

devait donc pas suivre une suite de de Bruijn. En 1930, une version intéressante du tour est décrite par deux autres inventeurs de tours, William Larson et T. Page Wright. Cette fois, ils manipulent un jeu de 52 cartes et demandent à trois spectateurs ayant retiré trois cartes consécutives si leur carte est un cœur, un carreau, un pique ou un trèfle. Disposant d'une information de 6 bits (2 bits par réponse) le magicien retrouve la coupe faite dans le jeu de 52 cartes (qui demande 5,7 bits d'information) et aurait même pu utiliser un paquet de 64 cartes (qui aurait nécessité 6 bits d'information).

Pour mener l'analyse mathématique de cette variante du tour, il faut utiliser des suites de symboles pris dans un alphabet à 4 symboles. C'est effectivement ce que la théorie s'est attachée à traiter. Elle considère la situation générale d'un alphabet de k symboles et des séquences de longueur n . Le problème est alors de savoir s'il existe une suite de symboles (de longueur k^n) qui donne les k^n suites de n symboles possibles quand on considère n éléments consécutifs de la suite. La réponse à ce problème généralisé est à nouveau *oui*. Nicolaas de Bruijn a même su dénombrer les solutions : pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \geq 1$, il existe des suites de de Bruijn de longueur k^n , et leur nombre est exactement : $(k!)^{k^{n-1}}/k^n$.

Aide au cambrioleur

Comme application amusante des suites de de Bruijn, il y a l'ouverture d'une serrure à 4 chiffres décimaux ne comportant pas de touche « entrée » : quand les quatre derniers nombres tapés sont bons, la serrure s'ouvre. Il semble qu'une attaque par la force brute exige d'essayer 10 000 combinaisons. Si on les entre les unes après les autres par ordre croissant (0000, 0001, 0002, ..., 9999), il faut taper 40 000 fois sur le clavier. En revanche, si on utilise la bonne suite de de Bruijn, il suffira de taper 10 003 touches : les 10 000 de la suite elle-même, suivies des trois premiers chiffres de la séquence pour parcourir le cycle complet.

Parmi les nombreux résultats que les mathématiciens continuent de rechercher

et de démontrer concernant les suites de de Bruijn, citons-en deux récents.

En 2011, Veronica Becher et Pablo Ariel Heiber se sont demandé si, disposant d'une suite de de Bruijn d'ordre n sur un alphabet de k symboles, il était possible de la prolonger (en en multipliant la longueur par k) de façon à obtenir une suite de de Bruijn d'ordre $n + 1$. Ils ont établi que (a) si $k \geq 3$, la réponse est toujours *oui* ; (b) si $k = 2$, alors on ne peut jamais prolonger une suite de de Bruijn d'ordre n en une suite d'ordre $n + 1$, mais on peut toujours la prolonger en une suite d'ordre $n + 2$.

Plutôt que d'avoir une suite de 0 et de 1 qui, lorsqu'on fait glisser sur elle une fenêtre de largeur n , énumère toutes les séquences de longueur n possibles (c'est la définition d'une suite de de Bruijn d'ordre n , pour l'alphabet à deux éléments 0 et 1), on peut chercher à énumérer par la même fenêtre glissante uniquement les séquences de 0 et de 1 pas trop denses, par exemple uniquement celles contenant au plus m fois le 1. C'est la question que J. Sawada, B. Stevens, A. Williams se sont posée en 2011. Leur nombre est : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^m$.

Il s'agit de la somme des $m + 1$ premiers éléments de la ligne $n + 1$ du triangle de Pascal. Rappelons que le coefficient $m + 1$ de la ligne $n + 1$ du triangle de Pascal (aussi appelé coefficient du binôme) vaut $C_n^m = n! / (m!(n - m)!)$. Peut-on, comme dans le cas de l'énumération complète de toutes les séquences de longueur n , énumérer de la façon la plus économique possible les séquences ayant au plus m '1', c'est-à-dire en déplaçant une fenêtre de largeur n , sur une suite dont la longueur est le nombre écrit plus haut ?

La réponse, pas évidente du tout, est : oui, il existe des suites de de Bruijn pour l'énumération des séquences de longueur n et de densité au plus m .

Des versions en deux dimensions de ces problèmes d'énumération économiques ont aussi été étudiées (voir l'encadré 4) et servent en robotique. De la magie de music-hall aux difficiles problèmes combinatoires, le chemin n'est pas long, et les résultats mathématiques que l'on découvre en chemin concernent des domaines inattendus et variés, avec des applications concrètes.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur

au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Dow, *Minimal arrays containing all sub-array combinations of symbols : De Bruijn sequences and tori*, 2014 : <http://tiny.cc/9y96fx>

J. W. Klop, Nicolaas Govert de Bruijn (1918-2012) - Mathematician, computer scientist, logician, *Indagationes Mathematicae*, vol. 24, pp. 648-656, 2013.

P. Diaconis et R. Graham, *Magical Mathematics*, Princeton University Press, 2012.

J. Sawada et al., *De Bruijn sequences for the binary strings with maximum density*, WALCOM'11 Proceedings of the 5th international conference on WALCOM: algorithms and computation, pp. 182-190, Springer, 2011.

V. Becher et P. A. Heiber, *On extending de Bruijn sequences*, *Information Processing Letters*, vol. 111, pp. 930-932, 2011.

C. Flye Sainte-Marie, *Solution à la question n° 48*, *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, vol. 1, pp. 107-110, 1894.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Des aliens pas si rapides

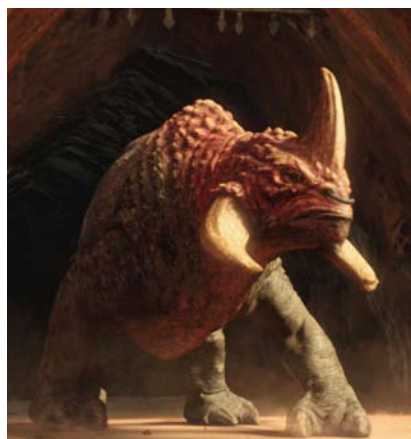
Les physiciens déduisent la vitesse des dinosaures et celle des aliens des lois de la dynamique. Leur conclusion est qu'un athlète humain pourrait les distancer !

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

En cas de rencontre avec un alien belliqueux, mieux vaut se diriger immédiatement dans la direction opposée, à condition d'être sûr de pouvoir distancer la créature ! S'il est généralement possible de se faire une idée des performances d'un extraterrestre en le regardant se déplacer, ce n'est pas le cas de Sebulba, le pilote de course atrabilaire de *Star Wars* (*La menace fantôme*, épisode 1, 1999). Cet être présente une bipédie encore inconnue sur Terre : il a quatre membres munis de doigts (une caractéristique des tétrapodes), mais marche uniquement sur ses pattes avant. Cette locomotion nécessite une courbure marquée du dos et des membres antérieurs plus robustes et plus longs que les membres postérieurs. Dans le vivant terrestre, c'est en général l'inverse, si l'on en juge par les dinosaures théropodes, tel le *T-rex* aux bras réduits, ou par les oiseaux coureurs aux ailes atrophiées, telle l'autruche. Mais oublions Sebulba, et concentrons-nous sur la marche « classique ».

Le modèle bipède

La jambe peut être modélisée par une tige rigide pivotant autour de la hanche. La mécanique montre qu'il existe un pas « naturel », économe en énergie. Considérons un sujet qui marche sur une surface horizontale à vitesse constante. Quelle énergie doit-il dépenser pour maintenir sa vitesse, si l'on néglige la résistance de



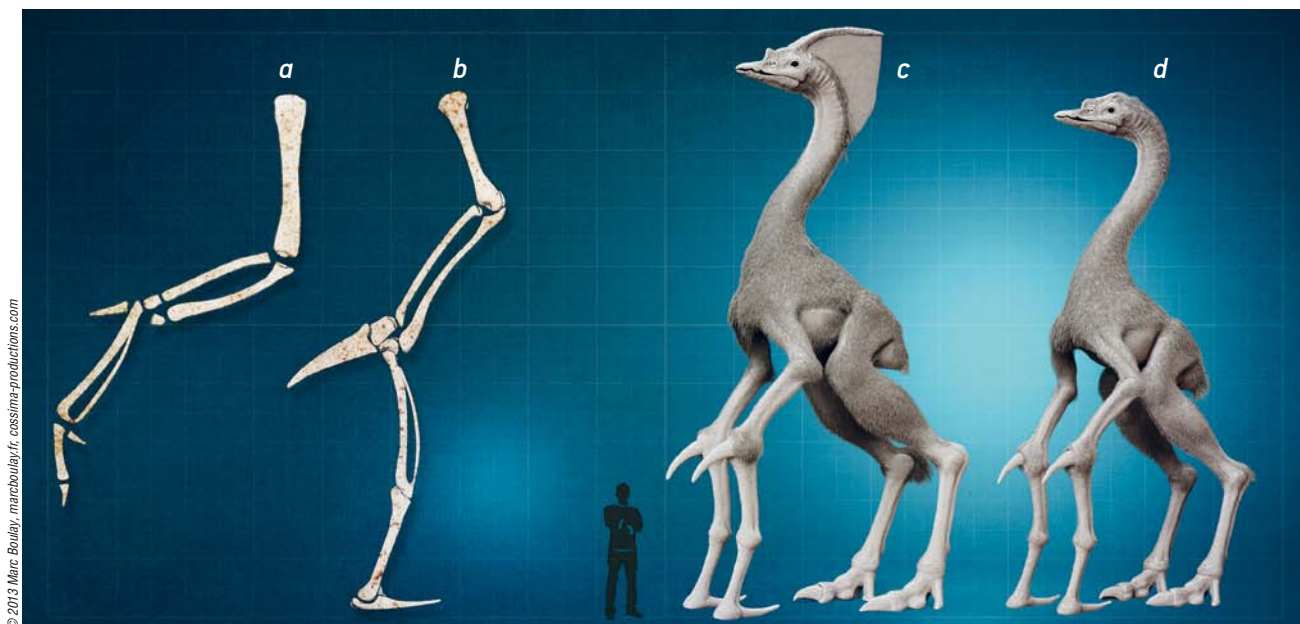
1. LE REEK, MONSTRE IMAGINAIRE de l'univers de *Star Wars*, règne sur l'arène de Géonosis. Malgré ses pattes particulièrement courtes, il court presque aussi vite qu'un rhinocéros et peut charger les jedis jetés dans l'arène.

l'air ? À chaque fois qu'un pied se pose sur le sol, il est momentanément à l'arrêt, alors que le reste du corps poursuit son déplacement. Dès lors, quand ce pied quitte le sol, il faut que toute la jambe soit accélérée vers l'avant afin de rattraper son retard. Ensuite, elle décélère jusqu'au moment où elle se pose à nouveau sur le sol. Pendant ce processus, deux ensembles de muscles antagonistes agissent successivement sur la jambe, chacun d'eux produisant un travail égal à la variation de l'énergie cinétique du membre.

De plus, la marche nécessite de se déséquilibrer vers l'avant. Quand le pied est en appui, la jambe pivote autour de la cheville et, au moment où elle bascule, la seconde jambe avance, prend le relais, et ainsi de suite. Pendant que la jambe se redresse, la vitesse de déplacement diminue et le centre de gravité du corps s'élève, atteignant sa hauteur maximale lorsque la jambe est verticale. En plus du travail nécessaire au mouvement de la jambe, les muscles doivent donc fournir aussi l'énergie gravitationnelle nécessaire à l'élévation du centre de gravité du corps entre chaque pas.

La puissance à fournir par les muscles est donc la somme de deux termes, l'un correspondant à la puissance nécessaire pour mouvoir les jambes, qui subissent une succession d'accélération et de décélération, l'autre traduisant la puissance à fournir pour vaincre la pesanteur. Si l'on allonge le pas à vitesse constante, le premier terme

Lucasfilm Ltd. & TM. Tous droits réservés. Travail numérique par ILM.



© 2013 Marc Boudry, marc.boudry.fr, cossima-productions.com

2. CES GRANDS ANIMAUX IMAGINAIRES quadrupèdes et terrestres (mâle en c et femelle en d) s'inspirent des oiseaux actuels, mais les ailes de ces derniers (squelette en a) ont été transformées par l'artiste en membres antérieurs porteurs (squelette en b).

diminue alors que le second augmente. C'est l'inverse qui se produit si le pas diminue. Le pas optimal minimise la puissance totale à fournir pour se déplacer ; il est proportionnel au produit de la vitesse du marcheur par la période de la jambe, considérée comme un pendule simple. On montre que la puissance dépensée est d'autant plus importante que l'on marche vite, mais aussi que l'on marche lentement, ce qui est plus inattendu. Pour une vitesse de cinq kilomètres par heure, le pas optimal mesure environ 75 centimètres pour un marcheur de taille moyenne et consomme une puissance de 250 watts.

Que faire face à un alien bipède ? Il faut estimer sa foulée pour se faire une idée de sa vitesse de déplacement. Et ne vous fiez pas à son apparence ! Prenons l'autruche : elle a l'air un peu burlesque avec sa tête redressée, et pourtant, elle se déplace deux fois plus vite qu'un être humain grâce à sa longue foulée.

L'autruche est encore plus rapide quand elle court. Quand la vitesse de la marche augmente, la force centrifuge subie par le corps qui tourne autour du pied d'appui augmente aussi. Cette force s'oppose au poids lorsque la jambe est verticale et, quand elle lui est égale, il n'y a plus d'appui au sol. On passe en régime de course. Cette transition est définie de façon formelle quand le rapport entre la force centrifuge et le poids, nommé nombre de Froude, est égal à un. Le déplacement passe alors de la marche à la course, allure pour laquelle c'est l'élasticité des muscles et des tendons des jambes qui prend le relais.

Que devient ce raisonnement si l'alien est quadrupède ? En étudiant les allures de nombreux animaux, le biologiste britannique Robert McNeil Alexander constata que la vitesse de course de deux animaux est identique quand le rapport de la longueur de la foulée à celle de la patte est le même. Il a établi une relation empirique entre la foulée et le nombre de Froude associé à la vitesse de déplacement, valable pour la plupart des animaux bipèdes et quadrupèdes. Cette relation fut d'abord utilisée pour déterminer la vitesse d'animaux disparus, tels les dinosaures non aviens.

Courtes pattes et grandes enjambées : danger !

Pour déterminer la valeur de la foulée relative, il suffit d'évaluer la longueur de la foulée à partir d'empreintes fossiles, et de déterminer la taille par le biais d'ossements fossiles ou de comparaisons adéquates. Nous montrons ainsi que nous aurions pu accompagner à la course un sauropode (herbivore à long cou et longue queue) de taille moyenne, voire un tyrannosaure ! Les calculs indiquent aussi que les sauropodes étaient vraisemblablement aussi agiles que... des éléphants.

En supposant que cette loi empirique soit universelle, la méthode sert aussi à déterminer la vitesse de course d'un alien, par exemple le Reek, féroce quadrupède à cornes lâché dans l'arène de Géonosis où les Jedis et la Princesse Amidala furent précipités par les séparatistes

(*Star Wars, L'Attaque des clones*, 2002). En comparant la bête à la taille des personnages, on peut estimer que la longueur de sa foulée est de l'ordre de quatre mètres, et celle de ses avant-bras de un mètre. D'après la loi empirique évoquée, sa vitesse de course serait voisine d'une trentaine de kilomètres par heure. Le Reek court donc un peu moins vite qu'un rhinocéros, et un très bon athlète humain pourrait le distancer.

Certains biologistes, s'ils ne remettent pas en cause la formule de R. McNeil Alexander, doutent de la pertinence de son utilisation pour les dinosaures (que dire alors des extraterrestres !), car la biomécanique de leur squelette était assez particulière. Il en résulte que leur vitesse réelle était sans doute inférieure à celle d'un mammifère de taille équivalente. Évidemment, pour les aliens marcheurs ou coureurs à plus de quatre pattes, il existe d'autres modèles, inspirés, par exemple, de ceux qui s'appliquent aux hexapodes, un groupe – bien réel – comprenant les insectes, les collemboles et d'autres petits organismes du sol : mais plus le nombre de pattes augmente, plus la coordination est périlleuse et plus les calculs sont complexes ! Quoi qu'il en soit, si vous pouvez espérer distancer un alien à la course, méfiez-vous de ceux qui, malgré de courtes pattes, font de grandes enjambées ! ■

R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris.

ART & SCIENCE

L'ADN fait bonne figure

À partir de traces d'ADN recueillies dans la rue, une artiste reconstitue le visage de ceux qui les ont abandonnées. La ressemblance avec les originaux s'améliorera grâce aux récents progrès de la génétique : l'ère de portraits-robots à partir de l'ADN s'ouvre.

Loïc MANGIN

Prenez n'importe quelle rue : mégots de cigarettes, chewing-gums usagés, voire cheveux en jonchant inmanquablement les trottoirs... Comme n'importe qui, vous ressentez de l'indifférence ou, au mieux, pestez contre ces incivilités. Et si vous les ramassiez ? C'est ce qu'a fait l'artiste américaine Heather Dewey-Hagborg. Son idée n'était pas de se substituer aux équipes de nettoyage de la voirie, mais de faire de ces détritiques la matière première de son projet *Stranger Visions*, qui, depuis 2013, a été montré aux États-Unis, en Irlande, en Australie... La partie visible consiste en des masques très réalistes d'êtres humains (voir la figure a). Voyons comment elle s'y est prise.

D'abord, elle a apporté ses échantillons à *Genspace*, un laboratoire de biologie DIY (pour *Do it yourself*, soit Faites-le vous-même). Dans ces endroits, chacun peut s'adonner aux joies de la génétique et de la biologie moléculaire. L'artiste a extrait l'ADN et amplifié des régions connues pour varier notablement selon les individus. Rappelons que l'amplification consiste à multiplier une séquence d'ADN en un grand nombre d'exemplaires grâce à des enzymes.

L'étape suivante a consisté à séquencer les fragments d'ADN obtenus, c'est-à-dire à lire l'enchaînement de nucléotides (A, T, C et G) qui les composent. Les différences entre individus à l'endroit d'un nucléotide sont nommées SNP (*Single Nucleotide Polymorphism*). Ces séquences ont ensuite alimenté un modèle

informatique grâce auquel H. Dewey-Hagborg a pu proposer des visages (matérialisés par une imprimante 3D) de ceux qui avaient laissé par inadvertance leur ADN sur la voie publique.

Est-ce ressemblant ? Sans doute pas, car les informations utilisées ici sont peu nombreuses : couleur de la peau et des yeux, origine ethnique... L'objectif n'était pas là. L'œuvre est surtout destinée à interpeller sur la surveillance dont nous faisons tous l'objet, le respect de la vie privée, l'utilisation de l'ADN à notre insu... Cependant, le projet continue et évolue sans cesse. Et il pourrait se nourrir de récents progrès

L'œuvre est destinée à interpeller sur la surveillance, le respect de la vie privée, l'utilisation de l'ADN à notre insu...

dans la compréhension des fondements génétiques des caractéristiques du visage.

Ainsi, en 2012, Manfred Kayser et son équipe de l'Université de Rotterdam, aux Pays-Bas, ont mis en évidence, à partir de l'étude de 10 000 individus de type européen, le rôle crucial de cinq gènes dans la forme de la face : largeur du nez, taille du visage, distance interoculaire... Trois de ces gènes étaient connus pour leur implication dans des défauts du développement craniofacial. C'était un premier pas vers l'établissement d'un portrait-robot à partir d'ADN prélevé sur une scène de crime par exemple.

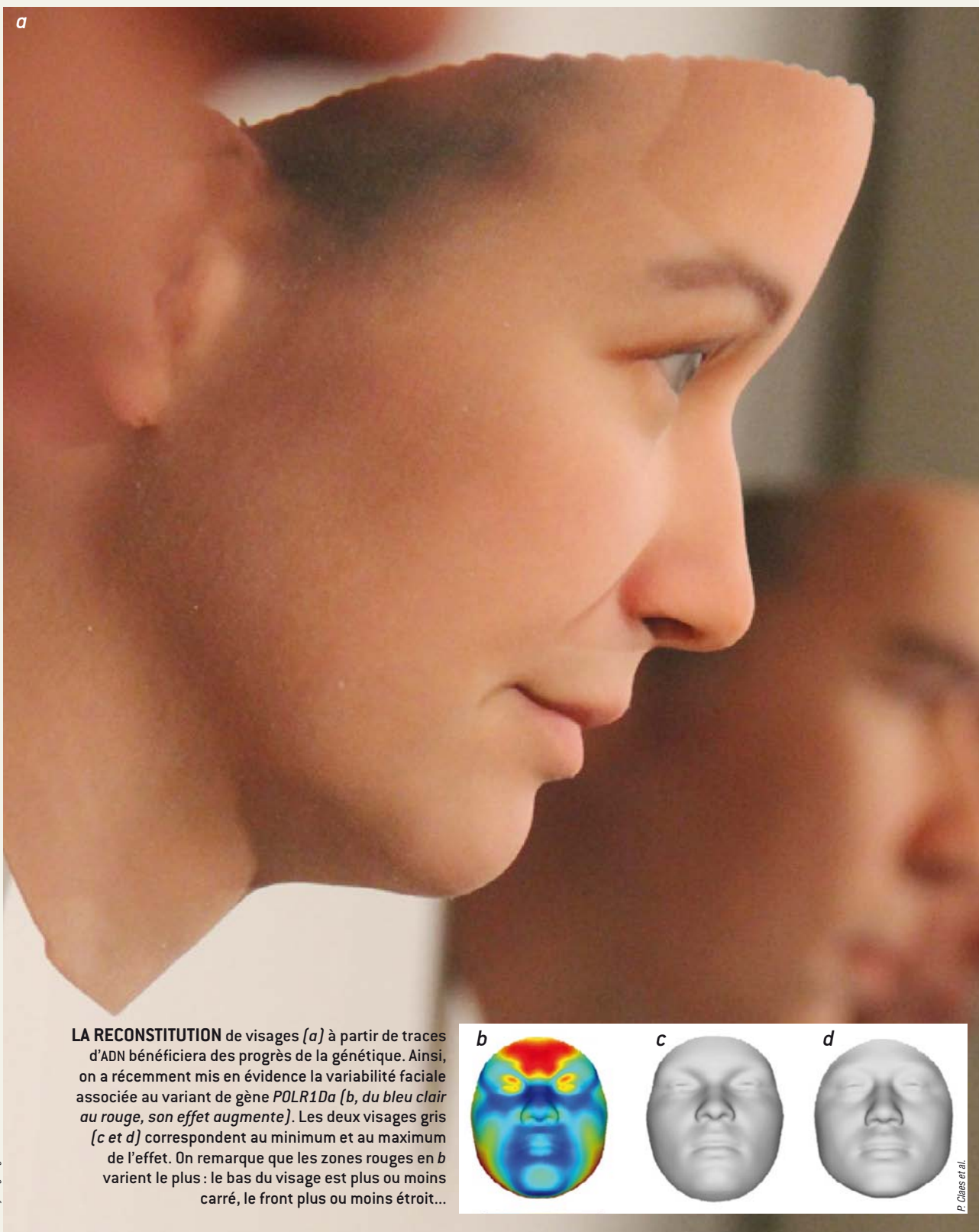
En 2014, Peter Claes, de l'Université catholique de Louvain, en Belgique, Mark Shriver, de l'Université Penn State, aux États-Unis, et leurs collègues ont annoncé avoir identifié une vingtaine de nouveaux gènes qui participeraient à la morphologie faciale. Pour ce faire, ils ont exploité des images à haute résolution des visages de 592 individus d'origine mixte (Europe et Afrique de l'Ouest) vivant aux États-Unis, au Brésil et au Cap Vert. Ces images ont été posées sur une grille numérique de plus de 7 000 points grâce à laquelle on met en évidence, en certains de ces points, les variations d'un individu donné par rapport à une moyenne.

Dans un second temps, les biologistes se sont intéressés aux génomes des individus et y ont mis au jour les SNP qui pouvaient expliquer les variations (voir la figure en bas). Au total, ce sont 24 SNP dans 20 gènes qui ont été repérés. Enfin, ils ont développé un programme qui propose un modèle tridimensionnel d'un visage à partir d'une séquence d'ADN. Exactement ce que fait H. Dewey-Hagborg !

La prochaine fois que vous jetterez un mégot ou un chewing-gum dans la rue, vous y réfléchirez peut-être à deux fois ! Et en plus, la municipalité vous en saura gré. ■

P. Claes et al., *Modeling 3D facial shape from DNA*, *PLoS Genetics*, vol. 10(3), e1004224, 2014.

F. Liu et al., *A genome-wide association study identifies five loci influencing facial morphology in Europeans*, *PLoS Genetics*, vol. 8(9), e1002932, 2012.



IDÉES DE PHYSIQUE

Le réfrigérateur qui transpire

L'évaporation de l'eau à travers un matériau poreux est à la base de dispositifs réfrigérants simples et efficaces.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Par une chaude journée d'été, quel bonheur de se désaltérer avec une gorgée de boisson fraîche ! Nul besoin de glaçon ou de réfrigérateur : le traditionnel *botijo* espagnol, en terre cuite non émaillée, conserve son contenu à une température inférieure de plus de dix degrés à la température ambiante. Pourquoi un tel dispositif, dont le principe a inspiré en Afrique un réfrigérateur rudimentaire constitué d'une double jarre, est-il aussi efficace ?

Se refroidir en transpirant

Le principe du *botijo* s'énonce brièvement : la surface de ce cruchon est humide car l'eau traverse l'argile poreuse, et c'est l'évaporation de cette humidité qui refroidit le récipient. On peut toutefois se poser des questions sur les détails de ce processus.

Commençons par l'origine du refroidissement dû à l'évaporation. L'eau liquide est un état condensé de la matière où chaque molécule est au contact de ses voisines. Dans un gaz, en revanche, les molécules sont distantes les unes des autres et interagissent peu.

Passer de la phase liquide à la phase gazeuse requiert donc de l'énergie afin de briser les liaisons entre molécules, qui assurent la cohésion du liquide. En l'absence de source d'énergie extérieure (une plaque chauffante, un four, etc.), cette énergie est prélevée in

fine à l'énergie cinétique associée à l'agitation thermique des molécules : ces dernières ralentissent et la température baisse.

Ce processus est particulièrement efficace. Ainsi, l'énergie nécessaire pour évaporer un gramme d'eau liquide, aussi nommée chaleur latente de vaporisation, est de 2 250 joules, alors qu'il ne faut que 4,18 joules pour élever sa température de un degré ! Cette évaporation contribue à réguler la température de notre corps lorsque

nous avons trop chaud (voir la figure 1). Par exemple, lors d'un effort physique continu (à vélo !), nous déployons une puissance mécanique de l'ordre de 300 watts, mais une puissance thermique de un kilowatt. L'évaporation d'un litre d'eau par sudation permet d'évacuer la chaleur produite par l'organisme pendant 38 minutes : sans ce processus, la température corporelle grimperait de plus de 5 °C !

L'efficacité dépend de l'humidité de l'air

Toutefois, l'efficacité du processus dépend beaucoup de l'humidité de l'air ambiant. En effet, dès que la teneur en vapeur d'eau atteint un certain seuil (les « 100 % d'humidité »), il y a autant de molécules d'eau de l'air qui viennent au contact du liquide et s'y incorporent que de molécules d'eau du liquide qui le quittent et rejoignent l'air ambiant.

Dans cette situation dite d'air saturé en vapeur d'eau, le flux de condensation et le flux d'évaporation s'équilibrent, et il en est de même pour les flux d'énergie. Aucun refroidissement n'est alors possible. En revanche, plus l'air ambiant est sec, plus l'évaporation et le refroidissement associé sont favorisés.

L'humidité fait ainsi toute la différence entre le sauna et le hammam. Dans un sauna, on peut supporter un air à 95 °C parce qu'il est sec (dix pour cent d'humidité) et parce que la sueur s'évapore alors facilement.



1. LA TRANSPIRATION aide le corps à se refroidir : en s'évaporant, l'eau absorbe de la chaleur, qui est ainsi évacuée hors de l'organisme. Plus l'air ambiant est sec, comme dans un sauna (ci-dessus), plus cette évaporation est intense. Dans un hammam, l'humidité de l'air réduit cette évaporation et la vapeur se condense sur la peau et les autres surfaces.