étant sensible à la chaleur, il suffisait de chauffer la bière pour l'éliminer et laisser les « bonnes » levures fermenter le sucre céréalière en alcool. Dix ans plus tard, Pasteur revient sur ce sujet, cette fois pour prendre part à un vif débat aux implications tant scientifiques qu'industrielles, entourant le principe même de la fermentation : la fermentation alcoolique est-elle activée par la levure elle-même ou par une substance chimique soluble qu'elle produirait ? Tout comme il croit à l'origine microbienne des maladies, Pasteur est persuadé que la levure entière, vivante, est nécessaire à la fermentation. Il s'oppose avec véhémence au jeune chimiste Marcellin Berthelot – et de façon plus mesurée à son ami Bernard. Les deux hommes sont convaincus que les principes actifs du processus sont des « ferments » solubles dérivés de la levure (plus tard nommés enzymes), et non les levures elles-mêmes. Bernard soutient que tout phénomène biologique est le fruit d'un processus physique ou chimique (il s'oppose ainsi à la notion de vitalisme – cette force éthérée invoquée pendant des siècles pour expliquer les éléments autrement inexplicables de la vie et de la maladie). La querelle autour de la fermentation se poursuit pendant 20 ans, principalement entre Pasteur et Berthelot, sans aucune preuve ni d'un côté ni de l'autre. Critiquant sans cesse les opinions et les capacités de Berthelot, Pasteur dépose même une plainte officielle sur la nomination de son adversaire en tant que professeur

Des philosophies de recherche différentes

La meilleure contribution de Bernard à la méthode de la recherche a été son principe de déterminisme expérimental : si, répétée plusieurs fois, une expérience donne des résultats différents, alors les conditions expérimentales associées étaient elles aussi différentes. C'est sur ce point que réside la principale divergence de vue de Pasteur et de Bernard. Les carnets de notes de Pasteur révèlent qu'il répétait parfois une expérience jusqu'à ce

que le résultat confirme sa théorie. Bernard, en revanche, ne se faisait aucune illusion. Dans ses *Principes de la médecine expérimentale* (publiés de façon posthume en 1947), il critique son confrère de façon à peine voilée : « Pasteur suit ses idées et il veut soumettre les faits : moi, je suis les faits, et je cherche à en faire sortir des idées [...]. Pasteur veut diriger la nature ; moi, je me laisse diriger par elle ; je la suis [...]. »

Dans ses derniers jours, Pasteur admit que « Bernard avait raison [...] la graine n'est rien ; le sol est tout ». Se référait-il à la théorie de Bernard sur l'origine des maladies (une déstabilisation du milieu intérieur et non un microbe) – ou à son *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, où la graine représente l'idée et le sol, la performance de l'expérience ? Nous ne saurons jamais. Quoi qu'il en soit, l'analogie a un sens profond dans les deux cas.

au Collège de France, se proposant comme candidat plus méritant !

Après la mort de Claude Bernard, en 1878, son assistant de laboratoire, Arsène d'Arsonval, se voit confier le classement des derniers documents académiques de son maître. Dans un tiroir du bureau de son appartement parisien, il découvre un rapport détaillé d'expériences menées dans le Beaujolais quelques mois plus tôt. Les résultats de Bernard révèlent que des ferments solubles de la levure suffisent bien à activer la fermentation alcoolique. La conclusion de Bernard est sans appel : « La

ans plus tard, le chimiste allemand Eduard Büchner confirme que Bernard avait raison. La découverte de Büchner sera récompensée du prix Nobel de chimie en 1907.

Pasteur et Bernard étaient de caractères bien différents. Même s'il savait répondre à ses détracteurs, Bernard était un homme vulnérable, modeste et plutôt timide. Tester l'inconnu avec les modestes ressources dont il disposait et former ses assistants à ses préceptes rigoureux lui suffisaient. Pasteur était audacieux, voire arrogant, recherchant le succès et la fortune (comme dans ses travaux sur la maladie du charbon et la rage, les maladies des vers à soie et des vignes ou la corruption du vin). Il utilisait ses assistants pour promouvoir son image. On a aussi émis l'hypothèse

EN ENTERRANT SES RÉSULTATS dans son bureau, Bernard aurait-il voulu épargner son vieil ami ?

formation de l'alcool est indépendante de toute cellule. » Sans surprise, Berthelot publie ces résultats. La réaction de Pasteur est amère. Bernard était encore à ses côtés un mois plus tôt, lors d'une session de l'Académie des sciences. Pourquoi n'avait-il rien dit de son importante découverte à son ami ?

L'année suivante, Pasteur publie une série de réfutations peu étayées des travaux de Bernard, dont plusieurs tentatives infructueuses de reproduire ses résultats. Lui qui avait si longtemps vénéré publiquement Bernard, critique à présent avec âpreté ses techniques et ses interprétations, allant même jusqu'à blâmer son acuité visuelle. Lorsque, 17 ans après, en 1895, Pasteur meurt à son tour, la question n'est toujours pas résolue. Deux

que les efforts de Pasteur pour reproduire les résultats de Bernard sur la fermentation n'avaient pas été très poussés, tout effrayé qu'il était à l'idée qu'il devrait alors admettre son erreur. D'autres se demandent si Bernard, en enterrant ses résultats dans son bureau, n'a pas simplement voulu épargner son vieil ami.

Chacun à leur façon, et bien qu'avec des principes de recherche – attitudes, méthodes et morale – aux antipodes, les deux hommes furent de brillants scientifiques. Leur interaction fut fructueuse bien au-delà des découvertes qu'elle permit, par les leçons qu'elle nous donne, encore aujourd'hui, sur les sciences médicales et la nature humaine. ■

LOGIQUE & CALCUL

Une théorie rêvée du calcul

Les mathématiciens créent des mondes imaginaires et s'interrogent sur ce qui s'y passe. Celui conçu par Jérôme Durand-Lose concilie simplicité et richesse infinie.

Jean-Paul DELAHAYE

De simples particules interagissant selon des règles fixées permettent-elles de réaliser des calculs et, si oui, lesquels ?

Pour le savoir, Jérôme Durand-Lose, professeur à l'Université d'Orléans, a proposé le modèle mathématique d'un univers ne contenant que des particules mobiles qu'il nomme « signaux ». Dans ce monde imaginaire, l'espace est une droite (un espace à une dimension). La droite où les signaux circulent est assimilée à la droite mathématique, c'est-à-dire à l'ensemble infini des nombres réels $\{1, -7, 23/11, \sqrt{3}, \text{etc.}\}$. Le temps est lui aussi continu et représenté à l'aide de nombres réels. Cette idéalisation n'est pas sans conséquence, mais elle est habituelle en physique où ces nombres sont utilisés en particulier dans les représentations de l'espace et du temps.

Les résultats obtenus par J. Durand-Lose et ses étudiants nous montrent les risques inhérents au passage de modèles où tout est discret – espaces composés de points isolés, temps représenté par des entiers – à des espaces continus envisagés sans restriction, avec toutes les richesses que les mathématiciens y découvrent et qui n'ont pas toutes de correspondance en physique.

Pour saisir les mondes étudiés par J. Durand-Lose depuis plus de dix ans, observons en détail l'un d'eux, qui aura la propriété de se reproduire périodiquement. Les signaux qu'il utilise sont au nombre de sept. Ce sont des points mobiles. On les dessine de cou-

leurs différentes et on les désigne par leur couleur. Chaque signal a sa propre vitesse et il n'en change jamais. Cette vitesse est un nombre réel. Dans notre exemple :

- le signal *noir* a la vitesse nulle ;
- le *bleu* et le *jaune* ont la vitesse 1 ; ils se déplacent vers la droite d'une unité de longueur par unité de temps ;
- le *vert* a la vitesse 2 ;
- le *rouge* a la vitesse -2 ; il se déplace vers la gauche de deux unités de longueur par unité de temps ;
- l'*orange* et le *violet* ont la vitesse -1 .

Les signaux interagissent quand ils se rencontrent et, après annihilation, donnent naissance à de nouveaux signaux. On peut voir ces signaux comme des particules ponctuelles. La situation est analogue à celle de la physique des particules, à la nuance près que le mathématicien conçoit et étudie en toute liberté les particules qui l'intéressent, alors que le physicien mène des expériences pour savoir quelles sont les particules existant réellement.

Dressons la liste des interactions possibles des sept types de signaux de notre exemple. Chaque ligne indique ce que la collision de deux signaux (*à gauche*) produit comme nouveaux signaux (*à droite*).

- Règle 1 : *bleu, noir* → *noir, vert*
- Règle 2 : *vert, noir* → *noir, jaune*
- Règle 3 : *jaune, noir* → *orange, noir*
- Règle 4 : *noir, orange* → *rouge, noir*
- Règle 5 : *noir, rouge* → *violet, noir*
- Règle 6 : *noir, violet* → *noir, bleu*

Quand une collision entre deux signaux n'est pas mentionnée – c'est le cas pour *jaune, orange* – les deux signaux se croisent sans interagir. Quand plus de deux signaux se rencontrent en un point, on considère que toutes les règles correspondant à deux signaux présents et interagissants s'appliquent. Par exemple, si les signaux *orange, vert* et *noir* se rencontrent, les règles 2 et 4 s'appliquent, d'où la règle :

vert, noir, orange → *noir, jaune, rouge*.

De telles super-règles peuvent être introduites si on le souhaite. L'évolution de l'univers à une dimension se visualise à l'aide d'un schéma où, par convention, l'écoulement du temps correspond au déplacement vers le haut. Le schéma *a* de l'encadré 1 montre ce qui se produit dans le cas particulier que nous venons de définir quand on place sept signaux aux positions initiales suivantes : quatre signaux *noir* en 0, 1, 3 et 4 ; un signal *bleu* en 0 ; un signal *vert* en 1 ; un signal *jaune* en 3.

Éternel recommencement

On observe qu'après une unité de temps, le signal *bleu* parti de la position 0 rencontre le signal *noir* qui est immobile en position 1. Leur collision donne naissance (d'après la règle 1) à un signal *noir* (qui prolonge donc le signal *noir* en position 1) et un signal *vert* deux fois plus rapide que le *bleu*, qui disparaît. Il y a de même interaction, à l'instant 1, entre le signal *vert* parti de la position 1 et

1. Le petit monde des signaux

Le monde des signaux inventé par Jérôme Durand-Lose est unidimensionnel. On représente son évolution en plaçant l'axe du temps verticalement. Dans notre premier exemple (a), on a sept particules (ou signaux) à l'instant initial ($t = 0$). Chacune, selon sa couleur, a une vitesse propre. Par exemple, les signaux *jaune* se déplacent vers la droite à la vitesse d'une unité de longueur par unité de temps (vitesse 1). Lorsque deux signaux se rencontrent, ils interagissent, ce qui donne naissance à des signaux diffé-

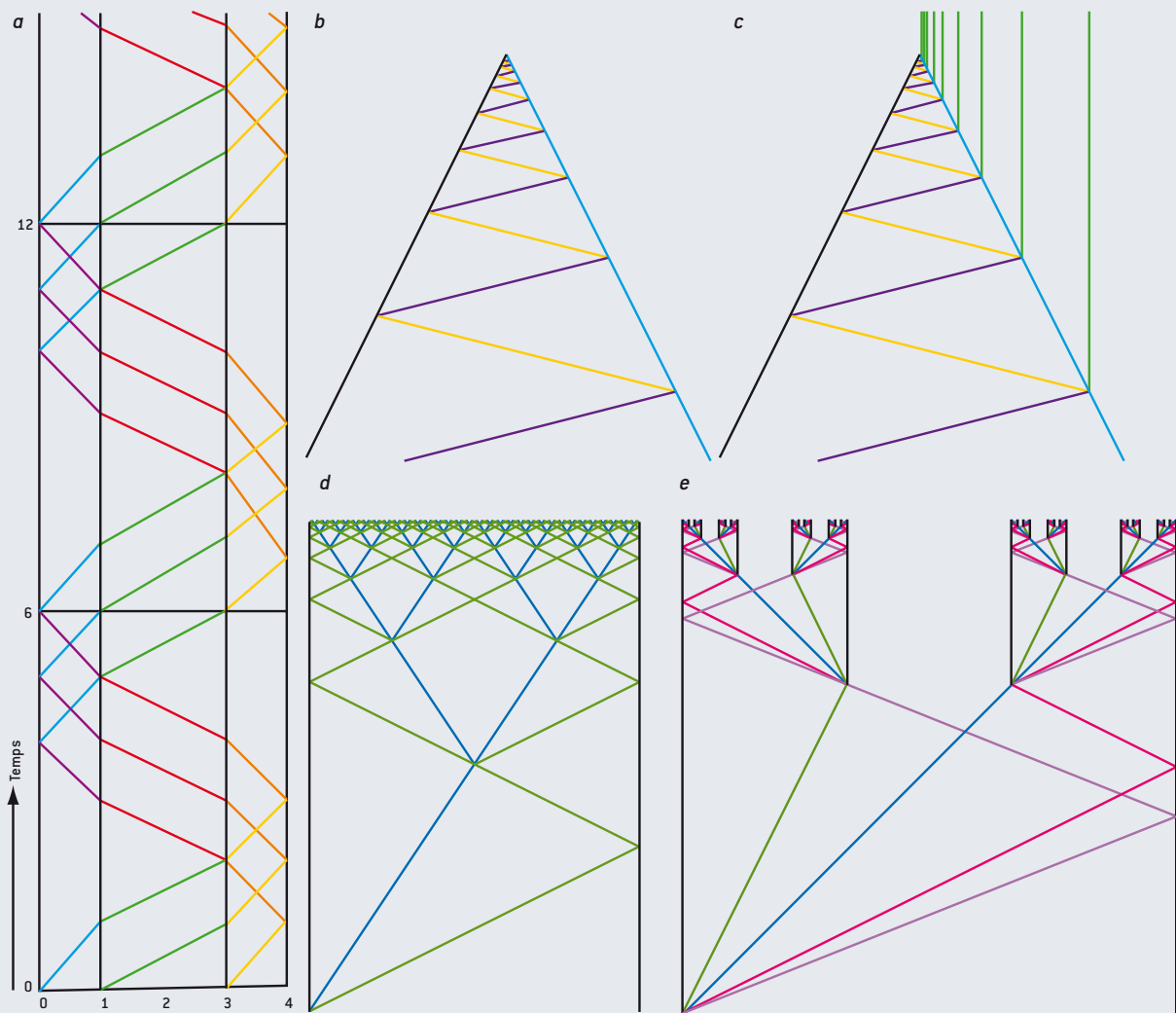
rents selon des règles fixées une fois pour toutes. Ici, la rencontre d'un signal *bleu* de vitesse +1 avec un signal *noir* de vitesse 0 produit un signal *vert* de vitesse +2 et un signal *noir* (de vitesse 0). Le petit monde dessiné ici est décrit en détail dans le texte de l'article. Au bout de six unités de temps, il retrouve l'état initial, et donc tout se répète indéfiniment toutes les six unités de temps.

Le choix des signaux et de leur configuration initiale permet de calculer. Cette programmation géométrique

est intéressante, car elle permet de profiter du caractère continu de l'espace-support et donc de toute la richesse de l'ensemble des nombres réels.

Dans ce monde des signaux, quatre d'entre eux peuvent jouer une partie de ping-pong en produisant un point d'accumulation d'interactions (b). En modifiant légèrement les règles (lorsque le *bleu* et le *violet* du dessin (b) se rencontrent, au lieu de produire un *jaune* et un *bleu*, on convient qu'ils produisent

un *jaune*, un *bleu* et un *vert*, ce qui donne alors le dessin (c)), il est facile d'obtenir qu'un nombre fini de signaux en produisant une infinité en un temps fini. Une forme de calcul infini est donc possible dans le monde des signaux de J. Durand-Lose. Un autre système assez simple de signaux produit une ligne complète de points d'accumulation (d). Un autre encore produit un ensemble de points d'accumulation correspondant exactement à l'ensemble triadique de Cantor (e).



le signal *noir* immobile en position 3 ; elle donne naissance, d'après la règle 2, à un signal *noir* et un signal *jaune*. Etc.

La définition des signaux, leurs positions initiales et les règles d'interaction déterminent parfaitement ce qui se passe au-delà de l'instant 0. Les mondes que l'on fabrique à l'aide de ce type de modèles sont déterministes : tout est donné au départ, aucun hasard n'intervient. Pour obtenir de ces mondes qu'ils calculent, il faudra donc soigneusement choisir les signaux, leurs règles et les positions initiales.

Dans notre exemple, le calcul produit une évolution assez simple à analyser. Les signaux *noir* sont fixes et se perpétuent indéfiniment. Les signaux initiaux *bleu*, *vert* et *jaune* se transforment en signaux d'autres couleurs qui sont réfléchis sur les signaux *noir* et reviennent simultanément à leur point de départ en six étapes. Au bout de six unités de temps, l'univers se retrouve donc dans son état initial : il est cyclique. Cet univers rejoue indéfiniment les mêmes événements. C'est un peu décevant, mais ce n'est qu'un début.

Dans les autres schémas représentant des univers de signaux (voir l'encadré 1), nous n'indiquerons pas toujours la liste des signaux, ni leurs vitesses et règles d'interaction, car en regardant les dessins, on reconstitue sans mal ces données. Bien sûr, pour qu'un dessin représente une évolution possible dans un monde de signaux, il faut que les mêmes règles exactement y soient appliquées d'un endroit à l'autre du dessin.

Points d'accumulation

La figure *b* illustre un phénomène très important pour la suite : la possibilité d'obtenir des points d'accumulation de collisions. Les quatre signaux de ce monde jouent une sorte de ping-pong de plus en plus rapide. Le signal *noir* et le signal *bleu* se rapprochent. Dans l'espace créé entre eux, le signal *violet* qui devient *jaune* puis à nouveau *violet*, puis à nouveau *jaune*, etc., interagit de plus en plus rapidement avec les signaux *noir* et *bleu*. Une infinité de collisions entre signaux se produisent avant un instant particulier qu'on dénomme *point d'accumulation*, et

qui correspond exactement au temps que le signal *noir* met à rejoindre le signal *bleu*. Que se passe-t-il en ce point limite ? Aucune des règles du jeu ne l'indique. Il faut donc compléter ces règles pour traiter de tels cas. Le plus simple est de convenir que tous les signaux disparaissent, comme s'ils tombaient dans un trou noir.

Le schéma *c* montre que, même avec cette convention, on ne peut éviter qu'apparaissent des situations où une infinité de signaux sont créés en un temps fini. Notons cependant que si l'on choisit d'affecter une masse à chaque particule et qu'on impose que chaque règle préserve la masse totale, alors ce type de phénomènes devient impossible : partant d'un nombre fini de particules ayant chacune une masse finie, on ne peut aboutir à une infinité de particules.

Le schéma *d* montre une situation extraordinaire où non seulement un point d'accumulation est créé, mais où c'est tout un segment qui se remplit de points d'accumulation. Le schéma *e* est encore plus troublant : l'ensemble des points d'accumulation est l'ensemble triadique de Cantor (mentionné dans l'article du mois de février 2014) qui est la première fractale, imaginée il y a bientôt 150 ans.

On doit conclure de ces exemples que les mondes de signaux de J. Durand-Lose ne sont pas tout à fait réalistes. Les définir à partir de l'ensemble des nombres réels utilisé sans précaution et assimiler les signaux à des points mobiles sans épaisseur a pour conséquence que l'infiniment petit (dont la physique n'accepte pas vraiment l'existence) se manifeste et produit d'étranges situations qui semblent impossibles dans notre univers. L'infiniment petit produit des points d'accumulation, des signaux en nombre infini et même les fractales deviennent réelles. Dans notre monde, les fractales n'existent que comme limite jamais atteinte, on en trouve et on en produit sous forme approximative. Ici, dans le monde des signaux, elles sont pleinement possibles, avec l'infinie finesse de leurs détails.

Même si le physicien se méfie, le mathématicien n'a pas peur de ces mondes idéaux ; au contraire, il les trouve intéressants. La question « Que peut-on calculer dans un

monde de signaux ? » y devient délicate et... passionnante. Elle se décompose en trois questions que nous allons aborder successivement.

– Est-ce que tout calcul faisable dans un monde discret classique est faisable dans un monde de signaux à une dimension ?

– Les points d'accumulation rendent-ils réalisables des calculs impossibles dans un monde discret classique ? Si oui, lesquels ?

– Certains calculs que le monde discret classique ne permet pas de mener rapidement peuvent-ils l'être ici ? Qu'en est-il en particulier des problèmes NP-complets ?

Montrons d'abord comment les signaux peuvent effectuer des soustractions et du calcul modulaire.

Calculs classiques

La figure de gauche de l'encadré 2 représente un monde dans lequel se fait une soustraction. Pour réaliser la soustraction $a - b$, on place trois particules immobiles à distances 0, a et b de l'origine (on les nomme w_0 , w_a , w_b). On lance alors du point d'abscisse -1 une particule de vitesse 1 nommée « init ». Après cinq collisions de particules, une particule w_r immobile est créée ; elle donne le résultat de la soustraction, car elle est située exactement à une distance $a - b$ de l'origine. Durant le calcul, les particules w_a et w_b qui portaient les données initiales du calcul ont été annihilées, mais il serait facile de changer un peu les règles pour préserver ces données. Vérifier que la particule w_r est bien placée à une distance de l'origine exige un petit raisonnement géométrique... que nous vous laissons le plaisir de détailler.

On remarquera que l'algorithme de calcul géométrique proposé – il s'agit bien de cela – fonctionne avec n'importe quelles données, y compris avec des données irrationnelles comme π ou e , et calcule donc sans la moindre erreur $\pi - e$, si l'on suppose correctement placées au départ les particules associées à π et à e . Le monde des signaux sait faire des soustractions parfaites entre nombres réels quelconques, ce qu'évidemment aucun mécanisme physique de notre monde ne sait réaliser, du

2. Effectuer une soustraction et un calcul modulaire

Pour réaliser des calculs avec des signaux, on place à l'instant 0 des signaux en des positions représentant les nombres sur lesquels on veut opérer. Ici (*figure de gauche*), pour faire la soustraction $a - b$, on place

un signal en position a et un autre en position b . Le système décrit dans la figure réalise en quelques collisions de signaux le calcul de la soustraction. Le résultat est inscrit dans l'univers unidimensionnel en considérant

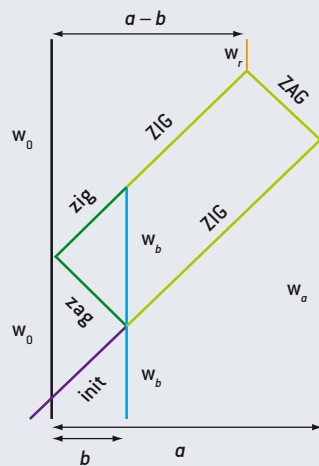
la distance qui sépare les deux signaux qui restent à l'issue des interactions. L'algorithme géométrique de soustraction fonctionne avec des nombres réels quelconques, même s'ils sont irrationnels comme π ou

$\sqrt{5}$, et produit le résultat sans la moindre erreur.

La figure de droite montre l'algorithme géométrique de calcul du reste de la division de a par b (calcul de a modulo b).

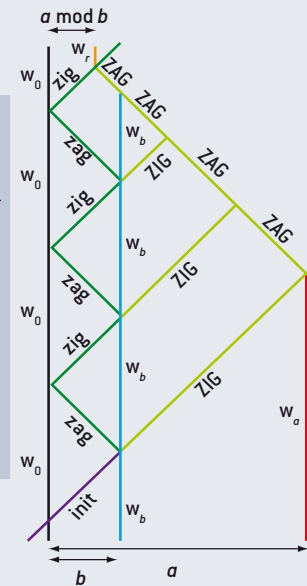
init, zig, ZIG	1
w_0, w_a, w_b, w_r	0
zag, ZAG	-1

init, w_b	→ zag, w_b , ZIG
w_0 , zag	→ w_0 , zig
zig, w_b	→ ZIG
ZIG, w_a	→ ZAG
w_b , ZAG	→ ZAG, w_b
ZIG, ZAG	→ w_r
zig, ZAG	→ w_r
zig, w_b , ZAG	→ w_r



init, zig, ZIG	1
w_0, w_a, w_b, w_r	0
zag, ZAG	-1

init, w_b	→ zag, w_b , ZIG
w_0 , zag	→ w_0 , zig
zig, w_b	→ zag, w_b , ZIG
ZIG, w_a	→ ZAG
w_b , ZAG	→ ZAG
zig, w_b , ZAG	→ ZAG
ZIG, ZAG	→ ZAG
zig, ZAG	→ w_r
w_0 , ZAG	→ w_0



fait du mouvement brownien et plus généralement du fait que, pour un physicien, aucune constante ou valeur physique n'est vraiment assimilable à un nombre réel avec son infinité de décimales : les physiciens utilisent les nombres réels, mais ils n'y croient pas vraiment !

La figure de droite de l'encadré 2 montre le déroulement du calcul de « $11 \bmod 3$ » (le reste de la division euclidienne de 11 par 3). En poursuivant l'étude de ces calculs avec signaux, on découvre progressivement que tout ce qu'un programme d'ordinateur (discret) calcule, une configuration convenable de signaux le fait aussi. Puisqu'il existe des méthodes permettant d'énumérer les nombres premiers, il existe une façon de définir des signaux calculant les nombres premiers, par exemple en créant des particules immobiles placées progressivement en position 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. On dit du modèle de calcul par signaux qu'il est « computationnellement universel ».

Bien que tout se déroule dans un univers à une seule dimension, et que les seuls objets de ce monde soient des signaux, tout calcul réalisable par un ordinateur habituel (qui calcule avec des entiers et effectue des opérations entre quantités discrètes), peut-être mené. Pour effectuer les calculs, on n'a d'ailleurs jamais besoin d'exploiter les points d'accumulation. Il suffit de ne considérer que des signaux ayant des nombres entiers pour vitesse, placés à l'instant initial en des positions à coordonnées entières et interagissant à des instants qui seront des nombres entiers. Le monde des signaux réduit à la droite des nombres entiers et fonctionnant en temps discret possède le même pouvoir de calcul que nos ordinateurs (pourtant situés dans un espace de dimension 3).

Ces résultats sont bien sûr importants pour la théorie de la calculabilité et montrent une fois de plus que le pouvoir de calcul discret maximal est atteint par des disposi-

tifs extrêmement simples. Non seulement les machines de Turing (des calculateurs discrets ne disposant que d'une mémoire finie et d'un ruban annexe de mémoire) ont ce pouvoir maximum de calcul, mais les signaux des mondes de J. Durand-Lose aussi.

Calculs infinitaires

Cela étant établi, la question initiale devient : l'exploitation des points d'accumulation donne-t-elle plus de puissance de calcul aux mondes des signaux ? Ou encore : existe-t-il des calculs (que nous qualifierons d'infinitaires) que l'on réussit à effectuer avec des signaux et des points d'accumulation et qui sont impossibles à une machine de Turing ou à un ordinateur au sens habituel, c'est-à-dire fini et composé d'éléments discrets ?

Alan Turing a démontré en 1936 que le problème de l'arrêt est algorithmiquement indécidable : il n'existe pas d'algorithme (pour un ordinateur habituel discret) ayant pour