

au nuage numérique peut sembler logique. Les données dispersées sur le Web présentent des ressemblances avec le contenu du cerveau d'un ami. Internet stocke de l'information, l'extrait en réponse aux questions et interagit avec nous de façon étonnamment humaine, par exemple via l'application Siri (un logiciel de commande vocale d'Apple).

Cependant, Internet ne ressemble à aucune personne réelle : il est toujours présent et fonctionnel, et il sait presque tout. L'information accessible avec un smartphone est bien plus riche que ce que peuvent enregistrer des individus, voire des groupes entiers. Elle est constamment mise à jour et, à moins d'une panne, elle n'est pas sujette aux déformations et aux oublis qui touchent les souvenirs mémorisés par le cerveau.

L'efficacité d'Internet contraste avec les méthodes de recherche plus anciennes. Pour demander une information à des amis, il faut les contacter, espérer qu'ils aient la réponse, et attendre qu'ils rassemblent leurs souvenirs. De même, pour rechercher l'information dans un livre, on doit parfois aller à la bibliothèque et parcourir les rayonnages. Avec Google et Wikipédia, elle est disponible en un instant.

Une estime de soi modifiée

Internet perturbe la distinction entre les connaissances internes et externes. Il est parfois plus rapide d'en extraire une information que de consulter sa propre mémoire. Un téléphone renvoie un résultat de recherche si vite que cela peut brouiller la frontière entre les souvenirs personnels et les immenses gisements numériques distribués sur la Toile.

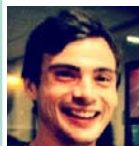
Récemment, à l'Université Harvard, nous avons étudié dans quelle mesure les gens incorporent Internet à leur sens d'eux-mêmes. Pour ce faire, nous avons conçu un questionnaire déterminant la qualité que chacun attribue à sa propre mémoire. Quelqu'un qui est d'accord avec les affirmations « Je suis intelligent » et « Je mémorise bien les choses » a ainsi une bonne estime de ses capacités cognitives.

Nous avons posé aux participants une série de questions, auxquelles ils devaient répondre avec ou sans l'assistance de Google, puis nous leur avons soumis le questionnaire. L'estime de soi cognitive était notablement plus élevée chez ceux qui venaient d'utiliser Internet. Même si les réponses étaient

■ LES AUTEURS



Daniel WEGNER (1948-2013) était professeur de psychologie à l'Université Harvard, à Cambridge, aux États-Unis.



Adrian WARD est postdoctorant à l'Université du Colorado, à Boulder. Il a obtenu son doctorat en 2013 à l'Université Harvard, sous la direction de D. Wegner.

■ BIBLIOGRAPHIE

A. Lieury et al., *Loisirs numériques et performances cognitives et scolaires : une étude chez 27 000 élèves de la 3^e des collèges*, *Bulletin de Psychologie*, à paraître, 2014.

B. Sparrow et al., *Google effects on memory : Cognitive consequences of having information at our fingertips*, *Science*, vol. 333, pp. 776-778, 2011.

D. Wegner, *Transactive memory : A contemporary analysis of the group mind*, dans *Theories of Group Behavior* (éds. B. Mullen et G. R. Goethals), Springer, 1986.

récupérées mot pour mot sur la Toile, ils avaient l'impression de les avoir obtenues grâce à leurs propres capacités mentales !

Nous avons ensuite vérifié que le surcroît d'intelligence ressenti par les utilisateurs de Google ne provenait pas juste du fait qu'ils avaient répondu à davantage de questions. Pour ce faire, nous avons répété l'étude en indiquant de façon mensongère aux participants dépourvus du moteur de recherche qu'ils avaient trouvé la bonne réponse à presque toutes les questions. Même quand les membres des deux groupes croyaient avoir réussi de façon égale, ceux qui s'étaient servis d'Internet se déclaraient plus intelligents.

Ces résultats suggèrent que le renforcement de l'estime de soi cognitive ne résulte pas juste de la rétroaction positive immédiate (« J'ai fourni les bonnes réponses »). Google donne à ses utilisateurs le sentiment qu'il fait partie de leur propre boîte à outils cognitive. Les participants à l'étude percevaient un résultat de recherche comme une information non pas tirée d'Internet, mais extraite de leur mémoire. Ainsi, ils s'attribuaient le mérite d'une connaissance qui n'était que le produit d'un algorithme de recherche de Google.

L'impact psychologique de ce nouveau fonctionnement de la mémoire, à cheval entre Google et le cerveau, ne manque pas d'ironie : l'ère de l'information semble avoir créé des individus qui ont l'impression d'avoir plus de connaissances que quiconque auparavant, alors qu'ils en savent de moins en moins sur le monde qui les entoure, comme le révèle leur dépendance vis-à-vis d'Internet.

En nous libérant de la nécessité de mémoriser les faits, nous pourrions sans doute consacrer le supplément de ressources mentales disponibles à d'autres tâches. Nous développerons peut-être une nouvelle forme d'intelligence, qui ne serait plus ancrée dans les mémoires locales, hébergées par chaque cerveau. Elle pourrait réunir la créativité de l'esprit humain et l'étendue des connaissances d'Internet.

À mesure que les progrès de l'informatique brouilleront les frontières entre l'esprit et la machine, nous dépasserons sans doute certaines limites de la mémoire et de la pensée. Cela ne signifie pas que nous perdrons notre identité. Nous sommes juste en train de former un nouveau partenariat transactif, qui ne se limite plus à d'autres humains, mais inclut une source d'information plus puissante que le monde ait jamais connu.

Les notes de Ramanujan un trésor inépuisé

Ariel Bleicher

Au début du XX^e siècle, le prodige indien Srinivasa Ramanujan a couvert plusieurs carnets de résultats mathématiques étonnants. Les mathématiciens s'en inspirent encore pour faire de nouvelles découvertes.

Un samedi matin de 1984, alors que Ken Ono est encore lycéen, il ouvre la boîte aux lettres familiale à Baltimore, aux États-Unis, et y trouve une enveloppe fine comme du papier de riz et couverte de timbres colorés. Elle est destinée à son père, un mathématicien japonais peu expansif. Quand K. Ono lui tend ce courrier, son père lève les yeux du bloc-notes jaune sur lequel il est occupé à griffonner des équations et pose son stylo. Délicatement, il décachette l'enveloppe et déplie la lettre qu'elle contient.

« Cher Monsieur », commence-t-elle, « J'ai appris [...] que vous avez contribué à la sculpture en mémoire de feu mon mari [...]. J'en suis heureuse. » Et elle est signée « S. Janaki Amal », que l'en-tête à l'encre rouge identifie comme la veuve de « (Feu) Srinivasa Ramanujan (Génie Mathématique) ».

C'est la première fois que le jeune K. Ono entend parler de Ramanujan. Autodidacte indien, le prodige mathématique Ramanujan a énoncé il y a presque un siècle des propriétés qui « semblaient à peine

L'ESSENTIEL

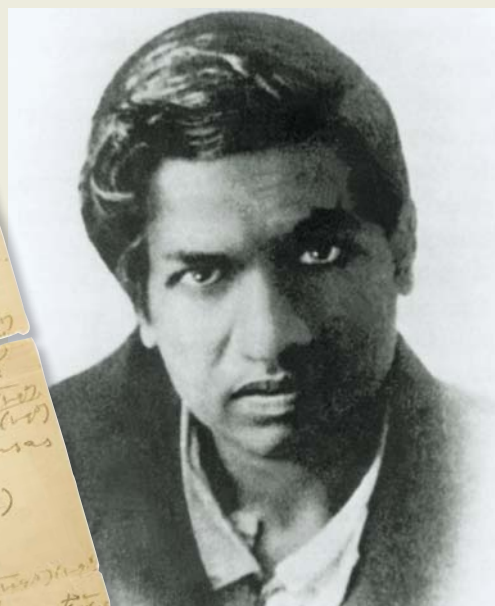
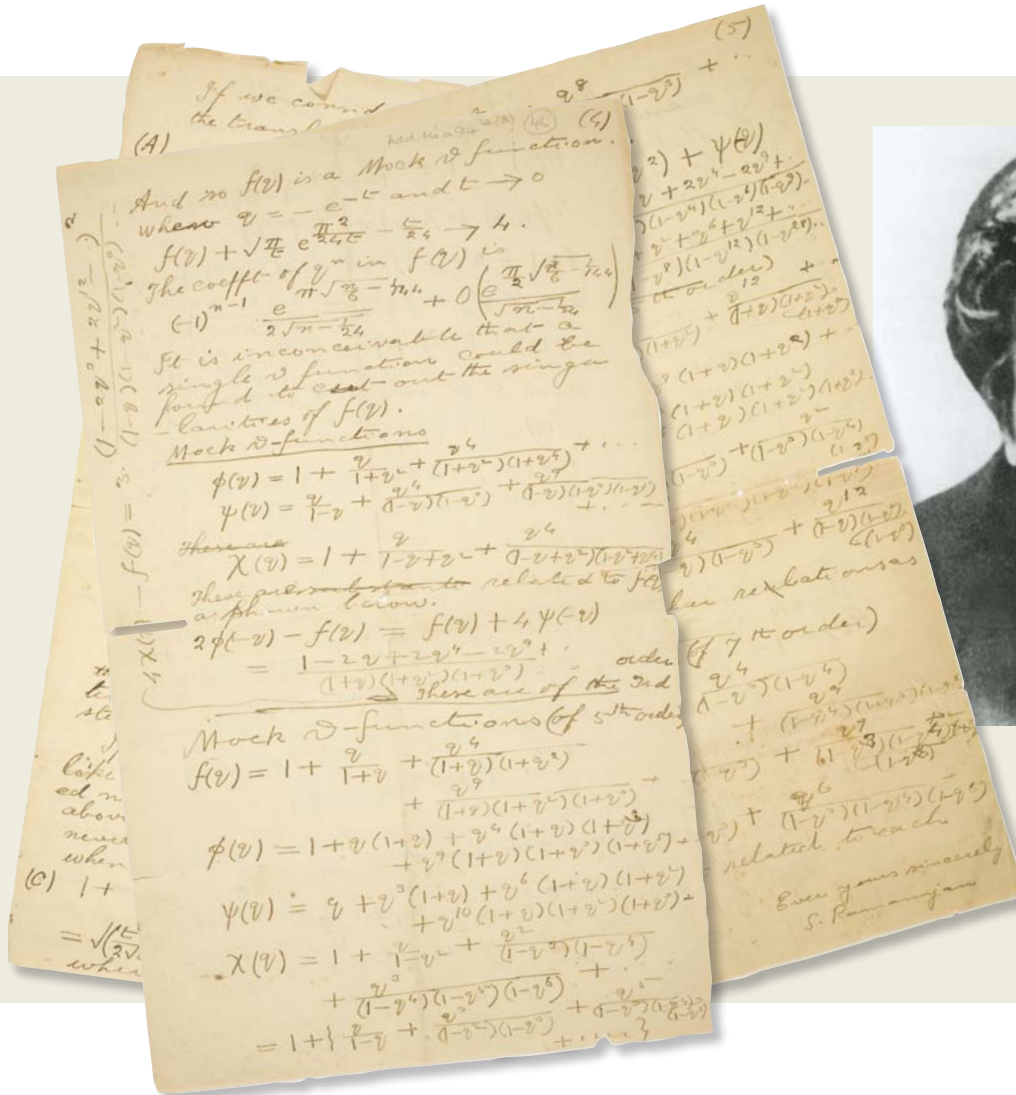
- L'autodidacte indien Srinivasa Ramanujan avait noté plus de 3 000 formules et propriétés liées à la théorie des nombres. Beaucoup se sont révélées exactes et ont inspiré les générations suivantes de chercheurs.
- Ken Ono et d'autres mathématiciens ont récemment découvert dans certaines des notes de Ramanujan d'autres idées fécondes.
- Ces travaux de mathématiques pures pourraient aussi servir dans d'autres domaines, tels que la cryptographie.

Pages des carnets : Jon Smith, Trinity College, Université de Cambridge. Photo de Ramanujan : Science Source

croyables », comme l'écrivait son collègue britannique Godfrey Harold Hardy. Pourtant, ses travaux ont inspiré des domaines entièrement nouveaux des mathématiques et des théories qui, dans plusieurs cas, ont valu à leurs concepteurs la médaille Fields, l'équivalent pour les mathématiques du prix Nobel.

Pendant ses études de mathématiques, K. Ono, aujourd'hui professeur de théorie des nombres à l'Université Emory, en Géorgie, n'a jamais eu de raison de prêter particulièrement attention à Ramanujan. À sa connaissance, le « Génie Mathématique » n'avait laissé derrière lui aucune intuition nouvelle en rapport avec sa spécialité en théorie des nombres, les « formes modulaires », des objets abstraits quadridimensionnels dotés de remarquables propriétés de symétrie (voir l'encadré page 53).

Ramanujan fit toutefois une réapparition spectaculaire dans la vie de K. Ono en 1998, quand il avait 29 ans. Alors qu'il rassemblait les travaux du prodige pour en présenter une anthologie, Bruce Berndt, mathématicien de l'Université de l'Illinois



1. AVANT DE MOURIR,
Ramanujan (1887-1920) avait
rempli plusieurs carnets de plus
de 3 000 propositions,
souvent profondes, portant
sur la théorie des nombres.
Les mathématiciens découvrent
encore aujourd'hui dans ses notes
des idées intéressantes.

à Urbana-Champaign, a mis la main sur un manuscrit passé plutôt inaperçu. Comme le texte traitait des formes modulaires, B. Berndt le scanna et l'envoya par courrier électronique à K. Ono, pensant qu'il parviendrait peut-être à déchiffrer certains énoncés étranges.

Parvenu aux deux tiers du manuscrit, K. Ono s'arrêta. De son écriture d'écolier soigneux, Ramanujan avait inscrit six énoncés mathématiques qui semblaient très bizarres à K. Ono, alors qu'ils touchaient à sa spécialité. Pour K. Ono, ces propositions étaient sûrement fausses. «Je les ai regardées et je me suis dit : "Impossible. C'est n'importe quoi."» Sa première réaction fut de tenter de prouver que Ramanujan avait tort.

Nul ne sait comment Ramanujan est parvenu à tous les résultats qu'il a consignés. Il s'est instruit tout seul en utilisant un manuel anglais dépassé et, vers l'âge de 25 ans, tout en travaillant comme employé du gouvernement, il a commencé à faire part de ses idées dans des lettres adressées à des mathématiciens anglais. Il reçut une

seule réponse positive. Elle provenait de Hardy, alors jeune professeur à l'avenir prometteur, qui l'invita à venir travailler avec lui à Cambridge. Après deux ans seulement passés à l'étranger, Ramanujan tomba malade, à la suite des pénuries de nourriture de la Première Guerre mondiale. Amaigri et fiévreux, il rentra en Inde où il mourut en 1920. Il n'avait que 32 ans.

Une mine d'idées en héritage

Outre 37 articles publiés, Ramanujan a laissé derrière lui des lettres, des manuscrits partiellement achevés et trois carnets de notes reliés de cuir. En les examinant, Hardy et d'autres mathématiciens ont trouvé qu'il avait redécouvert des théorèmes classiques de la théorie des nombres, initialement démontrés par des sommités des mathématiques. Ramanujan avait en outre noté d'autres propriétés que personne n'avait vues. Un mathématicien de métier aurait le réflexe d'étayer chaque affirmation par une démonstration. Mais Ramanujan

ne s'en donnait pas la peine. Il remplissait page après page de longues listes de théorèmes et de calculs qu'il traitait de tête ou sur une ardoise, et notait rarement comment il avait obtenu ses résultats. Les trois carnets contiennent à eux seuls plus de 3 000 énoncés de ce type et, depuis la mort de Ramanujan, les mathématiciens ont investi beaucoup d'efforts pour les confirmer ou les infirmer.

B. Berndt avait commencé à creuser les archives de Ramanujan dans les années 1970. Il n'avait pas encore fini plus de deux décennies après, quand il mit la main sur le manuscrit contenant les six propositions bizarres que K. Ono était bien décidé à réfuter. Ces énoncés dressent un parallèle entre les formes modulaires et les nombres de partitions des entiers. Ces nombres constituent une suite d'entiers dénombrant toutes les façons d'additionner des entiers plus petits pour obtenir celui de départ. Les nombres de partitions des entiers sont donnés par la fonction $p(n)$, qui compte les combinaisons d'entiers positifs dont la somme est

égale à un entier n donné. Par exemple, $p(4)$ est égal à 5, car on a cinq combinaisons donnant le nombre 4 : $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$, $2 + 2$, $1 + 3$ et 4.

La fonction $p(n)$ et les nombres qu'elle produit ne constituent un problème simple qu'en apparence. Des siècles durant, les mathématiciens ont peiné pour trouver parmi ces nombres des motifs qui permettraient de les prédire, de les calculer ou de les relier à d'autres fonctions et théorèmes. Et c'est Ramanujan qui fit la première percée significative. Avec Hardy, il mit au point une méthode pour trouver rapidement une valeur approximative des nombres de partitions des entiers. Afin de vérifier l'exactitude de leurs approximations, ils firent appel à Percy Alexander MacMahon, commandant dans l'artillerie britannique à la retraite et as du calcul, pour déterminer à la main les 200 premiers nombres de partitions (les valeurs de $p(n)$ pour n allant de 1 à 200).

Partitions des entiers : des propriétés cachées

Les approximations de Ramanujan et Hardy se révélèrent remarquablement précises. Plus important, l'étude de la liste de MacMahon a conduit Ramanujan à l'une de ses observations les plus célèbres. MacMahon avait disposé les valeurs de $p(n)$, en commençant par la convention $p(0) = 1$, en cinq colonnes. Ramanujan remarqua que toutes les entrées de la dernière colonne – c'est-à-dire tous les cinq nombres de partitions en commençant par $p(4)$ – sont divisibles par 5, et il prouva que cette propriété est valable pour tout le reste de la suite des nombres de partitions (voir la figure 2). Autrement dit, $p(5k - 1)$ est divisible par 5 pour tout entier positif k . C'était stupéfiant : les partitions concernent des additions de nombres, et personne n'imaginait qu'elles pouvaient avoir des propriétés faisant intervenir la division.

Ramanujan repéra d'autres motifs similaires. Il prouva ainsi que tous les sept nombres de partitions des entiers, en commençant par $p(5)$, on a un multiple de 7 (c'est-à-dire que $p(7k - 2)$ est divisible par 7 pour tout entier positif k). De même, tous les 11 nombres de partitions à partir de $p(6)$, on a un multiple de 11 : $p(11k - 5)$ est divisible par 11 pour tout entier positif k . Mystérieusement, les « congruences de Ramanujan » s'arrêtaient

1	1	2	3	5
7	11	15	22	30
42	56	77	101	135
176	231	297	385	490
627	792	1002	1255	1575

2. LE NOMBRE DE PARTITIONS d'un entier n est le nombre $p(n)$ de façons dont il peut s'écrire comme une somme d'entiers positifs. Ramanujan a remarqué que tous les cinq nombres dans la suite $p(n)$, on a un multiple de 5 (colonne de droite), et il a prouvé que cette propriété se répète à l'infini.

L'AUTEUR



Ariel BLEICHER est journaliste scientifique indépendante à New York. Elle a notamment fait partie de la rédaction de la revue de technologie *IEEE Spectrum*.

BIBLIOGRAPHIE

M. J. Griffin et al., *A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties*, prépublication, 2014 (<http://arxiv.org/abs/1401.7718>).

M. J. Griffin et al., *Ramanujan's mock theta functions*, *Proc. of the Nat. Acad. of Sci. USA*, vol. 110(15), pp. 5765-5768, 2013.

A. Folsom et al., *l -adic properties of the partition function*, *Advances in Mathematics*, vol. 229(3), pp. 1586-1609, 2012.

J. Borwein et P. Borwein, *Srinivasa Ramanujan*, dans *Les mathématiciens*, Belin-Pour la Science, pp. 262-275, 2010.

là. « Il semble qu'il n'y ait pas de propriétés aussi simples pour des modules impliquant des nombres premiers autres que ceux-ci », écrivit Ramanujan dans un article de 1919, en se référant aux nombres premiers 5, 7 et 11.

Après sa mort, des mathématiciens ont cherché à savoir si les partitions des entiers présentaient des propriétés moins simples. Mais à la fin des années 1990, il n'avaient pas mis au jour plus d'une poignée de congruences supplémentaires faisant intervenir certains nombres premiers et puissances de nombres premiers, sans régularité apparente (dont 29, 17^3 et 23^6). Ils ont commencé à suspecter que de tels motifs étaient imprévisibles et extrêmement rares.

Mais quand K. Ono lut les six propositions évoquées plus haut, il comprit qu'elles pourraient contredire cette impression. Les mathématiciens pensaient depuis longtemps que les nombres de partitions des entiers sont seulement reliés à un sous-ensemble de formes modulaires avec lesquelles il est difficile de travailler. Or les six propositions de Ramanujan relient les deux domaines d'une façon profonde que nul n'avait anticipé.

Les formules étaient correctes à chaque fois

Comme Ramanujan ne consignait pas ses démonstrations, K. Ono ne put identifier directement ses erreurs de raisonnement. Il décida donc de tester, avec divers nombres, les formules avancées par Ramanujan. Or ces formules étaient correctes à chaque fois. K. Ono se rendit compte que Ramanujan devait avoir raison « parce que l'on ne peut pas être assez créatif pour inventer quelque chose de ce genre et que ce soit vrai 100 fois, à moins de savoir pourquoi cette formule est vraie, toujours ». Il ferma alors les yeux et réfléchit intensément : qu'avait donc compris Ramanujan et qui a échappé à tous les autres ?

K. Ono savait que les formes modulaires sont « parsemées de congruences » – ces propriétés de divisibilité dont Ramanujan avait trouvé quelques exemples parmi les nombres de partitions des entiers. En réfléchissant aux six propositions, l'idée vint à l'esprit de K. Ono que s'il envisageait la fonction $p(n)$ comme une forme modulaire déguisée, il pourrait montrer qu'elles sont vraies.

Une autre idée suivit dans la foulée : il s'aperçut qu'avec quelques ajustements, les théories qu'il avait développées sur les formes modulaires pouvaient être de puissants outils non seulement pour vérifier les énoncés de Ramanujan, mais aussi pour mettre au jour des propriétés plus profondes de la fonction $p(n)$.

Multiples congruences...

K. Ono parvint ainsi à prouver que les congruences des nombres de partitions des entiers ne sont pas rares du tout. Les mathématiciens avaient supposé qu'il y en avait peu au-delà de 5, 7 et 11. En fait, comme le découvrit K. Ono, il en existe une infinité.

Les collègues de K. Ono saluèrent cette découverte, mais cela ne lui suffit pas pour

être satisfait. Il avait beau avoir prouvé que les congruences des nombres de partitions des entiers sont partout, il n'était pas en mesure de déterminer où précisément.

Quand K. Ono bute sur un problème, il le met de côté avec d'autres problèmes non résolus jusqu'à ce qu'il refasse naturellement surface. Le problème de la prédiction des congruences des nombres de partitions resta ainsi en sommeil pendant cinq ans, jusqu'à l'arrivée du postdoctorant Zachary Kent à l'Université Emory, au printemps de 2010. Il surgit alors un jour au hasard d'une conversation, et bientôt ils ne parlèrent plus que de cela – dans leurs bureaux, à la pause café et lors de longues promenades dans les bois au Nord d'Atlanta.

Petit à petit, ils ont mentalement construit une superstructure labyrinthique où les nombres de partitions peuvent être

parfaitement rangés. Pour ce faire, ils ont fait appel à des méthodes p -adiques, où l'on considère les objets arithmétiques à des multiples près des puissances successives d'un nombre premier p (par exemple 13, 13^2 , 13^3 et ainsi de suite). Or les nombres ainsi obtenus obéissent à une structure fractale : ils se répètent selon des motifs presque identiques à différentes échelles, comme les branches successives d'un cristal de glace. Ce résultat montre que les nombres de partitions des entiers ne sont pas simplement une séquence aléatoire de nombres avec des symétries fortuites ici ou là. Au contraire, ces nombres ont « une structure interne d'une grande beauté », explique K. Ono, qui les rend prévisibles et bien plus fascinants à étudier.

Il fallut plusieurs mois à K. Ono, Z. Kent et leur collaboratrice Amanda Folsom de

Formes modulaires et fonctions thêta

Les formes modulaires et les fonctions thêta sont des fonctions de variables complexes vérifiant certaines relations fonctionnelles ; elles incarnent de multiples phénomènes liés à la géométrie algébrique, l'arithmétique et la théorie des groupes.

Plusieurs des grands noms des mathématiques du XIX^e siècle leur sont associés : Gotthold Eisenstein, Carl Gustav Jacob, Henri Poincaré, Bernhard Riemann... De nos jours, ces fonctions et leurs généralisations interviennent dans la théorie des représentations des groupes, des courbes elliptiques et des variétés abéliennes, domaines importants des mathématiques du XX^e siècle.

Notons $\sum_{n \geq 0}$ l'opération de somme sur tous les entiers n positifs ou nuls. Une forme modulaire en la variable complexe z peut être vue comme une série infinie $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ où $q = e^{2\pi i z}$, convergente quand la partie imaginaire de z est strictement positive (donc pour $|q| < 1$), et qui, principalement, obéit à l'équation fonctionnelle :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),$$

pour des entiers a, b, c, d vérifiant $ad - bc = 1$ et des propriétés de congruence telles que, par exemple, « N divise c ». L'entier N est le « niveau » et k est le « poids » de la forme modulaire. Les formes modulaires de poids 2 ont joué un rôle fondamental dans la preuve par Andrew Wiles du grand théorème de Fermat, en 1994 (théorème selon lequel il n'existe pas d'entiers positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, dès que l'entier n est supérieur à 2).

Le lien des formes modulaires avec les courbes elliptiques peut être illustré avec l'exemple de la courbe $y^2 - y = x^3 - x$.

Pour tout nombre premier p , notons N_p le nombre de solutions de cette équation modulo p (c'est-à-dire à un multiple de p près) et posons :

$a(p) = p - N_p$.
Étendons la suite des $a(p)$ à tous les entiers positifs

(premiers ou non) par les règles $a(p^m) - a(p)a(p^{m-1}) + pa(p^{m-2}) = 0$ et $a(nm) = a(n)a(m)$ pour n et m premiers entre eux. Alors d'après un cas particulier du théorème de A. Wiles, la fonction $f = \sum a(n)q^n$ est une forme modulaire de poids 2 et de niveau 37.

Quant aux fonctions thêta, la fonction typique est la fonction de deux variables suivante :

$$\theta(u, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} t^n$$



REPRÉSENTATION DE LA partie réelle d'une fonction modulaire liée aux « fonctions elliptiques de Weierstrass », sur le disque $|q| < 1$ (nombres complexes q dont le module est inférieur à 1). Les régions où la partie réelle de la fonction est nulle sont en noir [les valeurs sont croissantes du bleu-vert au jaune-rouge].

avec $q = e^{2\pi i z}$ et $t = e^{2\pi i u}$ et où $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne la somme sur tous les entiers relatifs n (négatifs et positifs).

En tant que fonction de u , la fonction θ vérifie : $\theta(u + az + b) = e(z, u) \theta(u, z)$, où $e(z, u)$ est un facteur non nul ayant une expression simple.

En prenant $u = 0$, la fonction $\theta_0(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}$ est une forme modulaire « tordue » de poids 1/2 ; elle vérifie notamment :

$$\theta_0(-1/z) = \alpha^{1/2} \theta_0(z)$$

où $\alpha = e^{-i\pi/4}$.

Les fonctions thêta recèlent une foule d'informations arithmétiques. On a par exemple remarqué que $\theta_0^4(z) = 1 + \sum_{n > 1} r(n) q^n$ où $r(n)$ est le nombre de représentations de l'entier n comme somme de quatre carrés d'entiers ; cela a permis à Jacobi de démontrer que $r(n)$ est égal à huit fois la somme des diviseurs de n si n est impair, et à 24 fois la somme des diviseurs impairs de n si n est pair.

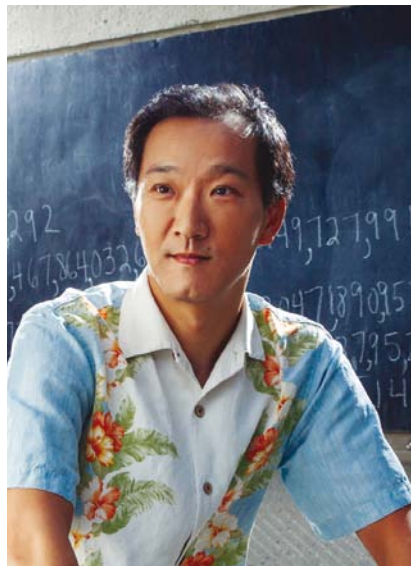
– Marc Hindry
Institut de mathématiques
de Jussieu – Paris Rive Gauche

l'Université Yale pour démêler tous les fils de leur nouvelle théorie. Mais ils réussirent à prouver que les congruences des nombres de partitions apparaissent de façon calculable. Il en existe pour tous les nombres premiers et leurs puissances. Mais au-delà de 11, les motifs deviennent beaucoup plus complexes, ce qui explique probablement pourquoi Ramanujan ne les a jamais déterminées. K. Ono et ses collègues présentèrent leurs résultats à un symposium spécialement organisé à l'Université Emory en 2011.

De puissants outils

L'exploration des intuitions de Ramanujan a conduit K. Ono à d'autres développements qui pourraient un jour trouver une utilité hors des mathématiques. En mêlant la préscience de Ramanujan avec les mathématiques actuelles, K. Ono et ses collègues ont mis au point de puissants outils de calcul, utiles en mathématiques pures, mais qui pourraient aussi déboucher sur de meilleures méthodes de cryptage des données informatiques et aider à étudier les trous noirs.

En collaboration avec Jan Bruinier, de l'Université technique de Darmstadt en



3. LES TRAVAUX DE KEN ONO, mathématicien à l'Université Emory, à Atlanta aux États-Unis, confirment et généralisent certains des résultats figurant dans les notes de Ramanujan.

Allemagne, K. Ono a établi une formule permettant de calculer rapidement et avec précision les nombres de partitions des grands entiers, le graal que Ramanujan n'avait jamais atteint. K. Ono surnomme sa formule « l'Oracle ». En plus de calculer les nombres de partitions, dit-il, elle pourrait servir à étudier certains types de « courbes elliptiques » – des objets géométriques définis par une certaine classe d'équations polynomiales et qui sont dotées de remarquables propriétés arithmétiques.

Les cryptographes utilisent les courbes elliptiques pour réaliser certains algorithmes de cryptage. Le succès d'un tel algorithme repose sur la capacité de ce dernier à engendrer, pour qui veut décrypter le message codé, un problème mathématique impossible à résoudre en un temps raisonnable. Par exemple, un algorithme de cryptage répandu nommé RSA repose sur la difficulté à décomposer un très grand nombre en ses facteurs premiers. Des méthodes plus récentes font appel à des points sur une courbe elliptique, dont les relations sont encore plus difficiles à déchiffrer. Si l'Oracle ou les découvertes associées peuvent éclairer d'autres propriétés plus insaisissables, les cryptographes pourraient potentiellement les exploiter pour concevoir des systèmes de cryptage plus robustes.

Les travaux de K. Ono ont également dévoilé l'un des plus grands mystères de l'héritage mathématique de Ramanujan. Trois mois avant de mourir, cloué au lit par la fièvre et la douleur, le mathématicien indien écrivit à la hâte une dernière missive à Hardy. « Je suis tout à fait désolé de ne pas t'avoir écrit une seule lettre jusqu'à maintenant », s'excusait-il. « J'ai récemment découvert des fonctions très intéressantes que j'appelle "fausses" fonctions thêta [...]. Elles s'inscrivent dans les mathématiques aussi élégamment que les fonctions thêta ordinaires ».

Les fonctions thêta sont essentiellement des formes modulaires (voir l'encadré page 53). Ramanujan supposait qu'il est possible de décrire de nouvelles fonctions (les fausses fonctions thêta, ou fonctions mock-thêta, le terme anglais *mock* signifiant faux) qui ne ressemblent en rien à des formes modulaires et qui pourtant se comportent de la même façon en des points particuliers nommés singularités. À l'approche de ces points, la valeur prise par

Généraliser les identités de Rogers-Ramanujan

La lettre adressée par Ramanujan à G. H. Hardy en 1913 incluait deux identités, initialement découvertes en 1894 par le mathématicien britannique Leonard James Rogers, et désormais connues sous le nom d'identités de Rogers-Ramanujan. Elles portent sur deux séries infinies, notées $G(q)$ et $H(q)$, et les identifient à des produits infinis :

$$G(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

$$H(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}$$

Ces identités sont utilisées aujourd'hui dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique théorique. La lettre de Ramanujan contenait une troisième formule montrant que leur quotient $H(q)/G(q)$ a des

propriétés remarquables. Notamment, selon les valeurs de q , ce quotient donne aisément des nombres algébriques (nombres qui sont solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, comme le nombre

d'or $(1 + \sqrt{5})/2$, qui est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$).

Ces formules de Ramanujan ont longtemps intrigué les mathématiciens, qui s'interrogeaient sur leur origine et les raisons profondes de leur validité. Tout récemment, Ole Warnaar, de l'Université du Queensland en Australie, en collaboration avec K. Ono et Michael Griffin de l'Université Emory, ont découvert que ces identités constituent des cas particuliers d'une famille infinie d'identités de nature et de propriétés similaires, ce qui permet d'intégrer les identités de Rogers-Ramanujan dans un cadre théorique plus vaste.

une fonction croît jusqu'à l'infini. Considérons par exemple la fonction $f(x) = 1/x$, qui présente une singularité en $x = 0$. À mesure que la variable x se rapproche de 0, la valeur de $f(x)$ devient infiniment grande. Les formes modulaires ont un nombre infini de singularités. Ramanujan a eu l'intuition que pour chacune de ces fonctions, il existe une fausse fonction thêta associée qui non seulement a les mêmes singularités, mais aussi tend vers l'infini presque de la même façon en ces points.

C'est seulement en 2002 qu'un mathématicien hollandais, Sander Zwegers, a formellement défini les fausses fonctions thêta, en utilisant des idées formulées des décennies après la mort de Ramanujan. Mais les mathématiciens ne parvenaient toujours pas à expliquer l'affirmation de Ramanujan selon laquelle ces fonctions imitent les formes modulaires au niveau de leurs singularités.

La machinerie sous-jacente à l'Oracle de K. Ono et J. Bruinier allait finalement résoudre l'énigme. Avec A. Folsom et Robert Rhoades, de l'Université Stanford, K. Ono

l'a utilisée afin de dériver des formules permettant de calculer les valeurs des fausses fonctions thêta au voisinage des singularités. Et effectivement, ils ont trouvé que la conjecture de Ramanujan est correcte : à proximité des singularités, les fausses fonctions thêta ressemblent étonnamment aux formes modulaires. Dans un cas, par exemple, les mathématiciens trouvent que la différence entre les valeurs des deux

KEN ONO ET SES COLLÈGUES

ont trouvé que la conjecture de Ramanujan est correcte : à proximité des singularités, les fausses fonctions thêta ressemblent étonnamment aux formes modulaires.

fonctions se rapproche fortement de 4 quand on tend vers la singularité, ce qui est presque négligeable dans cet univers de nombres infinis.

Les physiciens ont récemment commencé à utiliser les fausses fonctions thêta pour étudier l'entropie des trous noirs, l'entropie étant une grandeur de nature thermodynamique qui mesure le désordre d'un système ou la quantité d'information

qu'il représente. Certains scientifiques pensent que des formules apparentées à celles de K. Ono leur permettront peut-être de sonder ces phénomènes avec une meilleure précision.

K. Ono se rappelle encore le plaisir enivrant qu'il ressentit en voyant pour la première fois les congruences de Ramanujan, tandis que son père en traçait de son écriture régulière les symboles étranges sur son bloc-notes jaune. « Pour quoi seulement trois ? », avait-il demandé. « Personne ne le sait », lui avait répondu son père.

En racontant cette histoire, K. Ono est assis dans la salle à manger de son domicile, en Géorgie.

Le mur derrière lui porte une photographie du buste en bronze de Ramanujan qui a été commissionné pour sa veuve grâce à des dons de 25 dollars, de son père et de centaines d'autres mathématiciens et scientifiques du monde entier. « Jamais dans mes rêves les plus fous je n'aurais imaginé être en situation de dire un jour : "Tu sais quoi, Papa ? Ces congruences ne sont pas les seules – loin de là." » ■

Pour contribuer à la transmission
de la culture mathématique,
LE MAGAZINE TANGENTE ORGANISE

LES TROPHEES tangente

**DÉPÔT DES CANDIDATURES
AVANT LE 31 AOÛT 2014 MINUIT**

Prix Bernard-Novelli

Soutenir les jeunes créateurs

Vous êtes collégiens, lycéens ?
Vous aimez concevoir des jeux logiques
faisant intervenir les mathématiques ?

Participez à ce concours
et transformez votre projet
en un produit mobile disponible
sur l'App Store et Google Play



Prix Tangente du meilleur article

Raconter les mathématiques

Envoyez-nous un article inédit vulgarisant un concept mathématique.
Le meilleur sera publié au sein du magazine Tangente

Prix Tangente du livre

Donner envie d'en savoir plus

A partir du 15 juin, participez
à la sélection des ouvrages
en votant sur :
www.tropheestangente.com

**POUR LA
SCIENCE**

Inscription, informations et modalités de participation sur le site

www.tropheestangente.com

Le principe d'équivalence à l'épreuve quantique

Domenico Giulini

L'égalité entre la masse qui mesure l'inertie et la masse qui détermine la gravitation est au fondement de la relativité générale d'Einstein. Une expérience récente censée la tester sur des objets quantiques divise les spécialistes.

Dans le vide, une plume et une boule de pétanque tombent de la même façon et aussi vite... du moins en apparence, c'est-à-dire dans la limite des incertitudes de mesure. Pour valider expérimentalement le principe de la chute identique de corps différents, encore faut-il disposer d'une théorie dont les hypothèses fondamentales sont formulées de façon claire et complète, et reliées par des chaînes logiques à des prédictions testables.

Il n'est pas sûr que ce soit le cas. Les deux grands pans de la physique fondamentale que sont la théorie de la relativité générale d'Einstein et la théorie quantique soulèvent des problèmes d'interprétation quand on tente de tester la première à l'aide d'une expérience faisant intervenir la seconde. Une telle difficulté est apparue lorsque des physiciens ont testé le « principe d'équivalence », un fondement de la relativité générale, au moyen d'une expérience mettant en jeu la théorie quantique. Nous verrons qu'elle oppose l'équipe de Claude Cohen-Tannoudji, en France, et celle de Steven Chu, aux États-Unis, deux colauréats du prix Nobel de physique de 1997.

Plusieurs théories physiques actuelles passent pour fondamentales. Cela signifie que chacune décrit une grande gamme de phénomènes dans les limites de la précision de mesure ; qu'elle est applicable de façon universelle ; qu'elle ne se contredit pas dans ses conséquences. La relativité générale et la théorie quantique sont de telles théories, et elles ont résisté jusqu'ici à tous les tests expérimentaux.

Les grandes constantes fondamentales

Des constantes dites fondamentales leur sont attachées. Il s'agit de la vitesse de la lumière c et de la constante gravitationnelle G dans le cas de la relativité générale, et de la constante de Planck h dans le cas de la théorie quantique. La dimension (au sens physique de la longueur, de la masse, du temps) de la vitesse de la lumière est une longueur divisée par un temps. Celle de la constante gravitationnelle est plus compliquée et découle de la loi d'attraction universelle de Newton ($F = Gmm'/r^2$). Quant à la constante de Planck h , elle a la dimension d'une action – c'est-à-dire du

produit d'une énergie par un temps – et pour cette raison, on la nomme aussi le quantum d'action.

Du point de vue de leur dimension, ces trois constantes fondamentales combinent des unités de longueur, de temps ou de masse. Inversement, on peut les combiner pour former un système d'unités – les « unités de Planck » : la longueur de Planck, la masse de Planck, le temps de Planck (voir l'encadré page 59). Ces unités indiquent, grossièrement, à quelles échelles d'espace-temps et de masse (ou d'énergie) la théorie quantique et celle de la relativité générale devraient se rejoindre. Dans ces situations, les phénomènes physiques sont censés ne plus pouvoir être décrits que dans le cadre d'une théorie quantique de la gravitation, dont la mise au point se fait attendre.

D'ordinaire, les effets gravitationnels et les effets quantiques se manifestent à des échelles très différentes, de sorte que les mesurer simultanément exige des précisions énormes. Les échelles indiquées par les unités de Planck sont si petites qu'il semble exclu de pouvoir s'en approcher expérimentalement. Ainsi, il y a autant d'ordres de grandeur (des puissances de 10) entre