

une information équivalente à celle du choix d'un élément parmi 32 (cela correspond à 5 bits d'information), qui est exactement l'information dont il a besoin pour savoir où la coupe a été faite par le premier spectateur.

En termes de quantités d'information, il n'y a aucun miracle : il lui manquait 5 bits d'information (l'emplacement de la coupe), il en a reçu 5. Reste à savoir comment s'y prendre pour que les cinq bits reçus indiquent l'endroit où la coupe a été faite. Le problème est de trouver un ordre pour les 32 cartes tel qu'à partir de la connaissance de la couleur (noire ou rouge) de cinq cartes consécutives, le magicien sache toujours quelles sont ces cinq cartes, c'est-à-dire l'endroit où a été opérée la coupe du premier spectateur.

La question est équivalente à celle-ci : trouver une suite de 32 symboles N ou R comportant 16 N et 16 R et telle que les 32 façons de prendre cinq éléments consécutifs de la suite soient toutes différentes et correspondent aux 32 façons de composer une suite de cinq symboles N ou R. Notez bien qu'ici, quand on parle de cartes successives, on convient implicitement qu'après la dernière carte du paquet, on revient à la première : les cartes 30, 31, 32, 1, 2 sont donc pour nous cinq cartes consécutives.

Voici une solution à ce problème : **RRRRR-NRRRNRRNRRNNNNRRRRNRRNNRRN**. Une telle suite de 32 symboles est nommée suite de de Bruijn d'ordre 5 ; en trouver et les étudier est exactement le problème auquel s'est intéressé en 1946 Nicolaas de Bruijn en résolvant une conjecture soumise quelque temps auparavant par un autre mathématicien.

Avec un jeu de 2ⁿ cartes

Nous verrons plus loin comment trouver de telles suites. Nous envisagerons le cas général où, à la place de cinq spectateurs, il y en a n et où la taille du jeu de cartes est 2^n .

Vérifiez que la suite proposée ci-dessus est bonne : en en prenant 5 symboles consécutifs (il y a 32 façons de le faire), on retrouve les 32 quintuplets énumérés auparavant, chacun une fois exactement.

Avant de voir comment la suite de 32 N et R a été obtenue, terminons l'explication pratique du tour. En exploitant la suite des

1. Le tableau du magicien

Si vous classez un jeu de 32 cartes dans l'ordre 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♣ d♥ 9♦ v♠ 10♠ a♥ 9♠ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♣ v♦ 10♠ a♥ a♠, alors la seule connaissance de la couleur (noir ou rouge) de cinq cartes consécutives vous permet de savoir quelles sont ces cartes. C'est la clé du tour présenté dans l'article.

Le tableau ci-dessous permet la réalisation pratique du tour. En fonction du quintuplet de N ou R (les 32 possibilités sont indiquées dans la colonne de gauche), il vous indique les cinq cartes dont il s'agit.

NNNNN	9♠	r♣	d♣	r♠	10♣
NNNNR	r♣	d♣	r♠	10♣	r♦
NNNRN	7♠	a♠	8♣	v♦	10♠
NNNRR	d♣	r♠	10♣	r♦	8♥
NNRNN	8♠	d♠	7♦	7♠	a♠
NNRNR	a♠	8♣	v♦	10♠	a♥
NNRRN	9♣	7♠	d♦	10♥	9♠
NNRRR	r♠	10♣	r♦	8♥	a♦
NRNNN	d♠	7♦	7♠	a♠	8♣
NRNNR	v♠	v♥	9♣	7♠	d♦
NRNRN	8♣	v♦	10♠	a♥	a♠
NRNRR	10♠	a♥	a♠	8♦	9♥
NRRNN	7♠	d♦	10♥	9♠	r♠
NRRNR	v♠	d♥	9♦	v♠	v♥
NRRRN	10♣	r♦	8♥	a♦	8♠
NRRRR	a♠	8♦	9♥	r♥	7♥
RNNNN	10♥	9♠	r♠	d♣	r♠
RNNNR	7♦	7♠	a♠	8♣	v♦
RNNRN	a♦	8♠	d♠	7♦	7♠
RNNRR	v♥	9♣	7♠	d♦	10♥
RNRNN	9♦	v♠	v♥	9♠	7♠
RNRNR	v♦	10♠	a♥	a♠	8♦
RNRRR	10♦	v♠	d♥	9♦	v♠
RRNNN	a♥	a♠	8♦	9♥	r♥
RRNNR	d♦	10♥	9♠	r♠	d♣
RRNNR	8♥	a♦	8♠	d♠	7♦
RRNRN	d♥	9♦	v♠	v♥	9♠
RRNRR	7♥	10♦	v♠	d♥	9♦
RRRNN	r♦	8♥	a♦	8♠	d♠
RRRNR	r♥	7♥	10♦	v♠	d♥
RRRRN	9♥	r♥	7♥	10♦	v♠
RRRRR	8♦	9♥	r♥	7♥	10♦

2. Un algorithme calculant une suite de de Bruijn

La méthode des graphes de de Bruijn permet de trouver toutes les suites de de Bruijn et rend même possible leur décompte. Parfois cependant, on ne veut qu'une seule suite de de Bruijn. L'« algorithme gourmand » le permet. Nous l'expliquons pour $n = 4$. On part de la suite 0000, ensuite on ajoute un 1 si cela ne conduit pas à avoir un quadruplet déjà obtenu, sinon on ajoute un 0, et on recommence en n'ajoutant de 0 que lorsque c'est inévitable.

Départ :	0000
On ajoute un 1 :	00001
On ajoute un 1 :	000011
On ajoute un 1 :	0000111
On ajoute un 1 :	00001111
On ajoute un 0 :	000011110 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 1111 déjà obtenu)
On ajoute un 1 :	0000111101
On ajoute un 1 :	00001111011
On ajoute un 0 :	000011110110 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 0111 déjà obtenu)
On ajoute un 0 :	0000111101100 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 1101 déjà obtenu)
On ajoute un 1 :	00001111011001
On ajoute un 0 :	000011110110010 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 0011 déjà obtenu)
On ajoute un 0 :	0000111101100101

Ce qui donne la suite de de Bruijn d'ordre 4 :
0000111101100101

Que cette méthode fonctionne n'est en rien évident, mais c'est le cas (pour tout n), comme l'a démontré M. A. Martin en 1934.

32 symboles R ou N, on choisit un rangement des 32 cartes du jeu qui la respecte. Un grand nombre de classements conviendraient, mais on en prend un et on n'en change plus. Par exemple : 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♠ d♥ 9♦ v♠ v♥ 9♣ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♠ v♦ 10♠ a♥ a♠.

Selon l'endroit où le premier spectateur fait sa coupe, les cinq cartes qui viennent (et qui sont celles des cinq spectateurs) déterminent une suite de rouges et de noires qui permet au magicien de savoir où la coupe a été faite, et qui lui indique les cartes aux mains des spectateurs.

Traisons l'exemple utilisé pour présenter le tour. Les joueurs 1 et 3 avaient des cartes noires. La situation des cinq joueurs était donc NRNR. La seule coupe produisant cette série est celle qui amène le 10 de pique au-dessus : 10♠ a♥ a♠ 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♠ d♥ 9♦ v♠ v♥ 9♣ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♠ v♦. Les cinq cartes sont donc 10♠, a♥, a♠, 8♦, 9♥.

Sur un plan pratique, le magicien pourrait apprendre par cœur l'ordre des cartes qu'il a choisi et mentalement retrouver l'endroit de la coupe. Ce n'est pas très facile, aussi il

3. Graphes et suites de de Bruijn pour $n = 2, 3, 4, 5$

Les graphes de Nicolaas de Bruijn permettent de trouver des suites de longueur n donnant toutes les combinaisons possibles de n chiffres 0 ou 1 quand on déplace sur la suite une fenêtre de largeur n . De telles suites de 0 et de 1 sont nommées « suites de de Bruijn d'ordre n ».

Trouver ces suites est équivalent à rechercher des circuits eulériens sur un graphe, c'est-à-dire des chemins revenant à leur point de départ et passant par chaque arc du graphe une fois et une seule. De chaque sommet partent deux arcs et en arrivent deux. Cela assure que pour chaque n , un tel circuit eulérien est possible. Pour tout n , il existe donc des suites de de Bruijn.

Pour $n = 3$, le circuit eulérien 11-11-10-01-10-00-00-01 donne (en ne retenant que le premier bit de chaque paire) la suite de de Bruijn 11101000. Quand on déplace une

fenêtre de largeur 3 sur la suite (dont on suppose qu'elle se referme circulairement sur elle-même), on obtient tous les triplets possibles de 0 et de 1 :

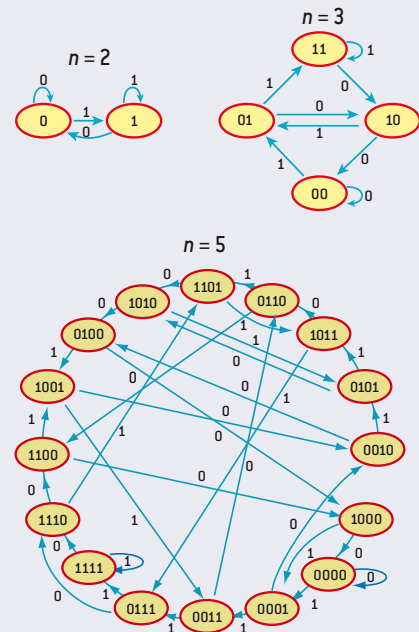
11101000 → triplet 111 ; 11101000 → triplet 110
11101000 → triplet 101 ; 11101000 → triplet 010
11101000 → triplet 100 ; 11101000 → triplet 000
11101000 → triplet 001 ; 11101000 → triplet 011

Le graphe correspondant à cette suite est représenté dans le texte à la page suivante.

Voici une suite de de Bruijn d'ordre 4 : 0000110010111101.

En voici une d'ordre 5 (utilisée dans l'article pour le tour de magie et dont le circuit eulérien est représenté ci-contre) : 0000010010110011110000101110101.

Et en voici une d'ordre 6 (dont le graphe n'est pas représenté) : 00000010001011111011101011000111100110010101001110000101101.



4. Le problème des suites de de Bruijn en dimension 2

En dimension 2, le problème des suites de de Bruijn devient celui des tores de de Bruijn. Pour $n = 2$, il existe 16 carrés 2×2 composés de 0 et de 1 (a).

La question est : peut-on remplir de 0 et de 1 un carré 4×4 représentant la surface d'un tore (les bords haut et bas sont collés, les bords droit et gauche sont collés) de telle façon qu'en faisant glisser une

petite fenêtre carrée de taille 2×2 sur les 16 positions possibles qu'elle peut prendre, on trouve les 16 carrés 2×2 énumérés ci-dessous ? Une solution est figurée en b.

Si à la place de deux symboles, on en considère quatre, il y a cette fois $4^4 = 256$ carrés possibles de taille 2×2 , et on peut donc (au mieux) espérer utiliser la surface carrée d'un tore 16×16 pour énumérer

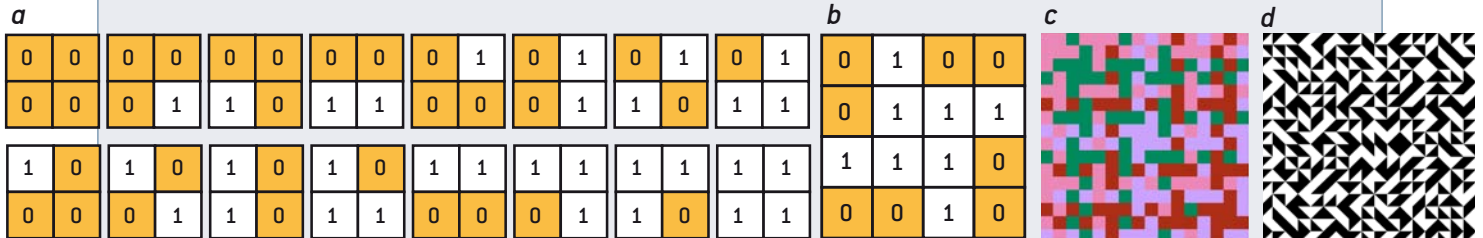
par fenêtre glissante tous les carrés possibles de taille 2×2 utilisant quatre symboles. Une solution, figurée en couleurs, est le schéma c.

Si, à la place de quatre couleurs, on utilise les quatre façons de colorier un carré en noir et blanc en le divisant par une diagonale, on obtient un intéressant tableau abstrait (d).

Un tel pavage de surface a un intérêt pratique. Un robot se

déplaçant à la surface d'une pièce où ce motif serait dessiné pourrait, en observant uniquement les quatre carrés placés sous lui et en utilisant une table convenable (comme le magicien avec son tableau caché), savoir où il se trouve précisément.

Pour d'autres informations sur cette variante du problème de de Bruijn, voir : <http://tiny.cc/9y96fx>



s'aidera d'un petit tableau (voir l'encadré 1) qui contient les réponses. Il le placera discrètement en un endroit où lui seul peut le voir, sur un petit carton qu'il a en main ou collé sur le revers de sa veste, ou sur un des objets utilisés pour son spectacle.

Un graphe pour tout comprendre

Reste une question : comment trouver les suites de Nicolaas de Bruijn ?

La suite utilisée est celle-ci :

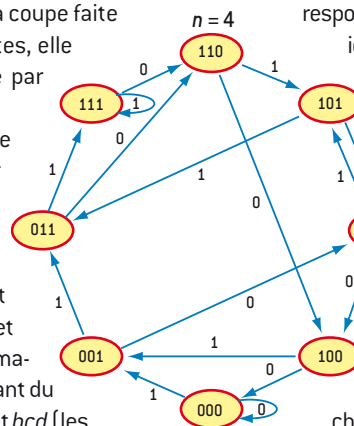
RRRRRRRRRNNRRNNNNNNRRRRNNNNRNRN.

Ramenons-nous à des bits d'information en remplaçant les N par des 1 et les R par des 0 : 00000100101100111110001101110101. Comment trouver une telle suite binaire, ou en trouver d'autres, permettant de généraliser le tour avec, par exemple, six spectateurs et un jeu de 64 cartes ?

L'idée repose sur une représentation en graphe du problème. Elle va nous conduire à une solution générale qui prouvera que les suites de de Bruijn existent pour tout ordre n . Il est plus simple d'expliquer la méthode avec

un jeu de seulement 16 cartes (on ne retient par exemple que les cœurs et les piques) et quatre spectateurs : les couleurs des cartes des quatre spectateurs dont prend connaissance le magicien fournissent maintenant 4 bits d'information au magicien ; cela lui permet de retrouver la coupe faite dans le jeu de 16 cartes, elle aussi est déterminée par 4 bits d'information.

Le graphe ci-contre permet de trouver toutes les suites de de Bruijn d'ordre 4. Il est composé de huit sommets qui sont les huit triplets possibles de 0 et de 1. On a tracé systématiquement un arc partant du triplet abc vers le triplet bcd (les deux derniers symboles de abc sont identiques aux deux premiers symboles de bcd). On a écrit d sur l'arc qui joint abc à bcd . Cette façon de dessiner le graphe assure que de chaque sommet partent exactement deux arcs, et que sur chaque sommet arrivent exactement deux arcs. Il y a en tout 16 arcs.



Si l'on considère un chemin suivant une série de flèches liées et passant d'un sommet à un autre, on construit une suite finie de 0 et de 1. Par exemple, en partant du sommet 110 en haut, on passe à 100, puis à 001, puis à 011, puis à 110. À un tel chemin, on fait correspondre une notation compactée, ici 1100110, obtenue en notant

les uns derrière les autres les noms des sommets, sans répéter les deux symboles communs à deux sommets consécutifs (en bleu) : 110-100-001-011-110 → 1100110.

Trouver une suite de de Bruijn d'ordre 4 consiste maintenant à trouver un chemin revenant à son point de départ (un « circuit ») qui passe par tous les arcs une fois et une fois seulement. Un tel circuit passe deux fois par chaque sommet du graphe, puisque de chaque sommet partent deux arcs. Un tel circuit donne une suite de de Bruijn, car si on écrit la notation compactée du circuit, on y trouvera tous les

5. Les graphes de de Bruijn pour l'assemblage des génomes

Les séquenceurs d'ADN produisent de nombreuses petites séquences extraites de la longue séquence de quatre lettres A, G, C, T à laquelle on s'intéresse (un gène, un chromosome, etc.). Les petites séquences ont des parties communes qui déterminent leur assemblage correct. Une petite séquence

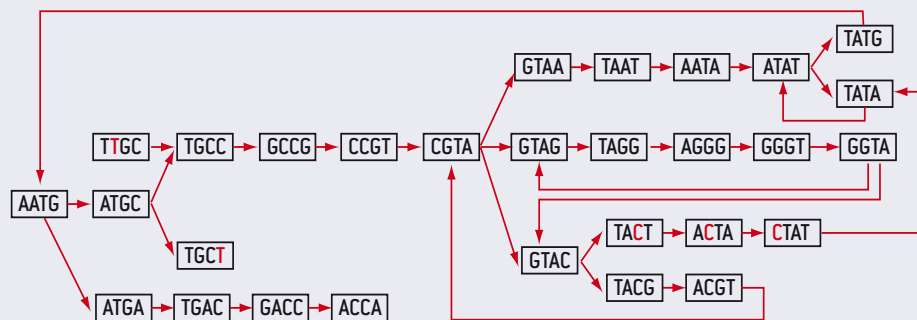
peut parfois s'assembler avec plusieurs, et on est donc face à un énorme puzzle : toutes les petites séquences produites par les machines doivent être utilisées, afin de ne déterminer qu'une seule grande séquence.

Depuis les travaux de Pavel Pevzner, Haixu Tang et Michael Waterman, les méthodes utili-

sées pour traiter ces énormes problèmes combinatoires sont fondées sur la recherche de chemins eulériens dans des graphes analogues à ceux de l'encadré 3. Les sommets de ces graphes (dont un exemple est représenté ci-dessous) sont les séquences données par la machine et les arcs indiquent les

paires de séquences ayant une partie commune (car l'une commence par ce qui est la fin de l'autre). Mener l'assemblage se ramène à trouver un chemin eulérien dans le graphe.

Le problème est rendu encore plus difficile par certaines erreurs présentes dans les résultats fournis par les machines à séquencer. Les lettres en rouge indiquent les endroits où il y a des erreurs de séquençage. La mise au point de ces algorithmes d'assemblages à base de graphes de de Bruijn fut une étape importante dans l'histoire du séquençage et aujourd'hui encore de nombreux travaux sont consacrés au perfectionnement de ces méthodes.



quadruplets possibles de 0 et de 1. En effet, le circuit passe deux fois par tout sommet (un triplet) ; une première fois, il le quitte en choisissant un 0, la seconde fois un choisissant un 1. Chaque quadruplet est obtenu une seule fois, sinon le circuit passerait deux fois par le même arc.

Donnons un exemple. Soit le circuit passant par les sommets 000-000-001-011-110-100-001-010-101-011-111-110-101-010-100. Sa notation compacte est la suite de de Bruijn d'ordre 4 notée 0000110010111101.

On vérifie qu'en prenant quatre symboles consécutifs, on obtient les 16 suites possibles de 4 symboles 0 ou 1 dans l'ordre suivant : 0000-0001-0011-0110-1100-1001-0010-0101-1011-0111-1111-1110-1101-1010-0100-1000.

La démonstration complète que, par cette méthode, on trouvera des suites de de Bruijn d'ordre n pour tout n est presque terminée. Il suffit d'évoquer un célèbre résultat de théorie des graphes dû à Leonhard Euler : **Théorème d'Euler** : Un graphe orienté possède un circuit empruntant tous les arcs une fois exactement (dénomé circuit eulérien) si et seulement si :

- il est connexe (on peut toujours joindre deux sommets en empruntant les arcs du graphe) ;
- à chaque sommet, le nombre d'arcs entrants est le même que le nombre d'arcs sortants.

Circuits eulériens

Pour les graphes considérés ici, la seconde condition du théorème est vérifiée, car de chaque sommet partent deux arcs, et en arrivent deux. Pour la première condition, il faut réfléchir un peu : partant de abc (cas $n = 3$), peut-on arriver à efg ? Oui, il suffit de suivre les arcs abc , bce , cef , efg . Pour n quelconque, l'idée s'adapte.

Les graphes de de Bruijn vérifient les conditions du théorème d'Euler. Ils ont donc tous des circuits eulériens, et donc pour tout entier n , il existe des suites de de Bruijn. Conclusion : quel que soit n , on peut faire le tour de cartes avec n spectateurs et un jeu de 2^n cartes. La méthode des circuits eulériens permet de trouver les suites de de Bruijn d'ordre n , pour tout n , et elle les donne toutes. Cela permet de les dénombrer. Il y en a exactement $2^{2^n - 1 - n}$.

Une multitude de résultats ont été démontrés concernant les suites et les

graphes de Nicolaas de Bruijn et leurs variantes. Ces résultats sont utiles par exemple en robotique (voir l'encadré 4) ou dans le domaine du traitement des séquences génétiques pour assembler les courtes séquences que les machines déchiffrent en grand nombre et qu'il faut recoller pour connaître, par exemple, la totalité d'un chromosome (voir l'encadré 5).

Le merveilleux livre *Magical Mathematics* de Persi Diaconis et Ron Graham (voir la bibliographie) consacre trois chapitres aux tours de magie fondés sur les suites de Nicolaas de Bruijn et décrit plusieurs autres applications de ces suites. On y trouve aussi des informations sur l'histoire du tour présenté au début d'article. Elle est intéressante, car elle montre qu'avant que les mathématiciens ne s'en mêlent, l'idée du tour était déjà comprise, mais n'était qu'imparfaitement mise en œuvre. La première version du tour fut exposée en 1919 par Charles Jordan, un fermier californien, éleveur de poulets, qui inventait et vendait des tours de magie. Cette première version n'était pas la meilleure possible : le magicien, qui utilisait pourtant un jeu de 32 cartes, interrogeait six spectateurs au lieu de cinq. Le rangement du jeu ne

devait donc pas suivre une suite de de Bruijn. En 1930, une version intéressante du tour est décrite par deux autres inventeurs de tours, William Larson et T. Page Wright. Cette fois, ils manipulent un jeu de 52 cartes et demandent à trois spectateurs ayant retiré trois cartes consécutives si leur carte est un cœur, un carreau, un pique ou un trèfle. Disposant d'une information de 6 bits (2 bits par réponse) le magicien retrouve la coupe faite dans le jeu de 52 cartes (qui demande 5,7 bits d'information) et aurait même pu utiliser un paquet de 64 cartes (qui aurait nécessité 6 bits d'information).

Pour mener l'analyse mathématique de cette variante du tour, il faut utiliser des suites de symboles pris dans un alphabet à 4 symboles. C'est effectivement ce que la théorie s'est attachée à traiter. Elle considère la situation générale d'un alphabet de k symboles et des séquences de longueur n . Le problème est alors de savoir s'il existe une suite de symboles (de longueur k^n) qui donne les k^n suites de n symboles possibles quand on considère n éléments consécutifs de la suite. La réponse à ce problème généralisé est à nouveau *oui*. Nicolaas de Bruijn a même su dénombrer les solutions : pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \geq 1$, il existe des suites de de Bruijn de longueur k^n , et leur nombre est exactement : $(k!)^{k^{n-1}}/k^n$.

Aide au cambrioleur

Comme application amusante des suites de de Bruijn, il y a l'ouverture d'une serrure à 4 chiffres décimaux ne comportant pas de touche « entrée » : quand les quatre derniers nombres tapés sont bons, la serrure s'ouvre. Il semble qu'une attaque par la force brute exige d'essayer 10 000 combinaisons. Si on les entre les unes après les autres par ordre croissant (0000, 0001, 0002, ..., 9999), il faut taper 40 000 fois sur le clavier. En revanche, si on utilise la bonne suite de de Bruijn, il suffira de taper 10 003 touches : les 10 000 de la suite elle-même, suivies des trois premiers chiffres de la séquence pour parcourir le cycle complet.

Parmi les nombreux résultats que les mathématiciens continuent de rechercher

et de démontrer concernant les suites de de Bruijn, citons-en deux récents.

En 2011, Veronica Becher et Pablo Ariel Heiber se sont demandé si, disposant d'une suite de de Bruijn d'ordre n sur un alphabet de k symboles, il était possible de la prolonger (en en multipliant la longueur par k) de façon à obtenir une suite de de Bruijn d'ordre $n+1$. Ils ont établi que (a) si $k \geq 3$, la réponse est toujours *oui* ; (b) si $k = 2$, alors on ne peut jamais prolonger une suite de de Bruijn d'ordre n en une suite d'ordre $n+1$, mais on peut toujours la prolonger en une suite d'ordre $n+2$.

Plutôt que d'avoir une suite de 0 et de 1 qui, lorsqu'on fait glisser sur elle une fenêtre de largeur n , énumère toutes les séquences de longueur n possibles (c'est la définition d'une suite de de Bruijn d'ordre n , pour l'alphabet à deux éléments 0 et 1), on peut chercher à énumérer par la même fenêtre glissante uniquement les séquences de 0 et de 1 pas trop denses, par exemple uniquement celles contenant au plus m fois le 1. C'est la question que J. Sawada, B. Stevens, A. Williams se sont posée en 2011. Leur nombre est : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^m$.

Il s'agit de la somme des $m+1$ premiers éléments de la ligne $n+1$ du triangle de Pascal. Rappelons que le coefficient $m+1$ de la ligne $n+1$ du triangle de Pascal (aussi appelé coefficient du binôme) vaut $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$. Peut-on, comme dans le cas de l'énumération complète de toutes les séquences de longueur n , énumérer de la façon la plus économique possible les séquences ayant au plus m '1', c'est-à-dire en déplaçant une fenêtre de largeur n , sur une suite dont la longueur est le nombre écrit plus haut ?

La réponse, pas évidente du tout, est : oui, il existe des suites de de Bruijn pour l'énumération des séquences de longueur n et de densité au plus m .

Des versions en deux dimensions de ces problèmes d'énumération économiques ont aussi été étudiées (voir l'encadré 4) et servent en robotique. De la magie de music-hall aux difficiles problèmes combinatoires, le chemin n'est pas long, et les résultats mathématiques que l'on découvre en chemin concernent des domaines inattendus et variés, avec des applications concrètes.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur

au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Dow, *Minimal arrays containing all sub-array combinations of symbols : De Bruijn sequences and tori*, 2014 : <http://tiny.cc/9y96fx>

J. W. Klop, Nicolaas Govert de Bruijn (1918-2012) - Mathematician, computer scientist, logician, *Indagationes Mathematicae*, vol. 24, pp. 648-656, 2013.

P. Diaconis et R. Graham, *Magical Mathematics*, Princeton University Press, 2012.

J. Sawada et al., *De Bruijn sequences for the binary strings with maximum density*, WALCOM'11 Proceedings of the 5th international conference on WALCOM: algorithms and computation, pp. 182-190, Springer, 2011.

V. Becher et P. A. Heiber, *On extending de Bruijn sequences*, *Information Processing Letters*, vol. 111, pp. 930-932, 2011.

C. Flye Sainte-Marie, *Solution à la question n° 48*, *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, vol. 1, pp. 107-110, 1894.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Des aliens pas si rapides

Les physiciens déduisent la vitesse des dinosaures et celle des aliens des lois de la dynamique. Leur conclusion est qu'un athlète humain pourrait les distancer !

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

En cas de rencontre avec un alien belliqueux, mieux vaut se diriger immédiatement dans la direction opposée, à condition d'être sûr de pouvoir distancer la créature ! S'il est généralement possible de se faire une idée des performances d'un extraterrestre en le regardant se déplacer, ce n'est pas le cas de Sebulba, le pilote de course atrabilaire de *Star Wars* (*La menace fantôme*, épisode 1, 1999). Cet être présente une bipédie encore inconnue sur Terre : il a quatre membres munis de doigts (une caractéristique des tétrapodes), mais marche uniquement sur ses pattes avant. Cette locomotion nécessite une courbure marquée du dos et des membres antérieurs plus robustes et plus longs que les membres postérieurs. Dans le vivant terrestre, c'est en général l'inverse, si l'on en juge par les dinosaures théropodes, tel le *T-rex* aux bras réduits, ou par les oiseaux coureurs aux ailes atrophiées, telle l'autruche. Mais oublions Sebulba, et concentrons-nous sur la marche « classique ».

Le modèle bipède

La jambe peut être modélisée par une tige rigide pivotant autour de la hanche. La mécanique montre qu'il existe un pas « naturel », économe en énergie. Considérons un sujet qui marche sur une surface horizontale à vitesse constante. Quelle énergie doit-il dépenser pour maintenir sa vitesse, si l'on néglige la résistance de



1. LE REEK, MONSTRE IMAGINAIRE de l'univers de *Star Wars*, règne sur l'arène de Géonosis. Malgré ses pattes particulièrement courtes, il court presque aussi vite qu'un rhinocéros et peut charger les jedis jetés dans l'arène.

l'air ? À chaque fois qu'un pied se pose sur le sol, il est momentanément à l'arrêt, alors que le reste du corps poursuit son déplacement. Dès lors, quand ce pied quitte le sol, il faut que toute la jambe soit accélérée vers l'avant afin de rattraper son retard. Ensuite, elle décélère jusqu'au moment où elle se pose à nouveau sur le sol. Pendant ce processus, deux ensembles de muscles antagonistes agissent successivement sur la jambe, chacun d'eux produisant un travail égal à la variation de l'énergie cinétique du membre.

De plus, la marche nécessite de se déséquilibrer vers l'avant. Quand le pied est en appui, la jambe pivote autour de la cheville et, au moment où elle bascule, la seconde jambe avance, prend le relais, et ainsi de suite. Pendant que la jambe se redresse, la vitesse de déplacement diminue et le centre de gravité du corps s'élève, atteignant sa hauteur maximale lorsque la jambe est verticale. En plus du travail nécessaire au mouvement de la jambe, les muscles doivent donc fournir aussi l'énergie gravitationnelle nécessaire à l'élévation du centre de gravité du corps entre chaque pas.

La puissance à fournir par les muscles est donc la somme de deux termes, l'un correspondant à la puissance nécessaire pour mouvoir les jambes, qui subissent une succession d'accélération et de décélération, l'autre traduisant la puissance à fournir pour vaincre la pesanteur. Si l'on allonge le pas à vitesse constante, le premier terme

Lucasfilm Ltd. & TM. Tous droits réservés. Travail numérique par ILM.