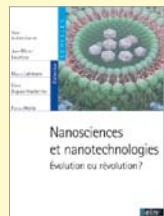


Privilégiant les savoirs les plus actuels, la collection « Échelles » propose des ouvrages scientifiques avec une présentation simple de questions réputées complexes !

Nanosciences et nanotechnologies

Évolution ou révolution ?



Jean-Michel Lourtioz, Marcel Lahmani, Claire Dupas-Haeberlin, Patrice Hesto

Réf. 70118354

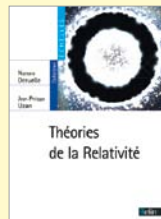
Une synthèse interdisciplinaire sur

les nanosciences et leurs applications, très illustrée, qui couvre un large spectre des recherches sur les « nanos », allant de la physique et la chimie aux biotechnologies, à la médecine et aux aspects environnementaux et sociétaux.

Éditions Belin 2014 - 448 pages - 45 €
ISBN 978-2-7011-8354-1

Théories de la relativité

Jean-Philippe Uzan et Nathalie Deruelle



Réf. 70115848

L'ouvrage présente de façon synthétique, en trois grandes parties (Mécanique et gravitation newtoniennes ; Relativité restreinte

et théorie de Maxwell et Relativité générale et gravitation), les trois représentations de l'espace et du temps, leurs domaines de validité et la manière dont elles s'articulent.

Éditions Belin 2013 - 656 pages - 40 €
ISBN 978-2-7011-5848-8

Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres



300 exercices corrigés

Gérald Tenenbaum

Réf. 70114750-5

Solide initiation aux méthodes analytiques et probabilistes de

l'arithmétique, ce livre constitue une référence indispensable. Il fournit une présentation systématique, cohérente et autonome du domaine.

Éditions Belin 2008 - 592 pages - 47,20 €
ISBN 978-2-7011-4750-5

Théorie analytique et probabiliste des nombres



Gérald Tenenbaum et Jie Wu

Réf. 70118350

Plus de 300 exercices en complément de l'Introduction à la théorie analytique

et probabiliste des nombres. Les plus simples proposent une application des notions fondamentales introduites dans le traité d'introduction ; d'autres, plus poussés, initient le lecteur à la recherche en théorie analytique des nombres.

Éditions Belin 2014 - 336 pages - 34 €
ISBN 978-2-7011-8350-3



Qu'est-ce que la matière (n°18)

Françoise Balibar, Jean-Marc Lévy-Leblond et Roland Lehoucq

Réf. 74650767*

Ce petit livre nous révèle les secrets de cet Univers qui nous entoure et que nous connaissons si mal. Et pourquoi les étoiles brillent-elles ? Quel message nous envoie leur lumière ? Comment expliquer la variété et la répartition des atomes ? Quand et comment ont-ils été formés ?

Éditions Le Pommier 2014 - 192 pages - 10 €
ISBN 978-2-7465-0767-8



Les frontières de l'humain (n°19)

Henri Atlan et Frans de Waal

Réf. 74650768*

La vie, l'humain ont changé de statut : voici une nouvelle définition qui allie les apports de la philosophie, de la biologie et de l'éthologie !

Éditions Le Pommier 2014 - 144 pages - 10 €
ISBN 978-2-7465-0768-5

Le monde des teintures naturelles (nouvelle édition)

Dominique Cardon

Réf. 70116143

Éditions Belin 2014
800 pages - 60 € - ISBN 978-2-7011-6143-3



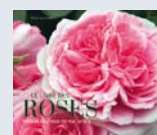
Trois prédateurs dans un salon

Une histoire du chat, du chien et de l'homme

Pierre Jouventin

Réf. 70118954

Éditions Belin 2014
224 pages - 18 € - ISBN 978-2-7011-8954-3



Le livre des roses

Histoire des roses de nos jardins

Daniel Lemonier

Réf. 70117668

Éditions Belin 2014
336 pages - 38 € - ISBN 978-2-7011-7668-0



Le petit déjeuner du tarsier

Et autres indisciplinés du monde animal

François Moutou

Réf. 74650647*

Éditions Le Pommier 2013
192 pages - 20 € - ISBN 978-2-7465-0647-3

BON DE COMMANDE

À retourner accompagné de votre règlement à :

Groupe Pour la Science • 628 avenue du Grain d'Or • 41350 Vineuil

☐ Oui, je commande les livres présentés dans la sélection de Pour la Science. Je reporte les titres, prix et références à 6 chiffres correspondant aux ouvrages choisis :

Titre	Réf.	Prix
		€
		€
		€
		€
		€
		€
Frais de port (4,90 € France - 12 € étranger)		+
Total à régler		=

J'indique mes coordonnées :

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

C.P. : _____ Ville : _____

Pays : _____ Tél.* : _____

E-mail* : _____

@ _____

*pour recevoir la newsletter Pour la Science (à remplir en majuscules).

Je choisis mon mode de règlement :

☐ par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ par carte bancaire

Numéro _____

Date d'expiration _____

Cryptogramme _____

Signature obligatoire



En application de l'article 27 de la loi du 6 janvier 1978, les informations ci-dessus sont indispensables au traitement de votre commande. Elles peuvent donner lieu à l'exercice du droit d'accès et de rectification auprès du groupe Pour la Science. Par notre intermédiaire, vous pouvez être amené à recevoir des propositions d'organismes partenaires. En cas de refus de votre part, merci de cocher la case ci-contre ☐.

Tous ces livres sont également disponibles en librairie.

HISTOIRE DES SCIENCES

Guldin et les indivisibles de Cavalieri

La préhistoire du calcul intégral, au XVII^e siècle, a été marquée par la querelle sur les « indivisibles » de l'italien Bonaventura Cavalieri. Les raisons profondes de la controverse ne relevaient pas uniquement des mathématiques.

Amir ALEXANDER

Le calcul intégral est une partie des mathématiques qui, dans sa forme la plus simple et dans son principe, consiste à déterminer la longueur, l'aire ou le volume d'un objet en le découpant en petits morceaux que l'on additionne, et en procédant à des découpages de plus en plus fins. Un débat entre deux savants du XVII^e siècle a contribué à ses origines.

En 1635, le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri avança l'idée que tout plan est composé d'une infinité de droites parallèles, et que tout volume est constitué d'une infinité de plans parallèles. Cette décomposition par la pensée d'une surface en lignes ou d'un volume en plans est au fondement de la « méthode des indivisibles » de Cavalieri. Selon cette méthode, deux figures planes (par exemple) ont la même aire si leurs indivisibles (les lignes parallèles qui les composent) ont les mêmes longueurs.

La méthode des indivisibles peut être considérée comme un ancêtre du calcul intégral. Mais les indivisibles de Cavalieri ont d'abord dû survivre aux attaques du mathématicien suisse Paul Guldin. Bien que le différend ait porté sur une question mathématique, on peut y déceler la trace de divergences plus profondes, liées au fait que Guldin et Cavalieri appartenaient à des ordres catholiques différents. Comme on va le voir ici, ces deux mathématiciens, le premier étant un jésuite et le second un jésuite, avaient une conception différente de l'utilisation des mathématiques pour comprendre la nature de la réalité.

Guldin critique les indivisibles de Cavalieri dans le livre IV de son *De Centro Gravitationis* (également intitulé *Centrobaryca*), paru en 1641. Tout d'abord, argumente Guldin, les preuves de Cavalieri ne sont pas des preuves constructives, telles que les mathématiciens classiques les aiment.

Dans l'approche euclidienne classique, les figures géométriques sont construites pas à pas, en partant du simple au plus complexe, à la règle et au compas. Chaque étape d'une preuve doit faire intervenir une telle construction, suivie d'une déduction des implications logiques pour la figure résultante.

Or Cavalieri procède à l'envers : il part de figures géométriques toutes faites telles que des paraboles, des spirales, etc., qu'il

divise en un nombre infini de parties. Une telle procédure pourrait être qualifiée de déconstruction plutôt que de construction : son but n'est pas de construire une figure géométrique nouvelle, mais de déchiffrer la structure interne d'une figure existante.

Guldin s'attaque ensuite aux fondements de la méthode de Cavalieri : l'idée qu'un plan soit composé d'une infinité de lignes, ou un solide d'une infinité de plans. Pour Guldin, c'est absurde : « Aucun géomètre n'acceptera jamais que la surface soit, et puisse être appelée en langage géométrique "toutes les lignes d'une telle figure". »

Lignes sans épaisseur

En d'autres termes, puisque les lignes n'ont pas d'épaisseur, on pourra en placer côte à côte autant qu'on voudra, on ne parviendra jamais à couvrir le plus petit morceau de plan qui soit. L'idée de Cavalieri de calculer l'aire d'une figure plane à partir de la dimension de « toutes ses lignes » est donc absurde.

Cela amène Guldin à son argument final. La méthode de Cavalieri repose sur l'établissement d'un rapport entre toutes les lignes d'une figure et toutes les lignes d'une autre. Or, souligne Guldin, les deux ensembles de lignes sont infinis, et le rapport d'une infinité sur une autre infinité n'a pas de sens. Vous aurez beau multiplier autant de fois que vous le voulez un nombre infini d'indivisibles, il ne dépassera jamais un autre ensemble infini d'indivisibles.

Prise globalement, la critique de la méthode de Cavalieri par Guldin incarnait les



1. BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647), statue datant de 1844, réalisée par Giovanni Antonio Labus et située dans la cour du palais de Brera, à Milan.

principes fondamentaux des mathématiques jésuites. Christophorus Clavius (1538-1612), le fondateur de la tradition mathématique jésuite, et ses héritiers au sein de l'ordre pensaient que les mathématiques devaient procéder de façon systématique et déductive, en partant de postulats simples et en allant vers des théorèmes de complexité croissante, pour décrire les relations universelles entre les figures. Les preuves constructives étaient précisément la traduction de cet idéal.

Cette approche produisait une logique mathématique rigoureuse et hiérarchique qui, pour les Jésuites, était la principale raison justifiant les études dans ce domaine : elle démontrait qu'en procédant par déduction systématique, des principes abstraits construisent un monde fixe et rationnel dont les vérités sont universelles et incontestables. En cela, fit remarquer Clavius, la géométrie euclidienne était plus qu'aucune autre science proche de l'idéal jésuite de certitude, de hiérarchie et d'ordre. Il s'ensuit que l'insistance de Guldin à réclamer des preuves constructives n'était pas affaire de pédantisme ou d'étroitesse d'esprit, comme le pensaient Cavalieri et ses partisans, mais une expression des convictions profondes de son ordre religieux.

Il en va de même de la critique de Guldin portant sur la division des plans et des solides en « toutes les lignes » et « tous les plans ». Les mathématiques doivent être non seulement hiérarchiques et constructives, mais aussi parfaitement rationnelles et dépourvues de contradictions. Or Guldin jugeait les indivisibles de Cavalieri incohérents dans leur principe même, la notion qu'un continuum soit composé d'indivisibles étant selon lui contraire à la raison. « Des choses qui n'existent pas, et ne pourraient exister, ne peuvent être comparées », s'insurge-t-il, « et il n'est donc pas étonnant qu'elles conduisent à des paradoxes et à la contradiction, et finalement, à l'erreur. »

Pour les Jésuites, ces mathématiques étaient bien pires que pas de mathématiques du tout. Le but des mathématiques, après tout, était d'apporter ordre et stabilité au monde, alors que la méthode des indivisibles n'apportait que confusion et chaos. Si ce système défectueux était admis, les mathématiques ne pourraient plus être le



2. PAUL GULDIN (1577-1643), portrait anonyme datant de 1650 [Département de mathématiques de l'Université de Graz, en Autriche], et le frontispice de son ouvrage *De Centro Gravitationis* où, notamment, il critique l'idée des indivisibles de Cavalieri.

fondement d'un ordre rationnel éternel. Le rêve jésuite, celui d'une stricte hiérarchie universelle aussi incontestable que les vérités de la géométrie, serait condamné.

La théologie en filigrane

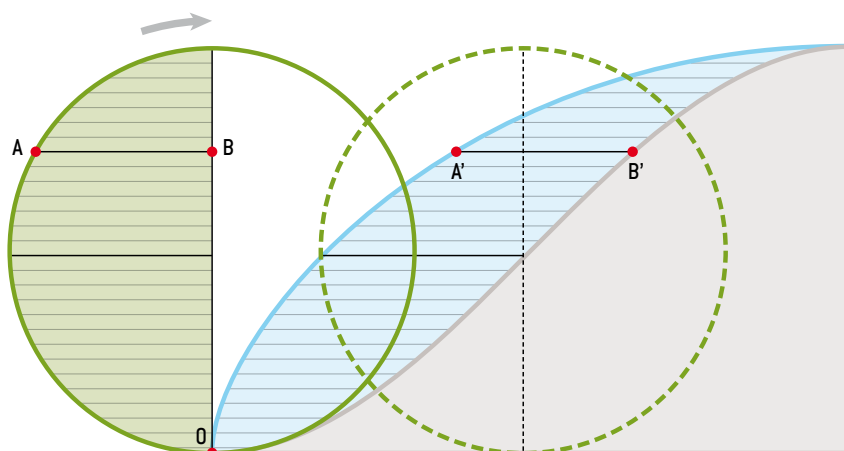
Dans ses écrits, Guldin n'expliquait pas les raisons philosophiques profondes de son rejet des indivisibles, pas plus que ne le firent les mathématiciens jésuites Mario Bettini et Andrea Tacquet, qui dénonçaient eux aussi la méthode de Cavalieri. En tant que mathématiciens, ces trois hommes devaient attaquer les indivisibles sur des bases mathématiques, et non philosophiques ou religieuses. Leur crédibilité mathématique ne pourrait que souffrir s'ils affirmaient être motivés par des considérations théologiques ou philosophiques.

Les participants au débat sur les indivisibles connaissaient bien évidemment les véritables enjeux, comme le mathématicien jésuite Stefano degli Angeli y fit allusion en écrivant qu'il ne savait pas « quel esprit »

animait les mathématiciens jésuites. À de très rares exceptions près, le débat resta mathématique.

Quand Cavalieri fut confronté pour la première fois aux critiques de Guldin, en 1642, il se mit immédiatement au travail pour produire une réfutation détaillée. Il avait initialement prévu de répondre sous la forme d'un dialogue entre amis, un genre prisé par son mentor Galilée. Mais quand il montra l'ébauche à Gianantonio Rocca, un mathématicien ami, ce dernier l'en dissuada. Il était plus sûr, le mit en garde Rocca, de ne pas recourir au format désobligeant du dialogue, avec ses traits d'esprit et ses réparties condescendantes, susceptible de mettre en rage des opposants puissants. Mieux valait, conseilla Rocca, écrire une réponse directe aux accusations de Guldin, en se concentrant sur les questions strictement mathématiques et en s'abstenant de toute provocation « galiléenne ».

Ce que Rocca passa sous silence, c'est que, contrairement à Galilée, Cavalieri n'a jamais manifesté de génie littéraire dans ses écrits, ni de don pour présenter des



3. LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES DE CAVALIERI indique par exemple que l'aire du demi-cercle (en vert) est égale à l'aire de la surface bleue, leurs « indivisibles » (segments en noir) étant simplement décalés. Ce résultat constitue une étape pour montrer que l'aire (en bleu et gris) délimitée par un cycle de cycloïde (courbe en bleu) est égale à trois fois l'aire du cercle – la cycloïde étant la courbe décrite par un point O du cercle lorsque celui-ci roule sur une droite.

L'AUTEUR



Amir ALEXANDER est historien des mathématiques à l'Université de Californie à Los Angeles.

Article adapté de l'ouvrage de l'auteur, *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World*, Scientific American/Farrar, Straus and Giroux, 2014.

BIBLIOGRAPHIE

A. R. Alexander, *Exploration Mathematics: The rhetoric of discovery and the rise of infinitesimal methods*, *Configurations*, vol. 9(1), pp. 1-36, 2001.

D. Descotes, « Le vertige de l'infini », dans *Pascal, Les Génies de la Science*, n° 16, pp. 32-51, 2003.

K. Anderson, *Cavalieri's method of indivisibles*, *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 31(4), pp. 291-367, 1985.

pas moins de mauvaise foi. Quiconque a lu son ouvrage de 1635 *Geometria Indivisibilis... promota* ou ses *Exercitationes* ne doute pas un instant qu'ils reposent sur l'intuition fondamentale que le continuum est formé d'indivisibles. La défense du jésuite sur ce point est un peu faible.

La réponse de Cavalieri à l'argument de Guldin selon lequel « un infini n'est pas en proportion ou en rapport avec un autre infini » est à peine plus convaincante. Cavalieri distingue deux types d'infini, affirmant qu'« un infini absolu » n'est effectivement pas en proportion avec un autre « infini absolu », mais que toutes les lignes et tous les plans ont un « infini relatif » et non absolu. Ce type d'infini, affirme-t-il alors, peut être (et est) en proportion avec un autre infini relatif. Comme précédemment, Cavalieri semble défendre sa méthode sur des bases techniques abstruses, recevables ou non par les autres mathématiciens. Dans un cas comme dans l'autre, son argument est sans rapport avec la véritable motivation de la méthode des indivisibles.

Mathématiques constructives ou non ?

Cette motivation est finalement dévoilée dans la réponse de Cavalieri à l'accusation de Guldin de ne pas avoir correctement « construit » ses figures. Ici, la patience de Cavalieri arrive à bout, et il laisse apparaître le fond de sa pensée. Guldin a affirmé que toutes les figures, angles et lignes d'une preuve géométrique doivent être soigneusement construits à partir des principes premiers ; Cavalieri conteste cela catégoriquement. « Pour qu'une preuve soit vraie », écrit-il, « il n'est pas nécessaire de décrire effectivement ces figures analogues, mais il suffit de supposer qu'elles ont été décrites mentalement. »

Et c'est là que réside la véritable différence entre Guldin et Cavalieri, entre les Jésuites et les partisans des indivisibles. Pour les Jésuites, le but des mathématiques est de construire un monde qui soit un lieu fixe et éternel, où l'ordre et la hiérarchie ne puissent jamais être remis en cause. C'est pourquoi chaque élément du monde doit être soigneusement et rationnellement

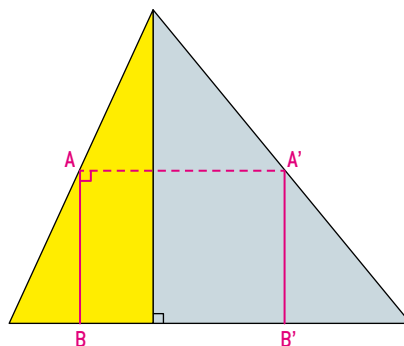
problèmes complexes de façon spirituelle et divertissante. Cavalieri fit probablement bien de suivre les conseils de son ami et de nous épargner un « dialogue » dans la prose indigeste et absconse qui le caractérisait. Et c'est ainsi que la réponse de Cavalieri à Guldin constitua le troisième « Exercice » de son dernier livre sur les indivisibles, *Exercitationes Geometricae Sex*, publié en 1647 et intitulé, assez platement, *In Guldinum* (« Concernant Guldin »).

Dans sa réponse, Cavalieri ne semble pas particulièrement troublé par la critique de Guldin. Il nie supposer que le continuum soit constitué d'un nombre infini de parties indivisibles, argumentant que sa méthode ne dépend pas de cette hypothèse. Si l'on croit que le continuum est composé d'indivisibles, alors oui, « toutes les lignes » s'additionnent pour donner une surface et « tous les plans » un volume ; mais si l'on n'admet pas que les lignes forment une surface, alors il y a sûrement quelque chose, en plus des lignes, qui constitue la surface et quelque chose, en plus des plans, qui constitue le volume. Rien de cela, soutient Cavalieri, n'a de conséquence sur la méthode des indivisibles, qui compare toutes les lignes ou plans d'une figure avec celles ou ceux d'une autre figure, indépendamment du fait que oui ou non ces éléments composent effectivement la figure.

L'argument de Cavalieri est peut-être techniquement acceptable, mais il n'en est

construit, et pourquoi le moindre soupçon de contradictions et de paradoxes ne peut être toléré. C'est une mathématique « descendante », dont le but est d'apporter rationalité et ordre à un monde autrement chaotique.

Pour Cavalieri et les autres indivisibilistes, c'est exactement le contraire : les mathématiques ont pour point de départ une intuition matérielle du monde, qui leur suggère que les figures planes sont constituées de lignes, et les volumes de plans, de la même façon qu'une toile est tissée à partir de fil et qu'un livre se compose d'un assemblage de pages. Il n'est pas nécessaire de construire ces figures par le raisonnement, parce que nous savons qu'elles existent déjà dans le monde. Il suffit d'en admettre l'existence et d'étudier leur structure interne. Si nous rencontrons des paradoxes et contradictions apparents, ils sont forcément superficiels, et



4. LA MÉTHODE DE CAVALIERI ne fonctionne pas toujours. Par exemple, l'aire du triangle jaune n'est pas égale à celle du triangle bleu, alors qu'à tout « indivisible » vertical AB du premier correspond un « indivisible » vertical A'B' de même longueur du second.

ne sont que le résultat des limites de notre compréhension. On peut soit les résoudre, soit les utiliser comme outil d'investigation. Mais ils ne devraient jamais nous empêcher d'explorer la structure interne des figures géométriques et les relations cachées entre les unes et les autres.

Pour les mathématiciens classiques tels que Guldin, la notion que l'on puisse fonder les mathématiques sur une intuition vague et paradoxale était absurde : « Qui sera le juge » de la vérité d'une construction géométrique, demande-t-il moqueusement à Cavalieri, « la main, l'œil ou l'intellect ? » Cavalieri trouvait qu'en insistant sur l'évitement des paradoxes, Guldin faisait montre d'un pédantisme vain. Selon Cavalieri, un tel ergotage risquait d'avoir de graves conséquences : si Guldin l'emportait, une méthode puissante serait perdue, et les mathématiques elles-mêmes seraient trahies. ■

Éditions du Comité des travaux historiques et scientifiques

une collection complète d'instruments de travail pour la recherche en sciences humaines

