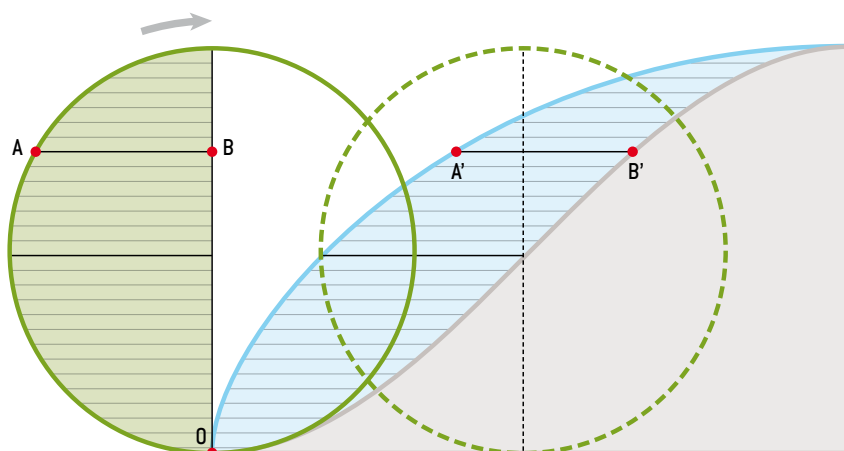




3. LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES DE CAVALIERI indique par exemple que l'aire du demi-cercle (en vert) est égale à l'aire de la surface bleue, leurs « indivisibles » (segments en noir) étant simplement décalés. Ce résultat constitue une étape pour montrer que l'aire (en bleu et gris) délimitée par un cycle de cycloïde (courbe en bleu) est égale à trois fois l'aire du cercle – la cycloïde étant la courbe décrite par un point O du cercle lorsque celui-ci roule sur une droite.

L'AUTEUR



Amir ALEXANDER est historien des mathématiques à l'Université de Californie à Los Angeles.

Article adapté de l'ouvrage de l'auteur, *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World*, Scientific American/Farrar, Straus and Giroux, 2014.

BIBLIOGRAPHIE

A. R. Alexander, *Exploration Mathematics: The rhetoric of discovery and the rise of infinitesimal methods*, *Configurations*, vol. 9(1), pp. 1-36, 2001.

D. Descotes, « Le vertige de l'infini », dans *Pascal, Les Génies de la Science*, n° 16, pp. 32-51, 2003.

K. Anderson, *Cavalieri's method of indivisibles*, *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 31(4), pp. 291-367, 1985.

pas moins de mauvaise foi. Quiconque a lu son ouvrage de 1635 *Geometria Indivisibilis... promota* ou ses *Exercitationes* ne doute pas un instant qu'ils reposent sur l'intuition fondamentale que le continuum est formé d'indivisibles. La défense du jésuite sur ce point est un peu faible.

La réponse de Cavalieri à l'argument de Guldin selon lequel « un infini n'est pas en proportion ou en rapport avec un autre infini » est à peine plus convaincante. Cavalieri distingue deux types d'infini, affirmant qu'« un infini absolu » n'est effectivement pas en proportion avec un autre « infini absolu », mais que toutes les lignes et tous les plans ont un « infini relatif » et non absolu. Ce type d'infini, affirme-t-il alors, peut être (et est) en proportion avec un autre infini relatif. Comme précédemment, Cavalieri semble défendre sa méthode sur des bases techniques abstruses, recevables ou non par les autres mathématiciens. Dans un cas comme dans l'autre, son argument est sans rapport avec la véritable motivation de la méthode des indivisibles.

Mathématiques constructives ou non ?

Cette motivation est finalement dévoilée dans la réponse de Cavalieri à l'accusation de Guldin de ne pas avoir correctement « construit » ses figures. Ici, la patience de Cavalieri arrive à bout, et il laisse apparaître le fond de sa pensée. Guldin a affirmé que toutes les figures, angles et lignes d'une preuve géométrique doivent être soigneusement construits à partir des principes premiers ; Cavalieri conteste cela catégoriquement. « Pour qu'une preuve soit vraie », écrit-il, « il n'est pas nécessaire de décrire effectivement ces figures analogues, mais il suffit de supposer qu'elles ont été décrites mentalement. »

Et c'est là que réside la véritable différence entre Guldin et Cavalieri, entre les Jésuites et les partisans des indivisibles. Pour les Jésuites, le but des mathématiques est de construire un monde qui soit un lieu fixe et éternel, où l'ordre et la hiérarchie ne puissent jamais être remis en cause. C'est pourquoi chaque élément du monde doit être soigneusement et rationnellement

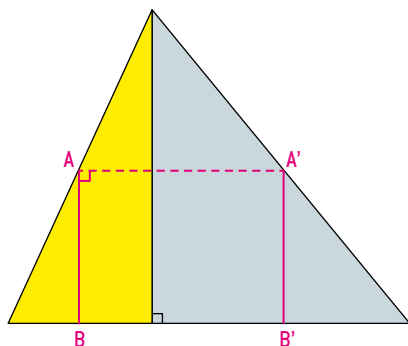
problèmes complexes de façon spirituelle et divertissante. Cavalieri fit probablement bien de suivre les conseils de son ami et de nous épargner un « dialogue » dans la prose indigeste et absconse qui le caractérisait. Et c'est ainsi que la réponse de Cavalieri à Guldin constitua le troisième « Exercice » de son dernier livre sur les indivisibles, *Exercitationes Geometricae Sex*, publié en 1647 et intitulé, assez platement, *In Guldinum* (« Concernant Guldin »).

Dans sa réponse, Cavalieri ne semble pas particulièrement troublé par la critique de Guldin. Il nie supposer que le continuum soit constitué d'un nombre infini de parties indivisibles, argumentant que sa méthode ne dépend pas de cette hypothèse. Si l'on croit que le continuum est composé d'indivisibles, alors oui, « toutes les lignes » s'additionnent pour donner une surface et « tous les plans » un volume ; mais si l'on n'admet pas que les lignes forment une surface, alors il y a sûrement quelque chose, en plus des lignes, qui constitue la surface et quelque chose, en plus des plans, qui constitue le volume. Rien de cela, soutient Cavalieri, n'a de conséquence sur la méthode des indivisibles, qui compare toutes les lignes ou plans d'une figure avec celles ou ceux d'une autre figure, indépendamment du fait que oui ou non ces éléments composent effectivement la figure.

L'argument de Cavalieri est peut-être techniquement acceptable, mais il n'en est

construit, et pourquoi le moindre soupçon de contradictions et de paradoxes ne peut être toléré. C'est une mathématique « descendante », dont le but est d'apporter rationalité et ordre à un monde autrement chaotique.

Pour Cavalieri et les autres indivisibilistes, c'est exactement le contraire : les mathématiques ont pour point de départ une intuition matérielle du monde, qui leur suggère que les figures planes sont constituées de lignes, et les volumes de plans, de la même façon qu'une toile est tissée à partir de fil et qu'un livre se compose d'un assemblage de pages. Il n'est pas nécessaire de construire ces figures par le raisonnement, parce que nous savons qu'elles existent déjà dans le monde. Il suffit d'en admettre l'existence et d'étudier leur structure interne. Si nous rencontrons des paradoxes et contradictions apparents, ils sont forcément superficiels, et



4. LA MÉTHODE DE CAVALIERI ne fonctionne pas toujours. Par exemple, l'aire du triangle jaune n'est pas égale à celle du triangle bleu, alors qu'à tout « indivisible » vertical AB du premier correspond un « indivisible » vertical A'B' de même longueur du second.

ne sont que le résultat des limites de notre compréhension. On peut soit les résoudre, soit les utiliser comme outil d'investigation. Mais ils ne devraient jamais nous empêcher d'explorer la structure interne des figures géométriques et les relations cachées entre les unes et les autres.

Pour les mathématiciens classiques tels que Guldin, la notion que l'on puisse fonder les mathématiques sur une intuition vague et paradoxale était absurde : « Qui sera le juge » de la vérité d'une construction géométrique, demande-t-il moqueusement à Cavalieri, « la main, l'œil ou l'intellect ? » Cavalieri trouvait qu'en insistant sur l'évitement des paradoxes, Guldin faisait montre d'un pédantisme vain. Selon Cavalieri, un tel ergotage risquait d'avoir de graves conséquences : si Guldin l'emportait, une méthode puissante serait perdue, et les mathématiques elles-mêmes seraient trahies. ■

Éditions du Comité des travaux historiques et scientifiques

une collection complète d'instruments de travail pour la recherche en sciences humaines

Savants et inventeurs entre la gloire et l'oubli
Sous la direction de Patrice Bret et Gérard Pajonk

136 pages
21 x 27 cm
br.
23 €

ISBN 978-2-7355-0813-4

Construire la ville
Histoire urbaine de la pierre à bâtir

294 pages
21 x 27 cm
ill., 1 br.
35 €

ISBN 978-2-7355-0814-3

LOGIQUE & CALCUL

Équations résolubles ou non ?

Parfois, une équation semble impossible à résoudre. Cette impossibilité est-elle théorique et définitive, ou peut-on la contourner ? En cherchant à répondre à de telles questions, les mathématiciens ont, au fil des siècles, franchi des étapes capitales.

Jean-Paul DELAHAYE

Au lycée, on apprend à résoudre des équations et des systèmes d'équations. L'élève qui a compris les méthodes enseignées traitera une large catégorie de problèmes. Pour chacun d'eux, il mettra en œuvre une « recette » qui, s'il procède avec soin, le conduira à la solution.

Les logiciels de calcul formel, *Sage*, *Pari/GP*, *Mathematica*, *Maple*, etc., se substituent à l'élève et, à l'aide de fonctions qui se nomment par exemple *solve*, font des calculs symboliques et traitent des équations trop compliquées pour le cerveau humain. Utilisant toute la puissance de nos machines et le savoir-faire des mathématiciens et ingénieurs qui développent et perfectionnent les algorithmes, ces logiciels sont d'incomparables experts en calcul. Le logiciel *Maple*, par exemple, trouve instantanément les quatre solutions de l'équation $X^4 - 6X^2 + 6 = 0$: $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$, $-\sqrt{3 + \sqrt{3}}$, $\sqrt{3 - \sqrt{3}}$, $-\sqrt{3 - \sqrt{3}}$.

Il écrit ainsi les résultats, et non pas de manière approchée en donnant quelques décimales (ce qu'il sait faire aussi). Mieux, il trouve les six solutions de l'équation : $X^6 - 26X^5 + 250X^4 - 1160X^3 + 2749X^2 - 3134X + 1320 = 0$, qui sont 1, 2, 3, 4, 5, 11. Il n'a aucun mal non plus quand on utilise des nombres transcendants comme coefficients (qu'il ne remplace pas par des valeurs approchées, mais traite symboliquement). Pour l'équation : $X^4 - \pi X^3 - 6X^2 + 6\pi X^2 + 11X^2 - 11\pi X - 6X + 6 = 0$, en quelques fractions de seconde, il donne les solutions qui sont 1, 2, 3, π .

1. L'invention des nombres complexes

Jérôme Cardan a publié une méthode (sans doute due à son rival Tartaglia) pour résoudre les équations polynomiales de degré 3 à une inconnue. Comme pour celles de degré 2, il propose des formules qui donnent les solutions en fonction des coefficients de l'équation, notés ici a , b , c et d , et du nombre complexe i .

Les formules générales pour le troisième degré sont analogues à celles qu'on apprend à l'école pour le second degré... mais sont beaucoup plus compliquées. Nous les indiquons ci-dessous en notation moderne et sans démonstration, juste pour le plaisir esthétique.

L'*Ars Magna* de Jérôme Cardan a été publié en 1545. Il est écrit en latin. Cet ouvrage contient les premières solutions générales d'équations polynomiales de degré 3.



$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a \neq 0$$

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscribitur, est in ordine Decimus.



Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa vocant) nouis adinventionibus ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vulgò tritis iam septuaginta exasperent. Neque folium, ubi tres numeri alteri, aut duo unum, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres unum equales fuerint, nodum explicant. Hunc autem librum ideo feci, si m' edere placuit, ut hoc abstrusissimum, & planè inexhaustum totius Arithmetice thesaurum in lucem eruo, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito. Lectores incitaretur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiciant.

Se posent alors plusieurs questions. Ce que font ces logiciels est-il parfait ? Seront-ils améliorables jusqu'à résoudre toute équation ? Seront-ils confrontés à des difficultés insurmontables et si oui, connaît-on des équations définitivement insolubles ?

Les réponses à ces questions exigent une formulation plus précise, mais si nous faisons cet effort, alors ce que nous apprennent les mathématiques et la logique est extrêmement clair... et souvent inattendu. Au passage, nous constaterons que de nombreux progrès mathématiques proviennent de l'étude des équations insolubles, ou qui apparaissaient telles. C'est en comprenant

la nature des insolubilités que de profondes avancées se produisent, dont l'histoire est loin d'être achevée. Ces avancées annoncent peut-être des mathématiques créées par les ordinateurs, que David Ruelle entrevoit (voir l'encadré 5).

On sait depuis l'Antiquité que certaines équations n'ont pas de solution, ou du moins n'en ont pas du genre qu'on aurait aimé. L'équation $X^2 - 2 = 0$, équivalente à $X^2 = 2$, provoqua une révolution mathématique. La résoudre, c'est trouver des nombres qui, multipliés par eux-mêmes, donnent 2.

Les mathématiciens grecs recherchaient et attendaient une solution sous la forme d'un

quotient de deux entiers. Au ^{ve} siècle avant notre ère, Hippias de Métaponte découvrit, du moins d'après ce qu'on croit savoir de l'histoire de cette période peu documentée, qu'on n'y arriverait jamais. Il n'existe pas de solution à cette équation de la forme $X = n/d$ avec n et d entiers. C'était très ennuyeux, car la diagonale d'un carré de côté 1 a pour longueur un nombre X qui vérifie l'équation, ce qui rend donc inconcevable de nier l'existence d'une solution à l'équation !

Prouver l'inexistence de n et d est simple et procède d'un raisonnement par l'absurde. Il utilise le fait que le carré d'un nombre impair l'est aussi, ce qui est évident car $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$, et des manipulations faciles. Supposons qu'il existe un couple d'entiers (n, d) tel que $(n/d)^2 = 2$, et montrons que cela conduit à une contradiction. On peut supposer que n est impair ou que d est impair (si n et d sont tous les deux pairs, on les divisera par 2 autant de fois que nécessaire). On tire de l'égalité supposée que $n^2 = 2d^2$, dont on déduit que n est pair (s'il était impair, n^2 le serait et ne pourrait pas être égal à $2d^2$, qui est pair). En posant $n = 2n'$, on obtient $4n'^2 = 2d^2$, donc $2n'^2 = d^2$. On en tire alors que d est pair (s'il était impair, d^2 le serait aussi et ne pourrait pas être égal à $2n'^2$). On a ainsi prouvé que n et d étaient tous les deux pairs, ce qui contredit le fait que nous avions déjà simplifié la fraction n/d . L'équation $X^2 - 2 = 0$ est donc insoluble, pour celui qui ne recherche que des solutions s'écrivant comme quotient des deux entiers.

Aujourd'hui, on sait qu'en acceptant les nombres irrationnels (non-quotients de deux entiers), l'équation est résoluble, et qu'elle a deux solutions que nous écrivons $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ se calcule aussi loin qu'on le souhaite, bien que son écriture en base 10 (ou n'importe quelle base) ne s'arrête jamais (puisqu'il est irrationnel) : $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887...$

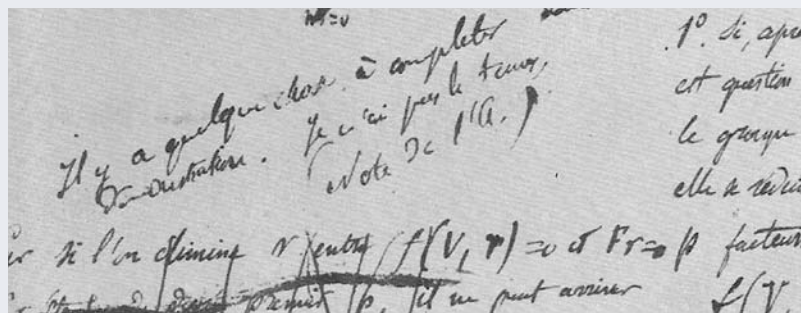
La morale de cette histoire est que, pour mesurer les objets les plus simples de la géométrie, nous ne pouvons nous contenter des quotients de deux entiers. L'élémentaire figure géométrique d'un carré nous oblige à accepter l'infinité des chiffres de certains nombres. La notion moderne

2. L'équation du cinquième degré

Les équations polynomiales de degré 5 ne possèdent pas toujours de solution s'exprimant à l'aide des coefficients de l'équation, des opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, quotient) et du symbole de racine (cinquième ou autre). Cette insolubilité par radicaux des équations de degré 5 ou plus fut établie par Niels Abel, et précisée par Évariste Galois. Leurs travaux mirent fin à une quête infructueuse de plus de trois siècles, durant lesquels on chercha à généraliser les méthodes de Cardan pour le troisième degré et de Ferrari pour le quatrième.

Abel (1802-1829) et Galois (1811-1832) sont morts jeunes et mal compris. Toutefois le biographe d'Abel, Carl Anton Bjerknes, écrit : « Au reste, ne regrettons pas trop que l'existence d'Abel se soit passée si tristement. Celui qui, pendant toute sa vie, a dû aller à une aussi rude école, a le privilège de voir et de penser autrement que la majorité des hommes ; et si, par ses efforts et ses études profondes, il a acquis le don de lire les pensées des temps à venir, il ne se fait pas l'illusion d'être compris par les siens ou par ses contemporains. Mais, quand le bonheur lui échapperait, il n'en a pas moins beaucoup vu, et il sait qu'il n'a pas vécu en vain. »

La veille de sa mort en duel, Galois annota son mémoire sur la théorie de l'insolubilité des équations de degré supérieur à 5. Pressé par le temps, il écrivit (ci-dessous) : « Il y a quelque chose à compléter... »



3. Faisable ou pas ?

Certains problèmes d'équations ou d'inéquations sont traitables par algorithme, d'autres non. Le travail du mathématicien est de préciser l'endroit exact où passe cette frontière entre le possible et l'impossible.

Voici deux exemples, l'un d'un problème décidable et l'autre d'un problème indécidable, proposés en 2002 par Miklós Laczkovich (*Proc. of the Am. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 2235-2240).

1) On considère toutes les expressions $f(x)$ utilisant

des nombres entiers, l'addition, la soustraction, la multiplication, x , $\sin(x^n)$, et $\sin(x.\sin(x^n))$.

Exemple : $f(x) = 3 \sin(\sin(x^5)) \sin(x^3) - 1$.

Il n'existe pas d'algorithmes permettant de savoir, pour toute expres-

sion $f(x)$ de ce type, s'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > 0$.

2) On considère toutes les expressions $f(x)$ utilisant des nombres entiers, l'addition, la soustraction, la multiplication, x , $\sin(x^n)$, $\cos(x^n)$. Exemple : $f(x) = 3\sin(x^5) + \cos(x^3)\sin(x^2) - \cos(x^7)$.

On connaît un algorithme permettant de savoir, pour toute expression $f(x)$ de ce type, s'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > 0$.

de nombre réel est née d'une insolubilité rencontrée par les Grecs.

Les équations polynomiales à coefficients entiers ont d'ailleurs été à l'origine d'autres progrès mathématiques quelques siècles plus tard, notamment l'introduction des nombres complexes.

L'équation $X^2 + 2X + 2 = 0$ n'a pas de solutions réelles : le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul, d'où :

$$X^2 + 2X + 2 = X^2 + 2X + 1 + 1 = (X+1)^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Aucun nombre réel, rationnel ou irrationnel, ne peut annuler le polynôme qui ne prend que des valeurs strictement positives. On a affaire à une équation insoluble. Comme précédemment, elle ne l'est plus si on élargit notre idée de nombres et qu'on envisage que les nombres négatifs soient des carrés. Jérôme Cardan, au milieu du XVI^e siècle, franchit ce pas téméraire, qui a conduit à la théorie des nombres complexes.

En introduisant un nombre i dont le carré est -1 (c'est-à-dire $i^2 = -1$), on obtient un ensemble de nombres particulièrement intéressants, les nombres complexes. Ils permettent d'affirmer qu'une équation polynomiale de degré n possède toujours n solutions (théorème fondamental de l'algèbre). Un autre énoncé plus précis est que tout polynôme de degré n , à coefficients réels ou complexes, se factorise sous la forme du

produit d'une constante c par n monômes $(X - s)$ avec c et s des nombres complexes (les s sont les racines du polynôme).

Les logiciels de calcul formel utilisent les nombres complexes. Ils indiquent ainsi que l'équation $X^2 + 2X + 2 = 0$ a deux solutions $s_1 = -1 + i$ et $s_2 = -1 - i$, ce qui conduit à la factorisation : $X^2 + 2X + 2 = [X - (-1 + i)][X - (-1 - i)]$.

Un autre problème d'équation insoluble est à l'origine de l'algèbre moderne. La méthode apprise au lycée pour résoudre les équations du second degré utilise des racines carrées. Souvenez-vous : $aX^2 + bX + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$, $s = [-b \pm \sqrt{\Delta}]/2a$.

Résoluble par radicaux ?

La méthode s'étend aux équations du second degré à coefficients complexes. Mieux, toujours grâce aux nombres complexes, Cardan montra (en volant semble-t-il l'idée à Niccolò Fontana Tartaglia) que toute équation du troisième degré a des solutions qui s'expriment à l'aide de racines cubiques. Mieux encore, Ludovico Ferrari établit que toute équation du quatrième degré a des solutions qui s'expriment avec des racines quatrièmes. On s'est alors imaginé qu'on trouverait des formules utilisant les racines n -ièmes pour résoudre les équations polynomiales de degré n .

Ce problème de la «résolubilité des équations de degré n par radicaux n -ièmes» se révéla plus coriace que prévu : pendant presque trois siècles, on a essayé en vain de trouver une méthode générale pour les équations de degré 5, qui aurait succédé à celle de Ferrari.

L'illusion fut dissipée quand le mathématicien norvégien Niels Abel (1802-1829) prouva en 1824 que certaines équations de degré 5, comme $X^5 - 3X - 1 = 0$, ne sont pas résolubles par radicaux. Une telle équation a bien cinq solutions comme l'indique le théorème fondamental de l'algèbre, mais on ne peut pas les exprimer en utilisant seulement les notations usuelles et les radicaux cinquièmes (ou autres). Vouloir ne considérer comme nombre que ce qu'on obtient à partir des entiers, des radicaux et des opérations arithmétiques habituelles, comme vouloir se limiter aux nombres quotients d'entiers, rend insolubles des équations qui ont pourtant des solutions. Dit autrement : ajouter $\sqrt{2}$ et les nombres du même type ne suffit pas pour avoir tous les nombres réels.

Notre logiciel de calcul indique que l'équation $X^5 - 3X - 1 = 0$ a trois solutions réelles et deux solutions complexes. Il n'en propose pas des expressions formelles, puisqu'elles n'existent pas, mais il les écrit sous forme approchée quand on le lui demande :

$$\begin{aligned} X_1 &= 1,38879198440725... \\ X_2 &= -334734141943352... \\ X_3 &= -1,21464804269846... \\ X_4 &= 0,080295100117... + 1,3283551098...i \\ X_5 &= 0,080295100117... - 1,3283551098...i \end{aligned}$$

Notons que Abel avait été précédé par le mathématicien italien Paolo Ruffini (1765-1822) qui affirma l'insolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, mais sans en proposer de démonstrations satisfaisantes. Le jeune et génial mathématicien français Évariste Galois (1811-1832) perfectionna les résultats d'Abel, ouvrant la voie au point de vue structural en algèbre qui prévaut encore aujourd'hui. Les trois découvreurs de l'insolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, du fait de la nouveauté de leurs travaux, ne réussirent que très difficilement à les faire reconnaître par la communauté mathématique. Celle-ci les considéra avec scepticisme ou mépris, avant

d'encenser ces exceptionnels inventeurs... après leur mort.

Cela n'était pas du tout évident au moment où les extensions de la notion de nombres furent proposées, mais la leçon est que si on se donne une équation et un domaine de nombres dans lequel on recherche les solutions, il se peut que la réponse soit : « Dans le domaine où vous recherchez des solutions, vous n'en trouverez pas ! ». En mathématiques, établir « Ce problème n'a pas de solution » est une façon parfaitement satisfaisante de le résoudre... pourvu que l'insolubilité soit démontrée. De plus, se dégager de l'insolubilité en introduisant de nouveaux nombres est une méthode féconde et un moteur efficace du progrès.

Le problème dit des n corps est moins connu, mais d'une nature comparable aux questions que nous venons de mentionner. Il s'agit de déterminer les trajectoires de n corps soumis aux forces de gravitation. Dans le cas de deux corps, la solution des équations a été donnée par Newton. Pour plus de deux corps, le problème est souvent présenté comme insoluble. Pourtant, ce n'est vrai que si l'on recherche des solutions d'un certain type ou par des méthodes fixées à l'avance. On a tort de dire que le problème des n corps est insoluble, en laissant entendre qu'il présente des difficultés mathématiques insurmontables ou qu'il n'a pas du tout de solution.

Ce problème possède des solutions que la nature calcule, seule, sans mal, et que nos machines savent aussi déterminer avec une précision aussi grande qu'on le veut. Les insolubilités mentionnées ne sont que partielles, comme quand on voulait des solutions avec radicaux pour les équations de degré supérieur à 4. Sur un plan pratique, même quand les solutions d'une équation de degré supérieur à 4 ne s'expriment pas avec des radicaux, on sait en calculer des valeurs approchées aussi bonnes qu'on le souhaite. On dispose d'excellentes techniques pour traiter le problème des n corps et mener des simulations de la dynamique de n corps avec un million de corps quand on prend en compte les collisions, et avec un milliard de corps si on néglige les collisions.

Dans le cas du problème des trois corps, quelque chose d'intéressant et d'inattendu se

produit. Une solution analytique exacte a été découverte par Karl Sundman en 1909. Elle se présente sous la forme de séries infinies dont la convergence est extrêmement lente, au point qu'il faudrait utiliser $10^{8000000}$ termes de ces séries pour obtenir une précision équivalente à celle des calculs habituels d'éphémérides. Ces séries sont donc inutiles et, pour résoudre le problème numérique, on utilise des méthodes approchées générales plutôt que les séries de Sundman. Rechercher des solutions ayant de belles expressions mathématiques est ici contre-productif !

Notons que la recherche sur ces sujets se poursuit avec, parfois, d'étonnantes découvertes. En 2013, Milovan Suvakov et Veljko Dmitrasinovic de l'Université de Belgrade découvrirent à l'aide de calcul massif par ordinateur 13 nouvelles familles de solutions périodiques au problème des trois corps, complétant les trois familles périodiques déjà connues, dues à Lagrange et Euler pour la première, à Roger Broucke et Michel Hénon pour la seconde et à Christopher Moore pour la troisième.

Quand le calcul numérique est impossible

Pour de nombreuses familles d'équations, les méthodes numériques donnent des résultats satisfaisants, qu'on cherche bien évidemment à perfectionner, par exemple pour que

la convergence des calculs soit plus rapide – une tâche sans fin. Il existe pourtant un cas remarquable où la situation est désespérée, même en utilisant des méthodes numériques.

Le nombre Ω (oméga) de Chaitin, défini comme une probabilité d'arrêt d'une certaine machine abstraite, est la solution d'une équation faisant intervenir une énumération de machines élémentaires. C'est un nombre parfaitement défini, dont on peut approcher la valeur en menant des calculs, ce qui d'ailleurs a été fait en 2002 par Cristian Calude, Michael Dinneen et Chi-Kou Shu. Cependant, cette résolution d'équation est déconcertante pour une double raison.

– On sait produire des suites de nombres rationnels $\{r_n\}$ ayant Ω pour limite, mais on ne sait pas dire jusqu'où il faudrait aller dans la suite pour avoir une erreur inférieure à $1/n$ par exemple. En calculant $\{r_n\}$ on est certain qu'on s'approche, mais il est impossible de proposer des évaluations de l'erreur qui tendent vers 0 quand n augmente.

– On sait que toute suite de nombres rationnels $\{r_n\}$ calculée par algorithme et approchant Ω le fait plus lentement que n'importe quelle suite calculable de nombres rationnels s'approchant de 0. La convergence vers 0 de l'erreur est assurée, mais elle sera toujours plus lente que celle de $1/n$, plus lente que celle de $1/\lfloor \ln(n) \rfloor$, plus lente que celle de $1/\lfloor \ln(\ln(n)) \rfloor$, etc. $\lfloor x \rfloor$ désigne la

4. L'insolubilité du problème des trois corps

Le problème des n corps en physique donne des équations difficiles à résoudre analytiquement dès que n est supérieur à 2. Mais cette impossibilité de résoudre le problème en produisant des solutions dotées d'expressions mathématiques simples

(il y a diverses façons de définir ce que sont de telles expressions) est analogue à l'impossibilité de la résolution des équations polynomiales de degré 5 par radicaux et ne signifie pas que les équations sont insolubles. Les

méthodes de calcul approché réussissent très bien à les résoudre. On les perfectionne sans relâche et aujourd'hui, on sait simuler la dynamique de systèmes de n corps avec n dépassant un million.

Les progrès réalisés par les méthodes numériques portent aussi sur la classification des solutions périodiques du problème des trois corps. En 2013, Milovan Suvakov et Veljko Dmitrasinovic de l'Université de Belgrade ont ainsi découvert 13 nouvelles familles de solutions périodiques au problème des trois corps. (voir la prépublication <http://arxiv.org/pdf/1303.0181v1.pdf>).

5. Les ordinateurs prendront-ils le pouvoir ?

Les logiciels de calcul formel, de démonstration automatique et les assistants de preuve (qui aident le mathématicien à écrire des démonstrations sans erreur) conduisent à une pratique des mathématiques où l'ordinateur tient un rôle de plus en plus important.

Dans un article intitulé *Post-Human Mathematics*, le mathématicien-physicien David Ruelle, professeur honoraire à l'IHÉS, s'interroge sur l'avenir des mathématiques quand les ordinateurs y joueront un rôle peut-être devenu dominant (<http://arxiv.org/pdf/1308.4678.pdf>).

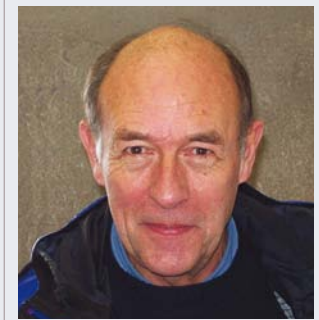
« Ma conclusion temporaire est que nous ne pouvons pas exclure que les ordinateurs puissent penser, mais que s'ils y

arrivent, alors ce sera d'une façon très différente de celle des humains. La situation est un peu semblable à celle de la chimie organique de synthèse : la synthèse de composés organiques n'est pas impossible, loin de là, mais on y arrive en général en procédant d'une façon très différente des organismes vivants. [...] Les mathématiques d'aujourd'hui sont une construction humaine où les

ordinateurs sont de plus en plus utilisés, mais ne jouent pas un rôle créatif.

La situation pourrait changer : les ordinateurs pourraient devenir créatifs, et puisqu'ils fonctionnent d'une manière très différente des cerveaux humains, ils pourraient produire des mathématiques très différentes. [...] Je ne suis pas impatient de voir les ordinateurs remplacer les mathématiciens humains. Ce serait, ou ce sera, une chose triste à certains égards, mais je ne veux pas être aveugle à cette éventualité. Les effets de la synthèse organique industrielle sur l'humanité ont été

énormes, ce fut parfois bien et parfois terrible, mais aucun retour en arrière à l'époque pré-Wohler n'est possible. De même, les mathématiques entrent probablement dans une ère nouvelle, et il est sans aucun doute intéressant de deviner ce qu'elle sera. »



partie entière de x , utilisée ici pour avoir des suites de nombres rationnels].

L'équation dont Ω est solution est donc insoluble en ce sens qu'aucune méthode ne sera jamais efficace pour en calculer la solution même de manière approchée. Cette forme d'insolubilité pratique que la théorie du calcul et la logique mathématique nous offrent ici est loin d'être la seule que le XX^e siècle a mise en évidence. Elle prolonge les résultats d'insolubilité de Ruffini, Abel et Galois.

Des algorithmes pour toute équation ?

Nous qualifierons cependant tous ces cas d'insolubilité de bénins : on sait que l'équation n'a pas de solution ou on sait que, du fait de sa nature, elle a des solutions qu'on ne connaîtra que de manière approchée et même parfois sans pouvoir contrôler l'erreur, mais au fond, l'équation est quand même traitée. Ce qui importe pour le mathématicien et encore plus pour l'ingénieur qui perfectionne les programmes de calcul formel est la mise au point de méthodes générales permettant de résoudre une famille d'équations.

En algèbre linéaire, on sait par exemple comment s'y prendre face à n'importe quel système d'équations du type :

$$x + 2y + 3z = 1,$$

$$x + 3y + 2z = 1,$$

$$3x + y + 2z = 1,$$

dont $x = y = z = 1/6$ est l'unique solution, ce qu'un logiciel de calcul formel trouve immédiatement. La présence de coefficients irrationnels ne gêne pas un bon logiciel, qui résoudra sans plus de peine un système tel que :

$$x + 2y + 3z = \pi + 5,$$

$$2x + 3y + 2z = 2\pi + 5,$$

$$3x + \pi y + \pi z = 5\pi,$$

dont les solutions sont $x = \pi, y = z = 1$.

Des algorithmes mis au point par les mathématiciens sont introduits dans le programme des logiciels de calcul formel. Ils traitent donc parfaitement des familles entières d'équations et de systèmes d'équations, voire d'inéquations. La question est alors de savoir si on pourra toujours aller plus loin dans la mise au point d'algorithmes qui fonctionneraient pour des familles variées d'équations et d'inéquations, de plus en plus vastes.

Par expérience, on sait depuis longtemps qu'il est difficile de résoudre les équations

polynomiales à coefficients entiers comme $X^2 + 5Y^3 + 2Z^4 = 11$ dont on cherche des solutions entières. Ces équations sont dites diophantiennes (en l'honneur du mathématicien grec Diophante d'Alexandrie). David Hilbert affirma en 1900 qu'il n'existait probablement pas de méthode générale pour les résoudre. L'un des grands succès de la logique mathématique fut de donner un sens et une démonstration à cette intuition. Achievant un travail commencé par les chercheurs américains Martin Davis, Hilary Putnam et Julia Robinson, le mathématicien russe Yuri Matiyasevich prouva en 1970 qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir, pour toute équation diophantienne, si elle a ou non des solutions entières.

Cette « indécidabilité du dixième problème de Hilbert » signifie que les logiciels de calcul formel ne sont pas tout-puissants. Jamais on n'en programmera un qui, face à n'importe quelle équation diophantienne, saura dire si elle possède des solutions entières, et *a fortiori* les déterminer quand il y en a.

Aujourd'hui encore, on s'intéresse aux équations diophantiennes. On recherche non plus des solutions qui soient des nombres entiers, mais des nombres appartenant à d'autres structures algébriques. Des résultats

positifs et négatifs sont obtenus, précisant le paysage de l'insolubilité selon les familles de nombres que l'on considère. Le travail du mathématicien est devenu double : trouver des méthodes algorithmiques de résolution pour des familles d'équations les plus larges possible et, le cas échéant, démontrer que de telles méthodes n'existent pas.

Kirsten Eisenträger et Alexandra Shlapentokh ont ainsi établi en 2013 un résultat très général résolvant le dixième problème de Hilbert pour les équations diophantiennes dont on recherche les solutions parmi les fonctions. Assez étrangement, un problème très simple de cette catégorie reste obstinément mystérieux : celui des nombres rationnels. En effet, on ignore s'il existe oui ou non un algorithme permettant de trouver les solutions rationnelles de toute équation polynomiale à coefficients rationnels.

Simplifier n'importe quelle expression ?

Terminons en mentionnant un résultat inattendu qui montre que même la vérification d'une formule ou sa simplification pose parfois d'insurmontables difficultés.

Si on vous souffle que $X = 1$, $Y = 2$ et $Z = 3$ est une solution de l'équation diophantienne $X^2 + 2Y^3 - 3Z - 8 = 0$, vous n'aurez aucun mal à le vérifier (il suffit de remplacer les variables de la partie gauche par les valeurs proposées, et de faire le calcul). Vérifier une identité semble être une simple question de patience qu'un ordinateur sera toujours capable de mener. Contrôler que des solutions proposées pour une équation sont correctes est une tâche plus facile qu'en trouver les solutions : c'est la fameuse asymétrie entre « trouver » et « vérifier », si utile en cryptographie. Pourtant, même le travail de vérification peut être difficile : il existe des familles de problèmes de vérifications qu'aucun algorithme ne traitera jamais parfaitement.

Parmi les identités faisant intervenir les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, on a la fameuse relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ainsi que $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, dont on déduit par exemple : $4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x - 1 = 0$. Un logiciel de calcul formel trouve effectivement 0 quand on lui demande de simplifier

$4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x - 1$. Plus compliqué (j'ai essayé !), il trouve aussi que $2 \sin x \cos x + 4 \cos^3 x - 3 \cos x - \sin 2x - \cos 3x$ vaut 0 pour tout x .

Face à de telles identités, dispose-t-on de méthodes de simplification efficaces et générales, c'est-à-dire garantissant que si on leur donne une expression identiquement nulle, elles s'en apercevront ?

Le théorème de Daniel Richardson, démontré en 1968 et récemment perfectionné par Mikloz Laczkovich, indique que, là encore, le pouvoir des algorithmes est limité. Ce théorème décrit une catégorie de problèmes de simplification qu'aucun algorithme ne sera jamais capable de traiter parfaitement.

D. Richardson considère toutes les expressions désignant des fonctions d'une variable réelle et construites en utilisant des nombres rationnels, les constantes π et $\ln(2)$, les fonctions $\sin x$, $\exp x$ et $|x|$ (valeur absolue de x), et les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de composition de fonctions. Il démontre qu'aucun algorithme ne peut reconnaître toutes les expressions désignant la fonction nulle. Autrement dit, aucune méthode automatique ne sera jamais capable de simplifier toutes les formules qui peuvent l'être.

Une multitude de résultats de ce type sont maintenant connus concernant les équations entre mots, entre matrices, entre fonctions, ou concernant le calcul automatique des primitives. Ils nous apprennent que l'automatisation des tâches de calculs et de résolution d'équations est limitée dans toutes les directions. Cela n'empêche pas des progrès continus dans la programmation des calculs mathématiques et, au contraire, permet d'y être plus efficaces.

Le travail de ceux qui améliorent les logiciels de calcul formel présente un double visage : d'une part, identifier ce qui est impossible en prouvant des résultats comme ceux de Y. Matiyasevich et de D. Richardson, afin d'en déduire des objectifs raisonnables ; d'autre part, rechercher des bons algorithmes qui mèneront des calculs de plus en plus complexes, rapides et variés. Les équations insolubles sont au cœur des mathématiques depuis l'Antiquité. C'est en les maîtrisant et en les comprenant que, bien souvent, les mathématiciens avancent.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'Université
de Lille
et chercheur

au Laboratoire d'informatique
fondamentale de Lille (LIFL).

Le blog de Jean-Paul Delahaye
sur SciLogs.fr :
www.scilogs.fr/complexites/

BIBLIOGRAPHIE

E. Reiter, *Limits of Computation : An Introduction to the Undecidable and the Intractable*, CRC Press, 2013.

J. Koenigsmann, *Undecidability in number theory*, prépublication [<http://arxiv.org/abs/1309.0441>], 2013.

M. Suvakov et V. Dmitrasinovic, *Three classes of Newtonian three-body planar periodic orbits*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, 114301, 2013.

B. Poonen, *Undecidable problems : A sampler*, prépublication [[arXiv:1204.0299](http://arxiv.org/abs/1204.0299)], 2012.

C. Calude *et al.*, *Computing a glimpse of randomness*, *Experimental Mathematics*, vol. 11(3), pp. 361-370, 2002.

M. Henkel, *Sur la solution du problème des trois corps de Karl Sundman en 1909*, *Philosophia Scientiae*, vol. 5(2), pp. 161-184, 2001.

M. Petkovšek *et al.*, *A = B*, AK Peters, 1996.



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Les X-men, des mutants prometteurs

Capables de traverser des murs ou de manipuler des flammes, les X-men sont des humains dont l'ADN a subi des mutations. Est-il possible d'identifier la nature de ces mutations à la lumière des connaissances actuelles en génétique ?

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

L'avertissement adressé aux hommes par Kitty Pryde, *alias* Shadowcat, résume l'intrigue de l'univers des X-men : « Nous sommes des mutants. Nés différents des humains de base, avec un génome amélioré qui nous confère des superpouvoirs. Si vous nous énervez, c'est à vos risques et périls. »

Cette mutante capable de traverser la matière – tel le Passe-muraille de Marcel Aymé – et les autres X-men sont à nouveau à l'écran dans le film *X-men, Days of Future Past* de Bryan Singer. Cet épisode dépeint l'origine complexe du conflit entre les mutants qui croient que l'humanité peut les accepter et ceux qui ne le pensent pas et veulent l'exterminer. Mais qui sont ces étranges personnages et que nous apprennent-ils sur les mutations génétiques et la biologie de l'évolution ?

Imaginé par le scénariste Stan Lee et le dessinateur Jack Kirby, les X-men sont des personnages de bandes dessinées qui apparaissent pour la première fois en 1963 aux États-Unis, dans les pages de l'éditeur Marvel Comics, et en 1970 en France dans la revue *Strange*. Ces êtres présentent des mutations génétiques qui leur confèrent des pouvoirs comme l'invisibilité, la télépathie ou la télékinésie – ils sont capables de communiquer et de déplacer des objets par la pensée. Mais ces pouvoirs, qui s'expriment en général à partir de l'adolescence, peuvent vite devenir des malédictions s'ils ne sont pas maîtrisés. Le professeur Charles Xavier,



1. LES X-MEN SONT DES MUTANTS dotés de différents superpouvoirs. Ce film retrace le conflit entre deux chefs mutants et raconte comment ces êtres sont acceptés ou rejetés par la société.

mutant doté de pouvoirs psychiques, crée l'« École pour jeunes surdoués » qui enseigne aux mutants à se connaître, se contrôler et être capables de vivre en bonne intelligence avec les humains « normaux ».

Mais les X-men sont sujets à des persécutions : ils sont espionnés, fichés et certains humains confondant mutation et maladie veulent même les vacciner, voire les exterminer. Leur histoire ressemble à celle du roman *À la poursuite des Slans* d'Alfred van Vogt (1940) qui met en scène des mutants télépathes pourchassés par les hommes. Dans les aventures des X-men, Magneto, le chef des mutants rebelles, est un rescapé des camps de concentration nazis.

Si ces histoires de mutants, aussi violentes soient-elles, font l'apologie du respect d'autrui et du droit à la différence, elles ne nous expliquent pas ce qu'est une mutation.

Quelle explication biologique ?

En biologie, un mutant est un organisme dont l'information génétique – sa séquence d'ADN ou d'ARN dans le cas de certains virus – a été modifiée. Il existe de nombreux types de mutations. Pour déterminer celles qui affectent les X-men, voyons d'abord comment ces mutants apparaissent. Les parents très ordinaires du jeune Saint-John Allerdyce (*alias* Pyro) sont sidérés lorsqu'ils le découvrent jouant avec le feu et capable de projeter à