

positifs et négatifs sont obtenus, précisant le paysage de l'insolubilité selon les familles de nombres que l'on considère. Le travail du mathématicien est devenu double : trouver des méthodes algorithmiques de résolution pour des familles d'équations les plus larges possible et, le cas échéant, démontrer que de telles méthodes n'existent pas.

Kirsten Eisenträger et Alexandra Shlapentokh ont ainsi établi en 2013 un résultat très général résolvant le dixième problème de Hilbert pour les équations diophantiennes dont on recherche les solutions parmi les fonctions. Assez étrangement, un problème très simple de cette catégorie reste obstinément mystérieux : celui des nombres rationnels. En effet, on ignore s'il existe oui ou non un algorithme permettant de trouver les solutions rationnelles de toute équation polynomiale à coefficients rationnels.

## Simplifier n'importe quelle expression ?

Terminons en mentionnant un résultat inattendu qui montre que même la vérification d'une formule ou sa simplification pose parfois d'insurmontables difficultés.

Si on vous souffle que  $X = 1$ ,  $Y = 2$  et  $Z = 3$  est une solution de l'équation diophantienne  $X^2 + 2Y^3 - 3Z - 8 = 0$ , vous n'aurez aucun mal à le vérifier (il suffit de remplacer les variables de la partie gauche par les valeurs proposées, et de faire le calcul). Vérifier une identité semble être une simple question de patience qu'un ordinateur sera toujours capable de mener. Contrôler que des solutions proposées pour une équation sont correctes est une tâche plus facile qu'en trouver les solutions : c'est la fameuse asymétrie entre « trouver » et « vérifier », si utile en cryptographie. Pourtant, même le travail de vérification peut être difficile : il existe des familles de problèmes de vérifications qu'aucun algorithme ne traitera jamais parfaitement.

Parmi les identités faisant intervenir les fonctions  $\sin x$  et  $\cos x$ , on a la fameuse relation  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , ainsi que  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , dont on déduit par exemple :  $4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x - 1 = 0$ . Un logiciel de calcul formel trouve effectivement 0 quand on lui demande de simplifier

$4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x - 1$ . Plus compliqué (j'ai essayé !), il trouve aussi que  $2 \sin x \cos x + 4 \cos^3 x - 3 \cos x - \sin 2x - \cos 3x$  vaut 0 pour tout  $x$ .

Face à de telles identités, dispose-t-on de méthodes de simplification efficaces et générales, c'est-à-dire garantissant que si on leur donne une expression identiquement nulle, elles s'en apercevront ?

Le théorème de Daniel Richardson, démontré en 1968 et récemment perfectionné par Mikloz Laczkovich, indique que, là encore, le pouvoir des algorithmes est limité. Ce théorème décrit une catégorie de problèmes de simplification qu'aucun algorithme ne sera jamais capable de traiter parfaitement.

D. Richardson considère toutes les expressions désignant des fonctions d'une variable réelle et construites en utilisant des nombres rationnels, les constantes  $\pi$  et  $\ln(2)$ , les fonctions  $\sin x$ ,  $\exp x$  et  $|x|$  (valeur absolue de  $x$ ), et les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de composition de fonctions. Il démontre qu'aucun algorithme ne peut reconnaître toutes les expressions désignant la fonction nulle. Autrement dit, aucune méthode automatique ne sera jamais capable de simplifier toutes les formules qui peuvent l'être.

Une multitude de résultats de ce type sont maintenant connus concernant les équations entre mots, entre matrices, entre fonctions, ou concernant le calcul automatique des primitives. Ils nous apprennent que l'automatisation des tâches de calculs et de résolution d'équations est limitée dans toutes les directions. Cela n'empêche pas des progrès continus dans la programmation des calculs mathématiques et, au contraire, permet d'y être plus efficaces.

Le travail de ceux qui améliorent les logiciels de calcul formel présente un double visage : d'une part, identifier ce qui est impossible en prouvant des résultats comme ceux de Y. Matiyasevich et de D. Richardson, afin d'en déduire des objectifs raisonnables ; d'autre part, rechercher des bons algorithmes qui mèneront des calculs de plus en plus complexes, rapides et variés. Les équations insolubles sont au cœur des mathématiques depuis l'Antiquité. C'est en les maîtrisant et en les comprenant que, bien souvent, les mathématiciens avancent.

## L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE  
est professeur  
émérite  
à l'Université  
de Lille  
et chercheur  
au Laboratoire d'informatique  
fondamentale de Lille (LIFL).

Le blog de Jean-Paul Delahaye  
sur [SciLogs.fr](http://SciLogs.fr) :  
[www.scilogs.fr/complexites/](http://www.scilogs.fr/complexites/)

## BIBLIOGRAPHIE

E. Reiter, *Limits of Computation : An Introduction to the Undecidable and the Intractable*, CRC Press, 2013.

J. Koenigsmann, *Undecidability in number theory*, prépublication [<http://arxiv.org/abs/1309.0441>], 2013.

M. Suvakov et V. Dmitrasinovic, *Three classes of Newtonian three-body planar periodic orbits*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, 114301, 2013.

B. Poonen, *Undecidable problems : A sampler*, prépublication [[arXiv:1204.0299](http://arxiv.org/abs/1204.0299)], 2012.

C. Calude *et al.*, *Computing a glimpse of randomness*, *Experimental Mathematics*, vol. 11(3), pp. 361-370, 2002.

M. Henkel, *Sur la solution du problème des trois corps de Karl Sundman en 1909*, *Philosophia Scientiae*, vol. 5(2), pp. 161-184, 2001.

M. Petkovšek *et al.*, *A = B*, AK Peters, 1996.



Retrouvez la rubrique  
Logique & calcul sur  
[www.pourlascience.fr](http://www.pourlascience.fr)

## SCIENCE &amp; FICTION

# Les X-men, des mutants prometteurs

*Capables de traverser des murs ou de manipuler des flammes, les X-men sont des humains dont l'ADN a subi des mutations. Est-il possible d'identifier la nature de ces mutations à la lumière des connaissances actuelles en génétique ?*

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

L'avertissement adressé aux hommes par Kitty Pryde, *alias* Shadowcat, résume l'intrigue de l'univers des X-men : « Nous sommes des mutants. Nés différents des humains de base, avec un génome amélioré qui nous confère des superpouvoirs. Si vous nous énervez, c'est à vos risques et périls. »

Cette mutante capable de traverser la matière – tel le Passe-muraille de Marcel Aymé – et les autres X-men sont à nouveau à l'écran dans le film *X-men, Days of Future Past* de Bryan Singer. Cet épisode dépeint l'origine complexe du conflit entre les mutants qui croient que l'humanité peut les accepter et ceux qui ne le pensent pas et veulent l'exterminer. Mais qui sont ces étranges personnages et que nous apprennent-ils sur les mutations génétiques et la biologie de l'évolution ?

Imaginé par le scénariste Stan Lee et le dessinateur Jack Kirby, les X-men sont des personnages de bandes dessinées qui apparaissent pour la première fois en 1963 aux États-Unis, dans les pages de l'éditeur Marvel Comics, et en 1970 en France dans la revue *Strange*. Ces êtres présentent des mutations génétiques qui leur confèrent des pouvoirs comme l'invisibilité, la télépathie ou la télékinésie – ils sont capables de communiquer et de déplacer des objets par la pensée. Mais ces pouvoirs, qui s'expriment en général à partir de l'adolescence, peuvent vite devenir des malédictions s'ils ne sont pas maîtrisés. Le professeur Charles Xavier,



**1. LES X-MEN SONT DES MUTANTS** dotés de différents superpouvoirs. Ce film retrace le conflit entre deux chefs mutants et raconte comment ces êtres sont acceptés ou rejetés par la société.

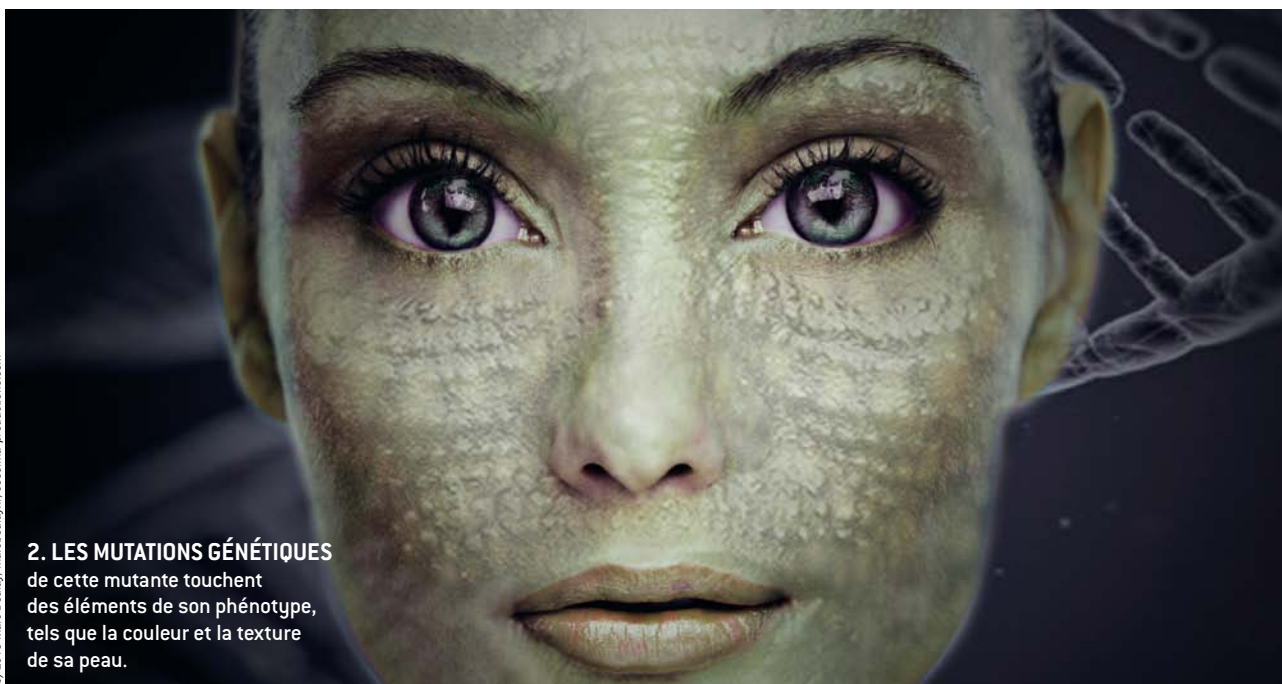
mutant doté de pouvoirs psychiques, crée l'« École pour jeunes surdoués » qui enseigne aux mutants à se connaître, se contrôler et être capables de vivre en bonne intelligence avec les humains « normaux ».

Mais les X-men sont sujets à des persécutions : ils sont espionnés, fichés et certains humains confondant mutation et maladie veulent même les vacciner, voire les exterminer. Leur histoire ressemble à celle du roman *À la poursuite des Slans* d'Alfred van Vogt (1940) qui met en scène des mutants télépathes pourchassés par les hommes. Dans les aventures des X-men, Magneto, le chef des mutants rebelles, est un rescapé des camps de concentration nazis.

Si ces histoires de mutants, aussi violentes soient-elles, font l'apologie du respect d'autrui et du droit à la différence, elles ne nous expliquent pas ce qu'est une mutation.

## Quelle explication biologique ?

En biologie, un mutant est un organisme dont l'information génétique – sa séquence d'ADN ou d'ARN dans le cas de certains virus – a été modifiée. Il existe de nombreux types de mutations. Pour déterminer celles qui affectent les X-men, voyons d'abord comment ces mutants apparaissent. Les parents très ordinaires du jeune Saint-John Allerdyce (*alias* Pyro) sont sidérés lorsqu'ils le découvrent jouant avec le feu et capable de projeter à



## 2. LES MUTATIONS GÉNÉTIQUES

de cette mutante touchent des éléments de son phénotype, tels que la couleur et la texture de sa peau.

distance la flamme d'un briquet – un pouvoir nommé pyrokinésie. Le fait qu'un mutant puisse naître de parents « normaux » suggère donc qu'une modification génétique s'est produite soit dans le spermatozoïde fécondant ou l'ovule fécondé (la mutation est alors dite germinale ou *de novo*) soit dans l'œuf après la fécondation (la mutation est alors dite postzygotique). Chez l'enfant, les mutations germinales sont souvent à l'origine d'anomalies chromosomiques. Statistiquement, elles affectent plus les spermatozoïdes que les ovules, bien que le risque augmente avec l'âge de la mère.

Les mutations postzygotiques étant bien plus rares, les X-men sont plus probablement des mutants germinaux. Mais puisque leurs pouvoirs tendent à se manifester à l'adolescence, ils pourraient aussi être issus de mutations touchant leur propre ADN en cours de développement. Cependant, ces mutations sont transmises uniquement aux cellules filles de la cellule mutée et peuvent parfois produire des cellules tumorales, voire des cancers, ce qui n'est pas le cas des X-men.

Autre possibilité, leurs mutations sont conditionnelles. Elles sont toujours présentes, mais ne s'expriment qu'à certains moments, dans certaines conditions. C'est le cas des drosophiles mutantes sensibles aux variations de température. Dans le cas des X-men, nous pourrions imaginer des mutations conditionnelles s'exprimant à la suite d'un stress ou d'une poussée d'hormones de croissance.

Quel que soit le type de mutation, les X-men apparaissent sur toute la surface de la Terre. Leurs mutations semblent donc aléatoires, et non produites par des agents mutagènes spécifiques tels les rayonnements de haute énergie ou des produits chimiques. Ces mutations participeraient au « bruit de fond » de l'évolution, produisant parfois de nouvelles formes qui sont sélectionnées ou non. Même si la plupart sont imperceptibles, les mutations sont donc des moteurs de l'évolution et les X-men seraient un exemple du potentiel évolutif de l'espèce humaine. Mais contrairement à ce qu'affirme Kitty Pryde, le génome des X-men n'est pas amélioré par rapport à celui des hommes, il est juste différent.

## Un saut évolutif

Dans l'univers Marvel, les X-men appartiennent d'ailleurs à l'espèce *Homo superior*. Cette dénomination rappelle certaines théories dépassées de « racisme scientifique » qui considéraient certains individus comme supérieurs aux autres, justifiant ainsi des atrocités, telles que l'esclavage ou la Shoah. Cette dérive n'est pas possible avec les X-men qui sont de diverses origines : par exemple, Épervier est apache tandis que Tornade est africaine. Mais ces mutations font-elles pour autant des X-men une espèce différente d'*Homo sapiens* ? Ce saut évolutif qui transforme une espèce en une autre le temps

d'une génération est nommé saltation, et la mutation responsable une macromutation. Ce phénomène, observé chez des vers et des arthropodes, est si rare qu'il est parfois considéré comme un modèle évolutif hypothétique. Mais de récentes expériences sur des gènes architectes (participant à la morphogenèse du corps) ont montré que de petites modifications peuvent créer des mutants très différents de leurs parents, telle la drosophile *Antennapedia* qui porte une paire de pattes à la place des antennes !

Ces mutations rappellent la théorie des « monstres prometteurs » développée par l'embryologiste Richard Goldschmidt (1878-1958) selon laquelle les macromutations, certes rares, sont à l'origine de la spéciation tandis que les micromutations, plus nombreuses, ne produisent que des variations intraspécifiques. En 1935, l'embryologiste quitta son Allemagne natale, car il était juif ; en cela il rappelle un peu Magneto. Goldschmidt s'est réfugié aux États-Unis où il est devenu professeur d'université, comme Charles Xavier ! Goldschmidt nous enseigne donc que les X-men pourraient bien être des mutants prometteurs. ■

J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.



Retrouvez la rubrique  
Science & fiction sur  
[www.pourlascience.fr](http://www.pourlascience.fr)



## ART &amp; SCIENCE

# Alerte à la pollution en rouge et en vert

*Comment connaître les pollutions des siècles passés ?  
En examinant les proportions de rouge et de vert des ciels  
peints par les grands maîtres, tel le Britannique William Turner.*

Loïc MANGIN

**E**n mars 2014, plusieurs alertes à la pollution, notamment en région parisienne, ont été lancées par l'Agence *Airparif*. En effet, les seuils tolérés de concentration en particules fines (des poussières que l'on distingue selon différentes catégories de diamètre) ont été dépassés à plusieurs reprises. Ces particules fines, ou aérosols, sont d'origine humaine ou naturelle : dans le premier cas, elles sont émises par les installations de chauffage, les transports, l'industrie... ; dans le second, elles émanent de feux de forêts, d'éruptions volcaniques, etc.

Les équipes d'*Airparif* utilisent divers instruments scientifiques pour leurs mesures *in situ*. Mais comment faire pour étudier les pollutions du passé, dont on pourrait tirer des enseignements ? Christos Zerefos, de l'Académie d'Athènes, en Grèce, a récemment proposé d'examiner les toiles des grands maîtres du paysage, au premier rang desquels le Britannique William Turner (1775-1851), surnommé le peintre de la lumière. Sa *Vue du lac de Petworth : rayons de soleil, un cerf buvant* (voir l'illustration) le démontre.

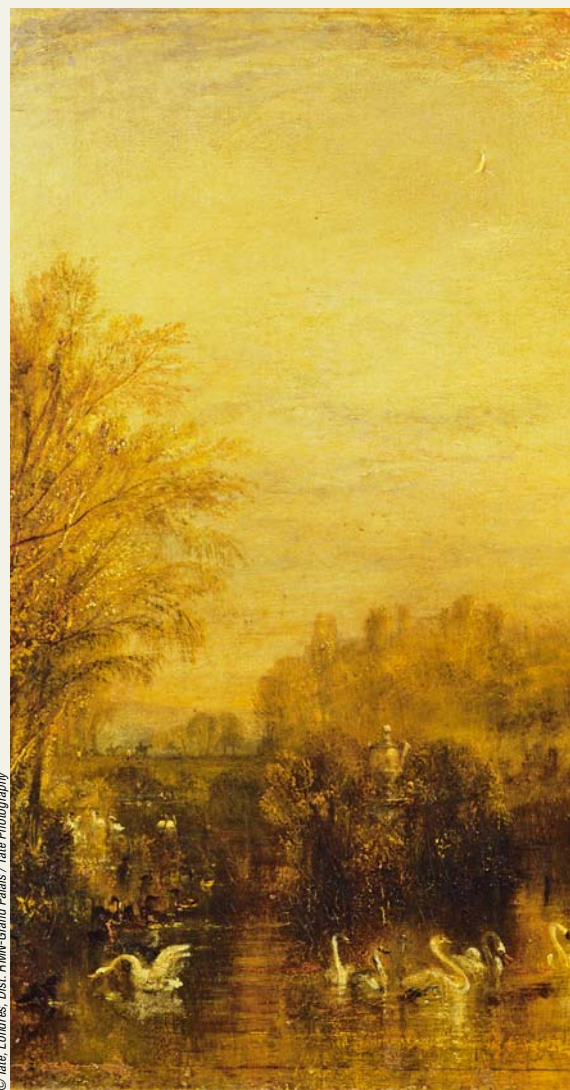
Avec ses collègues, Ch. Zerefos a peaufiné une méthode conçue en 2007 pour déterminer la quantité d'aérosols dans le ciel au moment où les œuvres ont été réalisées. Pour ce faire, les chercheurs ont calculé un indice, le ratio de rouge et de vert dans les représentations du ciel figurant sur

124 toiles conservées à la *Tate Gallery*, à Londres. Ce ratio reflète l'épaisseur optique de l'atmosphère, qui dépend de la quantité d'aérosols. La lumière du Soleil est filtrée par l'atmosphère qui favorise les grandes longueurs d'onde (le rouge) au détriment des courtes (le vert). Cet effet, accentué lorsque l'astre du jour est bas, par exemple au coucher, est d'autant plus important que la quantité d'aérosols est grande. Ainsi, le ratio de rouge et de vert est un indicateur de pollution.

Et c'est bien ce qui a été vérifié. Les toiles de Turner peintes peu de temps après l'éruption du volcan Tambora, en Indonésie, entre le 5 et le 10 avril 1815, sont plus riches en rouge que celles d'autres périodes. Lors de cet événement, des cendres ont été projetées à plus de 44 kilomètres d'altitude, d'où elles sont parties pour faire plusieurs fois le tour de la Terre. Les conséquences furent telles que l'on nomma l'été 1815 l'« été sans soleil », et l'année 1816 l'« année sans été ».

De même, certaines toiles du Français Edgar Degas (1834-1917) témoignent de l'éruption du volcan Krakatoa, lui aussi indonésien, les 26 et 27 août 1883.

La méthode du ratio de rouge et de vert renseigne bien sur le contenu en aérosols de l'atmosphère. Un autre pan de l'étude a consisté à regrouper des tableaux peints entre 1500 et 2000 par intervalles de 50 ans. Les années caractérisées par une éruption volcanique et les trois suivantes étaient écartées. On put alors calculer



© Tate, Londres. Dist. RMN-Grand Palais / Tate Photography

une moyenne des ratios de rouge et de vert pour chaque intervalle et en fin de compte obtenir des mesures continues pour cinq siècles. Les physiciens grecs n'ont pu alors que constater ce que d'autres techniques avaient montré par ailleurs : les émissions de particules n'ont cessé d'augmenter depuis le milieu du XIX<sup>e</sup> siècle jusqu'à la fin du XX<sup>e</sup>.

Pour vérifier le bien-fondé de la méthode, l'équipe de Ch. Zerefos a eu une idée originale. Elle a sollicité les services du peintre grec Panayiotis Tetsis et lui a demandé de représenter les couchers de soleil de plusieurs jours consécutifs, au mois de juin 2010, sur

l'île d'Hydra, à environ 80 kilomètres au Sud d'Athènes. L'artiste ignorait qu'un nuage de sable du Sahara passait au-dessus de l'île (la trajectoire a été calculée à partir de modèles et d'observations satellitaires).

En mesurant d'une part les ratios de rouge et de vert dans les œuvres obtenues, et d'autre part le contenu de l'atmosphère par des méthodes radiométriques, les chercheurs ont pu corroborer leur hypothèse fondée sur les toiles du XIX<sup>e</sup> siècle. Le ciel est bien plus riche en rouge en présence de poussières qu'en leur absence. Certes, le sable n'est pas constitué de cendres volcaniques, mais son effet sur la lumière solaire est similaire.

Le grand nombre de peintures prises en compte, et ce quelle que soit l'école artistique dont pouvait se revendiquer l'artiste, plaide pour la robustesse de la méthode. Elle vient donc s'ajouter à l'arsenal dont les climatologues disposent pour reconstituer les climats du passé. Elle a même un avantage, par exemple, sur l'étude des carottes de glaces : elle est beaucoup plus confortable puisqu'elle consiste à aller au musée ! ■

Ch. Zerefos *et al.*, Further evidence of important environmental information content in red-to-green ratios as depicted in paintings by great masters, *Atmos. Chem. Phys.*, vol. 14, pp. 2987-3015, 2014.

