

L'information scientifique de référence maintenant sur tablette et smartphone !



Téléchargez gratuitement
l'application sur App Store et Google Play.
et feuillotez gratuitement le numéro en cours.



Avec l'application « Pour la Science », retrouvez dès leur sortie le mensuel *Pour la Science* à 4,49 € et son trimestriel *Dossier Pour la Science* à 5,49 € en version numérique optimisée pour tablette : lecture intuitive, sommaire interactif, contenus enrichis, feuilletage hors connexion, etc.

Disponible sur
App Store

DISPONIBLE SUR
Google play



Flashez ce QR code
avec votre mobile
ou votre tablette
pour télécharger
immédiatement
l'application.



Découvrez aussi l'application « Cerveau & Psycho » pour retrouver
le magazine *Cerveau & Psycho* et son trimestriel *L'Essentiel Cerveau & Psycho*

LOGIQUE & CALCUL

Promenades carrées et cubes collés

Construire des polygones formés de carrés ou des polyèdres formés de cubes en respectant une certaine règle donne naissance à des énigmes originales, voire décoratives.

Jean-Paul DELAHAYE

En septembre 1990, paraissait dans *Pour la Science* un article d'Alexander Dewdney sur un problème insignifiant en apparence : pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il des polygones n'ayant que des angles droits et dont les côtés ont, dans l'ordre, les longueurs 1, 2, 3, ..., n ? La plus petite solution est indiquée dans l'encadré 1.

Une autre façon de poser le problème évoque le parcours d'un promeneur. Dans une ville dont les rues dessinent une grille carrée parfaite, peut-on partir d'un croisement, parcourir un bloc, tourner à angle droit (à gauche ou à droite), parcourir deux blocs, tourner à angle droit (à gauche ou à droite), parcourir trois blocs, etc. et se retrouver à son point de départ au bout d'un certain temps ?

Compter les golygones

Le problème avait été inventé par le Britannique Lee Sallows en 1988. Il avait choisi, on ne sait pas vraiment pourquoi, de nommer ces figures des « golygones ». Progressivement, L. Sallows était arrivé à la conclusion qu'il n'existe de golygones que pour les valeurs de n multiples de 8 (voir l'encadré 1). Il découvrit le seul golygone à huit côtés et remarqua qu'il pave le plan. Les golygones à $8n$ côtés sont par convention les golygones d'ordre n . Leur nombre est noté $a(n)$. Puisqu'il n'y a qu'un golygone à huit côtés, $a(1) = 1$. Les golygones d'ordre 2 ont 16 côtés, et leur nombre est $a(2) = 28$. Parmi eux, seuls trois ne se recoupent pas.

À l'aide de programmes, on a calculé que $a(3) = 2\,108$ (il existe 2 108 golygones d'ordre 3 à 24 côtés), $a(4) = 227\,322$ (il y a 227 322 golygones d'ordre 4 à 32 côtés), etc.

On a ainsi : $a(1) = 1$, $a(2) = 28$,
 $a(3) = 2\,108$, $a(4) = 227\,322$,
 $a(5) = 30\,276\,740$, $a(6) = 4\,541\,771\,016$,
 $a(7) = 739\,092\,675\,672$,
 $a(8) = 127\,674\,038\,970\,623$,
 $a(9) = 23\,085\,759\,901\,610\,016$,
 $a(10) = 432\,797\,330\,819\,710\,3600$, etc.
 Pour les $a(n)$ jusqu'à $n = 100$, voir :
<http://oeis.org/A007219/b007219.txt>

Ces décomptes n'ont pas été faits par énumération un à un des golygones – on n'aurait au mieux atteint que $a(11)$ –, mais en utilisant des propriétés particulières des golygones, dont celle-ci dont vous devinez sans mal l'explication : en prenant les déplacements horizontaux d'un golygone (une suite d'indications « à droite » ou « à gauche »), et les déplacements verticaux d'un autre golygone (une suite d'indications « vers le haut » ou « vers le bas ») et en assemblant ces indications, on obtient un nouveau golygone.

On connaît une formule approchée pour $a(n)$: $a(n) \sim 3 \times 2^{8n-6} / (\pi n^2 (4n+1))$. Une formule exacte, mais très compliquée, a aussi été proposée (voir la page <http://oeis.org/A007219> de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane). Ces résultats proviennent pour l'essentiel d'un article publié en 1991 (voir la bibliographie) par quatre auteurs aux pedigrees remarquables : L. Sallows, l'inventeur du problème

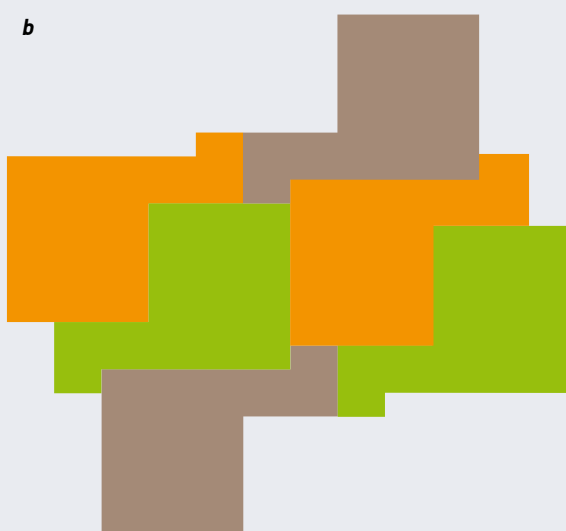
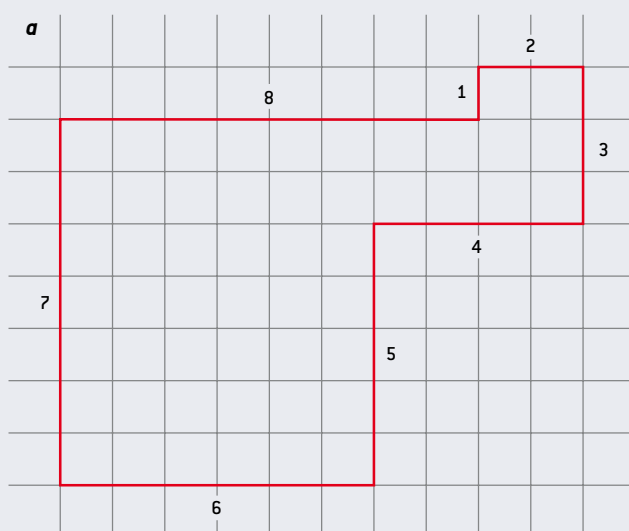
et dont nous avons présenté les extraordinaires « carrés géomagiques » dans cette rubrique en juin 2013 ; Martin Gardner, auteur de la chronique mathématique de *Scientific American* pendant 25 ans (reprise dans *Pour la Science* de 1977 à 1982) et qui fut enchanté de participer à l'étude de ces curieux cheminements ; Richard Guy, connu en particulier pour sa féconde collaboration avec John Conway en théorie des jeux, et Donald Knuth à qui l'on doit la bible des informaticiens *The Art of Computer Programming*, ouvrage de plus de 2 000 pages commencé en 1962 et dont une nouvelle édition a été achevée en 2011.

Cette exceptionnelle association montre que l'intérêt pour les petites énigmes mathématiques n'est pas réservée aux amateurs sans grade, et que celles-ci sont pour les véritables mathématiciens amoureux de leur discipline des sujets tout aussi respectables que les problèmes académiques... et abscons.

Ne pas passer deux fois au même endroit

Savoir combien de golygones d'ordre n , parmi les $a(n)$, ne se recoupent pas (voir l'encadré 2) et donc déterminent des polyminos est en réalité assez délicat et oblige cette fois à énumérer un à un les golygones d'ordre n . Aucune formule exacte ou approchée n'a été trouvée. Ces nombres définissent la suite notée $b(n)$. Dans leur article de 1991, les quatre mathématiciens indiquaient que $b(1) = 1$, $b(2) = 3$, $b(3) = 67$. Ils précisaient

1. Le seul golygone d'ordre 1



Un golygone est un polygone dont tous les côtés sont à angle droit, et ont pour longueur les entiers $1, 2, \dots, n$, dans l'ordre.

Il n'existe qu'un seul golygone à huit côtés (a). C'est le seul golygone connu qui pave le plan (b). Un golygone a nécessairement un nombre de côtés multiple de 8.

Voici la démonstration en six petites étapes de cette affirmation.

1) Donnons-nous un golygone ayant n côtés. Il est clair que n est pair, car il y a autant de segments horizontaux que de segments verticaux : $n = 2m$.

2) Supposons (sans perte de généralité) que le côté de longueur 1 est vertical. Les côtés verticaux (ils alternent avec les côtés horizontaux) ont pour longueur $1, 3, \dots, 2m - 1$. La somme de leurs longueurs est donc $1 + 3 + \dots + (2m - 1) = m^2$.

3) Ce nombre, m^2 , est pair car la somme des longueurs des côtés qui montent est égale à la somme des longueurs des côtés qui descendent. Donc m lui-même est pair.

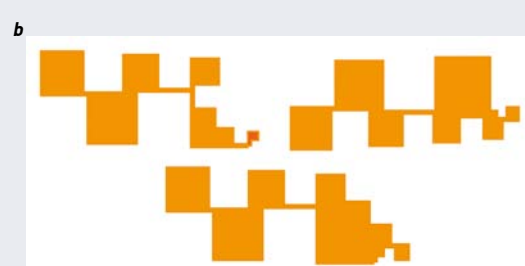
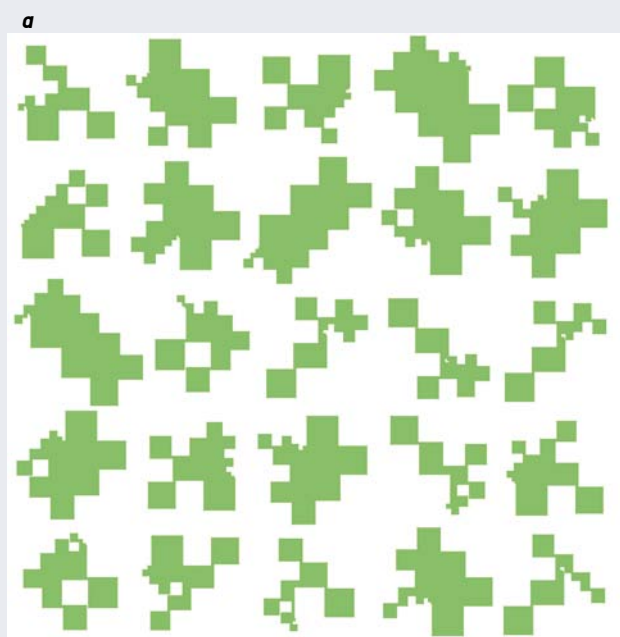
4) Les côtés horizontaux ont pour longueur $2, 4, 6, \dots, 2m$. Le total de ces longueurs est $2 + 4 + \dots + 2m = 2(1 + 2 + \dots + m) = m(m + 1)$.

5) Quand on suit le périmètre du golygone, certains côtés vont vers la droite, les

autres vers la gauche. La somme des longueurs de ceux qui vont vers la droite est un nombre pair (car c'est une somme de nombres pairs), et elle est égale à la somme des longueurs de ceux qui vont vers la gauche. Il en résulte que $m(m + 1)/2$ est pair, donc que $m(m + 1)$ est multiple de 4.

6) Puisque m est pair, $m + 1$ est impair. D'après (5), m est alors multiple de 4, et $n = 2m$ est donc multiple de 8.

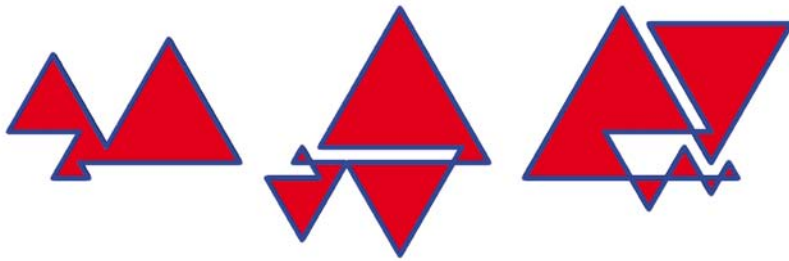
2. Golygones ne se recoupant pas



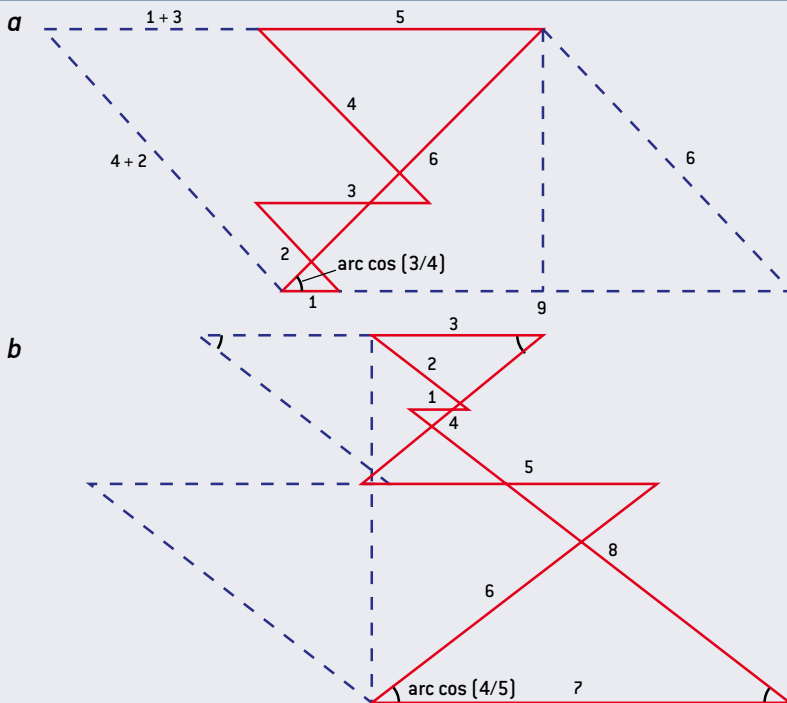
La plupart des golygones se recoupent. Ceux qui ne se recoupent pas sont plus intéressants, car il leur correspond une promenade ne repassant pas deux fois au même endroit. Francesco De Comit  a récemment battu le record de calcul de ces nombres, en établissant qu'il y a 1259 golygones de ce type à 32 côtés. Un autre programme de L. Weinberg a donné 41381 pour 40 côtés, 1651922 pour 48 côtés et 73 095 122 pour 56 côtés (voir www.lifl.fr/~bogaert/golygones/ pour un programme d   à B. Bogaert qui affiche les résultats). En a sont dessinés les 25 golygones   32 côtés ne se recoupant pas et dont la hauteur égale la largeur. En b sont dessinés les trois golygones   32 côtés ne se recoupant pas et ayant la forme la plus aplatie possible.

3. Les alpha-golygones

Si on remplace les angles 90° et -90° , qui sont les seuls autorisés pour un golygone, par des angles α (alpha) et $-\alpha$, on obtient des « α -golygones ». Pour $\alpha = 60^\circ$, la recherche de petits α -golygones donne des résultats intéressants. Les trois plus petits (trouvés par Lee Sallows) sont représentés ici. Le nombre de leurs côtés est, respectivement, 9, 11 et 12.



4. Le plus simple des alpha-golygones



Lee Sallows a recherché le α -golygone ayant le minimum de côtés. Il a procédé à l'aide d'un programme qui essayait un grand nombre de cas en variant l'angle α selon des valeurs régulièrement espacées. Le programme retenait les formes presque fermées où le dernier point était très proche du point de départ. Ensuite, à la main, et par des raisonnements géométriques, L. Sallows a identifié le gagnant. Encore un cas où l'ordinateur aide à résoudre un problème, mais où le raisonnement du mathématicien reste nécessaire. Le gagnant (a) est un α -golygone à six côtés avec $\alpha = \arccos(3/4)$. Les α -golygones records qui arrivent juste derrière le gagnant à six côtés sont deux golygones à huit côtés, celui déjà rencontré dans l'encadré 1 pour $\alpha = 90^\circ$ et un α -golygone à huit côtés (b) pour $\alpha = \arccos(4/5)$.

qu'aller plus loin était hors de portée du programme dont ils disposaient.

Francesco De Comit  et Léopold Weinberg, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, se sont dit qu'avec les machines actuelles, ils pourraient calculer $b(4)$. F. De Comit  a trouvé $b(4) = 1\,259$. La vérification menée par L. Weinberg avec un programme totalement diff rent donne le même résultat. Le programme de L. Weinberg a permis de calculer $b(5) = 41\,381$ (40 côtés), $b(6) = 1\,651\,922$ (48 côtés) et $b(7) = 73\,095\,122$ (56 côtés).

Il est possible qu'en perfectionnant ces programmes de décompte et en utilisant des moyens de calculs plus puissants (par exemple un réseau d'ordinateurs), on puisse calculer $b(8)$, et peut-être $b(9)$. Si un lecteur de *Pour la Science* se lance dans l'aventure et réussit, je signalerai ses résultats dans une rubrique prochaine. Dans l'encadré 2, F. De Comit  a représenté quelques-uns des golygones   32 côtés ne se recoupant pas. Il a choisi de dessiner ceux qui ont les formes les moins aplaties et ceux ayant les formes les plus aplaties.

La question de savoir si, parmi les golygones ne se recoupant pas, il y en a d'autres que celui d'ordre 1 qui pavent le plan, n'est pas résolue aujourd'hui. Il est probable que la réponse soit négative, car les contraintes sur les longueurs des côtés semblent rendre impossible la conception d'un pavage sans trou ni recouvrement. Une autre question intéressante, mais elle aussi délicate, est celle-ci : peut-on trouver plusieurs golygones d'ordre n qui, collectivement, pavent le plan ?

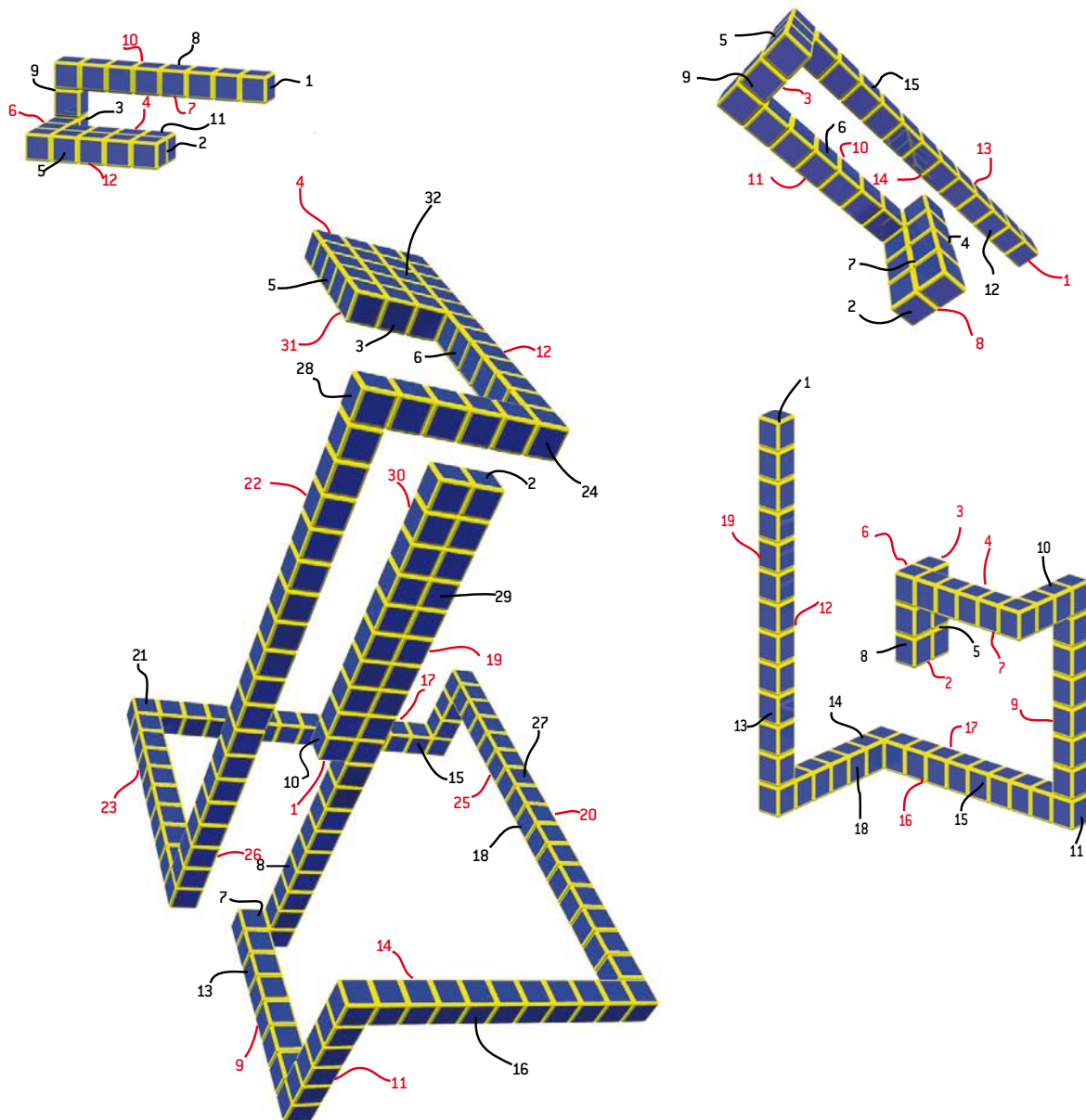
Une variante avec des nombres premiers ?

Au lieu de considérer la suite 1, 2, 3, ..., n pour les longueurs des côtés, prenons la suite des nombres premiers jusqu'à un nombre premier p . Nous nous posons alors un nouveau problème qui n'a, nous allons voir pourquoi, aucune solution, car la suite 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ne comporte qu'un seul nombre pair, 2. Voici la démonstration de cette affirmation en cinq petites étapes.

a) Le nombre de côtés horizontaux et le nombre de côtés verticaux d'un golygone

5. Les quatre golyèdres connus

Adaptant la définition des polygones à la troisième dimension, le mathématicien Joseph O'Rourke a proposé de s'intéresser aux golyèdres. Par définition, les golyèdres sont les polyèdres obtenus en collant face contre face des cubes identiques de côté unité, et dont les faces ont pour aires les entiers successifs $1, 2, \dots, n$. On a démontré qu'il ne peut pas exister de golyèdres à moins de 11 faces (voir l'encadré 6). Aujourd'hui, on en connaît seulement quatre, qui ont respectivement 12, 15, 19 et 32 faces. Ils ont tous été découverts en avril et mai 2014. Francesco De Comitè, un des acteurs de l'aventure des golygones, les a représentés (les aires des faces indiquées ici en rouge correspondent aux faces non visibles sur le dessin).



6. Le nombre minimal de faces est 11 ou 12

Les golygones ont un nombre de côtés qui est nécessairement un multiple de 8 (voir l'encadré 1). De même, le nombre de faces d'un golyèdre ne peut pas être n'importe quel entier. On sait aujourd'hui que c'est nécessairement un nombre de la forme $4k$ ou $4k + 3$ et que ce nombre est supérieur à 10. Dit autrement, les seules valeurs possibles pour le nombre de faces d'un golyèdre sont les nombres de la suite :

11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k + 3$, ... Voici, en six étapes, le raisonnement qui justifie cette affirmation.

a) L'aire totale d'un golyèdre est nécessairement un nombre pair.

Tout golyèdre peut être obtenu en ajoutant, un à un, des cubes à un cube initial. Or, à chaque fois qu'on ajoute un cube, la parité du nombre de faces de cubes composant la surface du polyèdre obtenu reste constante. En effet, si le nouveau cube est collé sur une face seulement, alors il en cache 1 et en ajoute 5, ce qui fait une augmentation de 4 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par deux faces, il en cache 2, et en ajoute 4, ce qui fait une augmentation de 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par trois faces, il en cache 3 et en ajoute 3 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 4 faces, il en cache 4 et en ajoute 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 5 faces, il en cache 5 et en ajoute 1 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé en 6 faces, il en cache 6 ; la parité est conservée. Au départ, il y a un seul cube, donc 6 faces. Puisque 6 est pair et que la parité est conservée à chaque ajout, l'aire totale du polyèdre obtenu est paire.

b) Le nombre de faces d'un golyèdre est de la forme $4k$ ou $4k + 3$.

La somme des entiers de 1 jusqu'à n , $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$, vaut $n(n+1)/2$.

Si $n = 4k$, la somme vaut $4k(4k+1)/2 = 2k(4k+1)$, qui est un nombre pair. Si $n = 4k + 1$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+1)(4k+2)/2 = (4k+1)(2k+1)$, qui est un nombre impair (car produit de deux nombres impairs). Cela ne pourra convenir pour un golyèdre qui, d'après (a), est nécessairement d'aire totale paire. Si $n = 4k + 2$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+2)(4k+3)/2 = (2k+1)(4k+3)$. Ce nombre est impair et ne peut donc pas convenir pour un golyèdre. Enfin, si $n = 4k + 3$, la somme vaut $(4k+3)(4k+4)/2 = (4k+3)(2k+2)$, un nombre pair.

c) Il y a six types de faces.

Les polyèdres composés de cubes identiques collés par leurs faces ont des faces qui sont des polygones composés de carrés identiques collés par leurs côtés, et tous ces polyèdres ont six types de faces.

En effet, il y a deux types de faces parallèles au plan xy (déterminés par les axes Ox et Oy) selon que la normale à la face est orientée comme Oz , ou en sens inverse. Notons ces deux types de faces $xy/z+$ et $xy/z-$.

De même, il y a deux sortes de faces parallèles au plan xz ($xz/y+$, $xz/y-$), et deux sortes de faces parallèles au plan yz ($yz/x+$ et $yz/x-$).

d) La somme des aires des faces $xy/z+$ est égale à la somme des aires des faces $xy/z-$. De même avec $xz/y+$ et $xz/y-$, et avec $yz/x+$ et $yz/x-$.

Cette propriété se démontre en remarquant que l'égalité (entre les aires des faces $xy/z+$ et $xy/z-$) se conserve quand, partant d'un assemblage de cubes qui la vérifie, on en ajoute un nouveau collé à l'assemblage (analogue au raisonnement (a)).

e) Il faut au moins trois faces différentes parallèles au plan xy , car s'il n'y en a que deux, il y en a une de type $xy/z-$ et une de type $xy/z+$ qui, d'après ce qu'on vient de voir, ont la même aire, ce qui est impossible puisque dans un golyèdre toutes les faces ont des aires différentes. De même, il faut trois faces différentes parallèles au plan xz , et trois faces différentes parallèles au plan yz . Cela montre qu'un golyèdre a au moins 9 faces.

f) Les nombres 9 et 10 ne sont pas possibles d'après (b). Un golyèdre a donc au moins 11 faces et le nombre de faces possibles est donné par la suite : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k + 3$, ...

sont égaux, car en suivant le golygone, on alterne côtés horizontaux et côtés verticaux.

b) La somme des longueurs des côtés horizontaux est paire, car en suivant le périmètre, on se déplace autant vers la droite que vers la gauche. De même, la somme des longueurs des côtés verticaux est paire.

c) S'il existait un golyèdre dont les longueurs des côtés soient les nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$), avec le segment de longueur 2 horizontal (ce qu'on peut supposer sans perte de généralité), alors il faudrait que le nombre de segments horizontaux soit impair pour que la somme de leurs longueurs soit paire (on commence par 2 et ensuite il faut un nombre pair de nombres premiers, pour que la somme soit paire).

d) Cela entraînerait que le nombre de segments verticaux serait impair et donc que la somme des longueurs des segments verticaux serait impaire (une somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire), ce qui est contraire à ce que nous avons vu en (b).

e) Il n'existe donc pas de golygones ayant la suite des nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$) comme longueurs des côtés.

Qu'à cela ne tienne : Harry Smith a proposé de remplacer le 2 par un 1 et a trouvé des solutions. Pour 16 côtés, il y en a deux qui sont (avec une notation évidente) :

– 1N 3E 5N 7O 11N 13O 17N 19E 23N 29O 31N 37E 41S 43E 47S 53O

– 1N 3E 5S 7O 11S 13O 17N 19E 23N 29O 31S 37E 41S 43E 47N 53O.

Changer les angles : les alpha-golygones

Une autre variante du problème des golygones s'obtient en remplaçant les seuls angles $+90^\circ$ et -90° autorisés entre deux côtés consécutifs par d'autres angles. L. Sallows a étudié en profondeur cette question. Il a par exemple recherché les « golygones » ayant les angles 60° et -60° (voir l'encadré 3). Un remarquable résultat a été démontré par Hans Cornet, un professeur de mathématiques à la retraite, concernant la variante avec les angles. En voici l'énoncé : pour tout angle α (alpha) de la forme $(n/d) 360^\circ$ avec n et d entiers, il existe des polygones dont les angles de

deux côtés consécutifs sont α ou $-\alpha$ et dont les longueurs des côtés sont, dans l'ordre, les entiers consécutifs 1, 2, ..., k .

La démonstration ne permet pas d'affirmer l'existence de tels polygones ne se croisant pas. On ne sait pas non plus caractériser les angles pour lesquels ces « α -golygones » existent, mais on sait que d'autres angles que ceux de la forme $(n/d) 360^\circ$ donnent parfois des α -golygones (voir le plus simple d'entre eux dans l'encadré 4).

Après ces recherches menées autour de 1990, un étonnant travail de généralisation en dimension 3 du problème des golygones s'est déroulé au premier semestre 2014.

En 3D : les golyèdres

Le 23 février 2014, Joseph O'Rourke, sur le site *Mathematics Stack Exchange* (<http://math.stackexchange.com/>), puis le 28 avril sur le site *Mathoverflow* (<http://mathoverflow.net/about>) a proposé de rechercher des polyèdres composés de cubes identiques de côté 1 (chaque face a donc une aire unité), collés par leurs faces, et dont les faces (nécessairement des carrés juxtaposés) aient pour aire 1, 2, 3, ..., n . Comme il n'y a pas d'ordre naturel sur les faces de tels polyèdres, aucune contrainte d'ordre des faces n'est imposée. Il a proposé de nommer « golyèdres » ces polyèdres. La question était donc : existe-t-il des golyèdres ? J. O'Rourke conjecturait que la réponse était négative.

Pourtant, le 30 avril 2014, Adam Goucher de *Trinity College* à Cambridge a envoyé un message sur la liste de diffusion *Math-Fun* indiquant qu'il avait trouvé un golyèdre à 32 faces (voir l'encadré 5). Dans un article publié en même temps (<http://cp4space.wordpress.com/2014/04/30/golygons-and-golyhedra/>), il donnait quelques explications sur la méthode mise en œuvre pour trouver ce premier golyèdre. Il indiquait aussi un raisonnement montrant qu'il ne peut pas y avoir de golyèdres à moins de 11 faces, et que le nombre de faces d'un golyèdre est nécessairement de la forme $4k$ ou $4k + 3$ (voir l'encadré 6). Cela laissait ouverte la question : quel est le plus petit entier n pour lequel il existe un golyèdre ayant n faces ?

D'après les contraintes démontrées sur ce plus petit entier, il ne pouvait être que l'un des nombres suivants : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31 ou 32.

Le 9 mai 2014, Alexei Nigin proposa un nouveau golyèdre record à 15 faces. Dix jours plus tard, sans battre le record du nombre minimal de faces, un troisième golyèdre fut découvert par Erich Friedman : il a 19 faces. La « taille » minimale d'un golyèdre ne pouvait plus être que 11, 12 ou 15.

À la grande surprise de tous, le 24 mai, A. Nigin découvrit un golyèdre à 12 faces. Ce golyèdre a une étonnante propriété : on peut le construire sans colle en posant des cubes les uns sur les autres. En effet, correctement orienté, le golyèdre se décompose en une série de piles verticales placées côte à côte, chaque pile n'étant composée que d'un cube posé sur le sol et de cubes placés directement sur lui à la verticale.

Aujourd'hui, on connaît donc quatre golyèdres et le nombre minimum de faces d'un golyèdre ne peut plus être que 11 ou 12.

Deux hypothèses sont envisageables. Soit on découvrira un golyèdre à 11 faces et le nombre minimal de faces d'un golyèdre sera donc 11. Soit un raisonnement géométrique ou un calcul établira que 11 n'est pas possible, et le minimum recherché sera donc 12.

D'autres questions restent non résolues :
– Existe-t-il des golyèdres à n faces pour tous les entiers n de la forme $4k$ et $4k + 3$ à partir de 12 ?

– Combien y en a-t-il pour chaque nombre n de faces envisageables ?

– Certains golyèdres pavent-ils l'espace ?

– Si l'on remplace les cubes accolés par des tétraèdres réguliers (ayant quatre triangles équilatéraux pour faces), existe-t-il des golyèdres de ce type ? Si oui, pour quelles valeurs du nombre de faces ? Combien ?

Dans le champ mathématique infini, on rencontre de jolies choses et des problèmes qui défient amateurs et professionnels. Ils obligent parfois à utiliser des ordinateurs, mais ces derniers, pas plus que l'intelligence des meilleurs esprits, ne détiennent de méthodes générales donnant les réponses aux questions qui s'accumulent... parfois plus rapidement que les réponses.

■ L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

A. Goucher, *Golygons and golyhedra*, 30 avril 2014, <http://tinyurl.com/qfphnzc>

J. O'Rourke, *Can we find lattice polyhedra with faces of area 1,2,3,...?*, 28 avril 2014, <http://tinyurl.com/noc28ne>

J. O'Rourke, *Lattice orthogonal polyhedra face-area sequences : Golyhedra ?*, 23 février 2014, <http://tinyurl.com/pnxctnq>

L. Sallows, *New pathways in serial isogons*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 14(2), pp. 55-67, 1992.

L. Sallows, M. Gardner, R. Guy et D. Knuth, *Serial isogons of 90 degrees*, *Mathematics Magazine*, vol. 64(5), pp. 315-324, 1991.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Superman est-il une super-fourmi ?

Ce super-héros soulève des voitures, des immeubles... Pour expliquer sa force, ses créateurs ont comparé ses capacités à celle d'une fourmi qui aurait la même taille. L'argument est-il convaincant ou faut-il chercher ailleurs ?

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

La force extraordinaire de Superman est l'un de ses traits les plus connus. Sur la couverture du premier *comics* narrant ses aventures (*Action Comics*, juin 1938), il est représenté soulevant une voiture pour la projeter sur des malfaiteurs. Sa puissance musculaire n'a fait que croître au fil de ses aventures : deux ans après sa première apparition, alors que Metropolis – la ville imaginaire où se déroulent la plupart de ses actions – est ravagée par un tremblement de terre, Superman soutient un immeuble sur le point de s'effondrer, le temps que ses occupants se mettent à l'abri. Plus tard, on le verra déchirer des plaques d'acier, creuser un immense canal à mains nues ou transformer un morceau de charbon en diamant en le serrant dans son poing !

La question de l'origine de sa force se pose rapidement. Un argument sera en vogue pendant la première décennie de la carrière de Superman : « Superman est originaire d'une planète dont les habitants ont une structure physique en avance de plusieurs millions d'années sur la nôtre. À leur maturité, les êtres de sa race sont ainsi dotés d'une force extraordinaire. »

Conscient de la faiblesse de cette première explication pour un héros dont la notoriété grandissait, ses pères ont imaginé des arguments plus raffinés. Dans le numéro 58 de la revue *Superman* (paru en 1949), on trouve une explication plus physique : « Chacun sait que Superman est un être d'une autre planète,

évoluant dans la faible gravité terrestre. Mais peu de gens savent comment la gravité affecte la force ! Si vous étiez sur un monde plus petit que le nôtre, vous pourriez sauter par-dessus de hauts bâtiments, soulever des poids énormes, reproduisant ainsi des exploits de l'Homme d'Acier ! » Les textes suivants soulignèrent encore l'importance de la différence de gravité entre la Terre et Krypton, la planète d'origine de Superman.

L'argument sonne juste : certaines disciplines sportives, comme les sauts ou l'haltérophilie, dépendent bien du poids, c'est-à-dire de l'intensité avec laquelle la gravité de la planète tire les corps vers son centre. Ainsi, sur la Lune, dont la gravité est six fois inférieure à celle de la Terre, votre performance en détente sèche serait six fois meilleure. Cependant, on peut se demander s'il est bien raisonnable que les muscles de Superman, arrivé bébé sur Terre, aient gardé la mémoire de ce qu'ils auraient été si l'Homme d'Acier était resté sur Krypton.

Un peu plus tard, une autre explication a été invoquée par ses créateurs. Dans une paire d'images intitulées « Une explication scientifique de l'étonnante force de Clark Kent [le nom d'adoption de Superman] », ils comparaient les prouesses du héros à celles des insectes : « Kent vient d'une planète dont les habitants ont une structure physique en avance de plusieurs millions d'années sur la nôtre. À l'âge adulte, les Kryptonien sont dotés d'une force titanesque. Incroyable ? Non ! Car il existe sur notre planète des êtres doués d'une force



1. SUPERMAN MONTRE sa force surhumaine dès son apparition dans le premier numéro du magazine *Action Comics*, en 1938.