

deux côtés consécutifs sont α ou $-\alpha$ et dont les longueurs des côtés sont, dans l'ordre, les entiers consécutifs 1, 2, ..., k .

La démonstration ne permet pas d'affirmer l'existence de tels polygones ne se croisant pas. On ne sait pas non plus caractériser les angles pour lesquels ces « α -golygones » existent, mais on sait que d'autres angles que ceux de la forme $(n/d) 360^\circ$ donnent parfois des α -golygones (voir le plus simple d'entre eux dans l'encadré 4).

Après ces recherches menées autour de 1990, un étonnant travail de généralisation en dimension 3 du problème des golygones s'est déroulé au premier semestre 2014.

En 3D : les golyèdres

Le 23 février 2014, Joseph O'Rourke, sur le site *Mathematics Stack Exchange* (<http://math.stackexchange.com/>), puis le 28 avril sur le site *Mathoverflow* (<http://mathoverflow.net/about>) a proposé de rechercher des polyèdres composés de cubes identiques de côté 1 (chaque face a donc une aire unité), collés par leurs faces, et dont les faces (nécessairement des carrés juxtaposés) aient pour aire 1, 2, 3, ..., n . Comme il n'y a pas d'ordre naturel sur les faces de tels polyèdres, aucune contrainte d'ordre des faces n'est imposée. Il a proposé de nommer « golyèdres » ces polyèdres. La question était donc : existe-t-il des golyèdres ? J. O'Rourke conjecturait que la réponse était négative.

Pourtant, le 30 avril 2014, Adam Goucher de *Trinity College* à Cambridge a envoyé un message sur la liste de diffusion *Math-Fun* indiquant qu'il avait trouvé un golyèdre à 32 faces (voir l'encadré 5). Dans un article publié en même temps (<http://cp4space.wordpress.com/2014/04/30/golygons-and-golyhedra/>), il donnait quelques explications sur la méthode mise en œuvre pour trouver ce premier golyèdre. Il indiquait aussi un raisonnement montrant qu'il ne peut pas y avoir de golyèdres à moins de 11 faces, et que le nombre de faces d'un golyèdre est nécessairement de la forme $4k$ ou $4k + 3$ (voir l'encadré 6). Cela laissait ouverte la question : quel est le plus petit entier n pour lequel il existe un golyèdre ayant n faces ?

D'après les contraintes démontrées sur ce plus petit entier, il ne pouvait être que l'un des nombres suivants : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31 ou 32.

Le 9 mai 2014, Alexei Nigin proposa un nouveau golyèdre record à 15 faces. Dix jours plus tard, sans battre le record du nombre minimal de faces, un troisième golyèdre fut découvert par Erich Friedman : il a 19 faces. La « taille » minimale d'un golyèdre ne pouvait plus être que 11, 12 ou 15.

À la grande surprise de tous, le 24 mai, A. Nigin découvrit un golyèdre à 12 faces. Ce golyèdre a une étonnante propriété : on peut le construire sans colle en posant des cubes les uns sur les autres. En effet, correctement orienté, le golyèdre se décompose en une série de piles verticales placées côte à côte, chaque pile n'étant composée que d'un cube posé sur le sol et de cubes placés directement sur lui à la verticale.

Aujourd'hui, on connaît donc quatre golyèdres et le nombre minimum de faces d'un golyèdre ne peut plus être que 11 ou 12.

Deux hypothèses sont envisageables. Soit on découvrira un golyèdre à 11 faces et le nombre minimal de faces d'un golyèdre sera donc 11. Soit un raisonnement géométrique ou un calcul établira que 11 n'est pas possible, et le minimum recherché sera donc 12.

D'autres questions restent non résolues :
– Existe-t-il des golyèdres à n faces pour tous les entiers n de la forme $4k$ et $4k + 3$ à partir de 12 ?

– Combien y en a-t-il pour chaque nombre n de faces envisageables ?

– Certains golyèdres pavent-ils l'espace ?

– Si l'on remplace les cubes accolés par des tétraèdres réguliers (ayant quatre triangles équilatéraux pour faces), existe-t-il des golyèdres de ce type ? Si oui, pour quelles valeurs du nombre de faces ? Combien ?

Dans le champ mathématique infini, on rencontre de jolies choses et des problèmes qui défient amateurs et professionnels. Ils obligent parfois à utiliser des ordinateurs, mais ces derniers, pas plus que l'intelligence des meilleurs esprits, ne détiennent de méthodes générales donnant les réponses aux questions qui s'accumulent... parfois plus rapidement que les réponses.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

A. Goucher, *Golygons and golyhedra*, 30 avril 2014, <http://tinyurl.com/qfphnzc>

J. O'Rourke, *Can we find lattice polyhedra with faces of area 1,2,3,...?*, 28 avril 2014, <http://tinyurl.com/noc28ne>

J. O'Rourke, *Lattice orthogonal polyhedra face-area sequences : Golyhedra ?*, 23 février 2014, <http://tinyurl.com/pnxctnq>

L. Sallows, *New pathways in serial isogons*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 14(2), pp. 55-67, 1992.

L. Sallows, M. Gardner, R. Guy et D. Knuth, *Serial isogons of 90 degrees*, *Mathematics Magazine*, vol. 64(5), pp. 315-324, 1991.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Superman est-il une super-fourmi ?

Ce super-héros soulève des voitures, des immeubles... Pour expliquer sa force, ses créateurs ont comparé ses capacités à celle d'une fourmi qui aurait la même taille. L'argument est-il convaincant ou faut-il chercher ailleurs ?

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

La force extraordinaire de Superman est l'un de ses traits les plus connus. Sur la couverture du premier *comics* narrant ses aventures (*Action Comics*, juin 1938), il est représenté soulevant une voiture pour la projeter sur des malfaiteurs. Sa puissance musculaire n'a fait que croître au fil de ses aventures : deux ans après sa première apparition, alors que Metropolis – la ville imaginaire où se déroulent la plupart de ses actions – est ravagée par un tremblement de terre, Superman soutient un immeuble sur le point de s'effondrer, le temps que ses occupants se mettent à l'abri. Plus tard, on le verra déchirer des plaques d'acier, creuser un immense canal à mains nues ou transformer un morceau de charbon en diamant en le serrant dans son poing !

La question de l'origine de sa force se pose rapidement. Un argument sera en vogue pendant la première décennie de la carrière de Superman : « Superman est originaire d'une planète dont les habitants ont une structure physique en avance de plusieurs millions d'années sur la nôtre. À leur maturité, les êtres de sa race sont ainsi dotés d'une force extraordinaire. »

Conscient de la faiblesse de cette première explication pour un héros dont la notoriété grandissait, ses pères ont imaginé des arguments plus raffinés. Dans le numéro 58 de la revue *Superman* (paru en 1949), on trouve une explication plus physique : « Chacun sait que Superman est un être d'une autre planète,

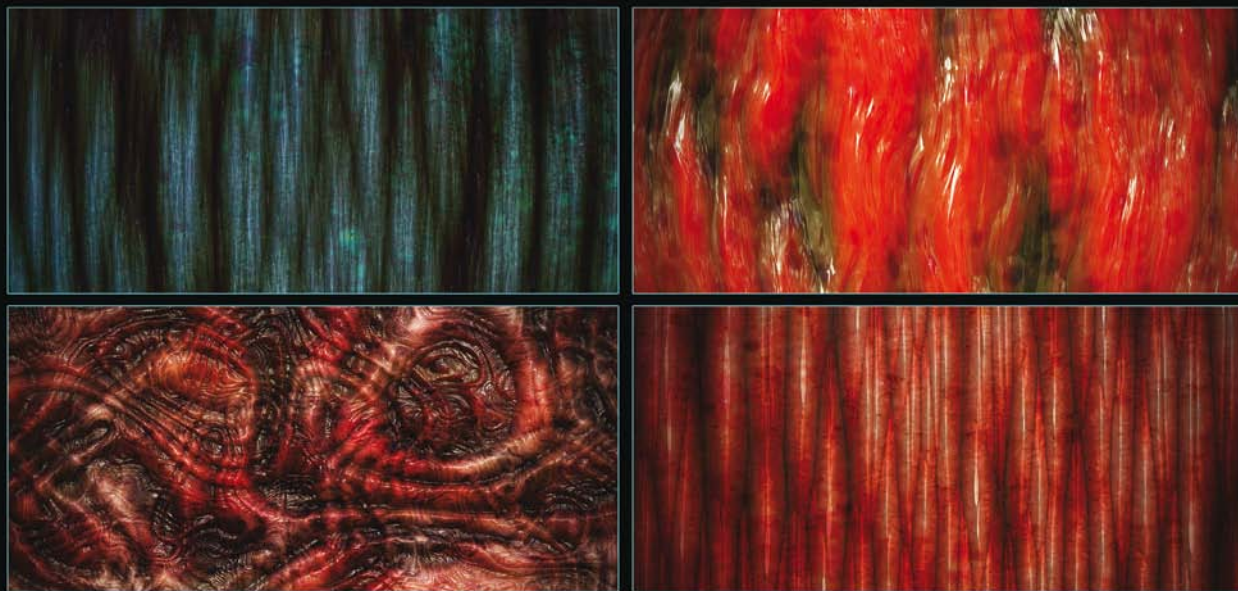
évoluant dans la faible gravité terrestre. Mais peu de gens savent comment la gravité affecte la force ! Si vous étiez sur un monde plus petit que le nôtre, vous pourriez sauter par-dessus de hauts bâtiments, soulever des poids énormes, reproduisant ainsi des exploits de l'Homme d'Acier ! » Les textes suivants soulignèrent encore l'importance de la différence de gravité entre la Terre et Krypton, la planète d'origine de Superman.

L'argument sonne juste : certaines disciplines sportives, comme les sauts ou l'haltérophilie, dépendent bien du poids, c'est-à-dire de l'intensité avec laquelle la gravité de la planète tire les corps vers son centre. Ainsi, sur la Lune, dont la gravité est six fois inférieure à celle de la Terre, votre performance en détente sèche serait six fois meilleure. Cependant, on peut se demander s'il est bien raisonnable que les muscles de Superman, arrivé bébé sur Terre, aient gardé la mémoire de ce qu'ils auraient été si l'Homme d'Acier était resté sur Krypton.

Un peu plus tard, une autre explication a été invoquée par ses créateurs. Dans une paire d'images intitulées « Une explication scientifique de l'étonnante force de Clark Kent [le nom d'adoption de Superman] », ils comparaient les prouesses du héros à celles des insectes : « Kent vient d'une planète dont les habitants ont une structure physique en avance de plusieurs millions d'années sur la nôtre. À l'âge adulte, les Kryptonien sont dotés d'une force titanesque. Incroyable ? Non ! Car il existe sur notre planète des êtres doués d'une force



1. SUPERMAN MONTRE sa force surhumaine dès son apparition dans le premier numéro du magazine *Action Comics*, en 1938.



2. LES MUSCLES DE SUPERMAN pourraient être différents de ceux des humains et conférer au super-héros une force bien supérieure. Ci-dessus, quelques exemples imaginaires de fibres musculaires.

extraordinaire. La modeste fourmi supporte ainsi des poids cent fois supérieurs au sien. La sauterelle fait des bonds dont la longueur rapportée à l'échelle humaine est équivalente à plusieurs dizaines de mètres. » Avec ce raisonnement, un homme pourrait soulever une masse 100 fois supérieure à la sienne, soit 7 à 8 tonnes, ce qui correspond aux premières performances de Superman, lequel ne serait alors qu'une super-fourmi. Cet argument extrapole une propriété d'une échelle de taille à une autre en supposant que la force d'un être est proportionnelle à sa masse. Qu'en est-il en réalité ?

La force dépend du diamètre des muscles

La force d'un muscle dépend notamment du nombre de fibres musculaires – des cellules très allongées à plusieurs noyaux nommées myocytes – qui le composent. Et elle dépend surtout du diamètre des fibres, les plus grosses étant les plus fortes. Ainsi, si un haltérophile est plus fort que vous, ce n'est pas forcément parce que ses muscles ont plus de fibres musculaires que les vôtres, mais parce que ses fibres sont plus grosses. La force qu'un muscle peut exercer est donc proportionnelle à sa section.

Les muscles humains sont capables, selon leur fonction, de produire une force comprise entre 30 et 100 newtons par centimètre carré de section. Il s'ensuit que la force n'est pas proportionnelle à la masse

corporelle. En effet, cette masse étant proportionnelle au volume, elle est proportionnelle au cube de la taille caractéristique du corps. Par ailleurs, la force développée par les membres est proportionnelle à leur section, donc au carré de la taille caractéristique du corps. On en déduit que la force physique croît proportionnellement à la puissance deux tiers de la masse corporelle. Cette loi peut être vérifiée empiriquement en se fondant sur les records d'haltérophilie.

Finalement, les plus lourds sont bien les plus forts, mais pas autant qu'on le croit. Et la force par unité de masse, qui varie comme l'inverse de la racine cubique de la masse, est par exemple à l'avantage du gymnaste, qui a souvent une masse raisonnable et est capable de performances physiques, telles que les sauts, inaccessibles à un haltérophile. En revanche, en force absolue, ce dernier dépasse de loin le gymnaste. Bien sûr, deux personnes de même masse peuvent avoir des performances physiques différentes. Notre argument ne s'applique donc qu'en moyenne, car il est possible d'augmenter sa force physique par un entraînement adéquat ou par l'utilisation de produits illicites qui augmentent la masse musculaire, donc le diamètre des fibres.

Appliquons notre relation pour estimer la force d'une fourmi à partir de celle d'un humain. Un homme moyen pèse environ 75 kilogrammes et est capable de soulever sa masse. Une fourmi de 20 milligrammes pèse 3 750 000 fois moins qu'un humain. Elle ne

peut donc, d'après notre formule, soulever qu'une masse d'environ 3 grammes, ce qui représente 150 fois sa masse. Par ce raisonnement, nous retrouvons bien l'ordre de grandeur de la performance d'une fourmi, en dépit de sa morphologie différente. La validité de notre relation montre que l'on ne peut pas expliquer la force de Superman par une simple proportionnalité et que l'explication proposée par les auteurs n'est pas la bonne.

Remarquons que notre raisonnement supposait implicitement que les fibres musculaires ont des propriétés mécaniques identiques chez l'homme et le Kryptonien. Si la force de ce dernier dépendait aussi de la longueur de la fibre [propriété qui n'a jamais été observée sur Terre], elle serait proportionnelle au volume, donc à la masse corporelle. L'argument des auteurs de Superman serait alors valable. Mais cela suppose que la physique de Superman est différente de la physique sur Terre, ce qui laisse libre cours aux hypothèses les plus débridées !

Autre piste : alors que chez l'homme, le nombre de fibres musculaires atteint un maximum à l'âge adulte et varie peu, le Kryptonien bénéficie peut-être d'un nombre croissant de fibres musculaires tout au long de sa vie. Serait-ce pourquoi sa force a augmenté au fil de ses aventures ? ■

R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris.

ART & SCIENCE

La première Voie lactée réaliste

En 1609, dans La Fuite en Égypte, l'artiste allemand Adam Elsheimer a représenté une Voie lactée constituée d'étoiles : c'était inédit !

Le peintre était informé des travaux de Galilée, qui avait découvert la nature stellaire de la Galaxie peu de temps auparavant.

Loïc MANGIN

Cet été, loin des grandes agglomérations et de leur pollution lumineuse, vous avez peut-être pris le temps de regarder le ciel par une belle nuit sans nuage. Vous avez alors admiré des myriades d'étoiles et cette grande bande blanchâtre qu'est la Voie lactée. Pour ceux qui n'auraient pas bénéficié de conditions météorologiques favorables, *La fuite en Égypte*, du peintre allemand Adam Elsheimer (1578-1610) donne un aperçu du spectacle qu'ils ont manqué [voir page ci-contre, b]. L'œuvre est conforme à la réalité [a].

Nous savons aujourd'hui que la Voie lactée correspond à la galaxie, de type spirale, où est situé, à sa périphérie, le Système solaire. Notre galaxie est un disque de plus de 100 000 années lumière de diamètre qui abriterait quelque 100 milliards d'étoiles. Cette vision des choses s'est progressivement établie depuis le début du XVII^e siècle. Qu'imaginait-on auparavant ?

Un mythe grec a donné son nom à la Voie lactée (*Galaxias* en grec). Zeus prend le jeune Héraclès, son fils, et le met au sein d'Héra, endormie, afin que l'enfant accède à l'immortalité. Trop empressé et sans doute trop avide, il réveilla en sursaut la femme du roi des dieux qui repoussa violemment le goulu (Héraclès était le fils adultérin d'Alcmène, une conquête de Zeus) : de ce mouvement brusque, une giclée de lait jaillit et se fixa dans le ciel. Un autre mythe grec

fait de la Voie lactée la trace d'un incendie. La Galaxie était un fleuve céleste dans le monde chinois, un bras de mer pour les anciens habitants de Tahiti, une rivière pour les Aborigènes d'Australie, un équivalent céleste du Gange, fleuve sacré terrestre, pour les Hindous.

Toutes ces légendes ont un point commun : la Voie lactée y est un milieu continu, le plus souvent liquide. Aucune ne rend compte de sa nature pointilliste. Et cela a été longtemps le cas, notamment dans l'esprit de la plupart des savants occidentaux qui sont restés sous l'influence d'Aristote jusqu'au

Elsheimer serait le premier peintre à se soucier de la bonne position des étoiles et des constellations dans ses œuvres.

XV^e siècle. En effet, selon ce dernier, la Voie lactée était un phénomène atmosphérique sublunaire, une sorte de nuage nébuleux. Bien que d'autres, tels Démocrite, Ptolémée, Alhazen ou Averroès, aient postulé une origine stellaire, la conception aristotélicienne prévalait, et c'est elle que l'on retrouvait dans les représentations artistiques.

Pourtant, dans l'œuvre de Elsheimer, la Galaxie est bien constituée de multiples petits points blancs correspondant chacun à une étoile ! En fait, à en croire Francesco Bertola, professeur d'astrophysique à l'Université de Padoue, en Italie, ce tableau serait

la première représentation de la Galaxie conforme à la réalité. Comment l'expliquer ?

Cela s'est joué à l'aube du XVII^e siècle, en Italie. À la fin des années 1600, Galilée, alors professeur à l'Université de Padoue, fabrique ses lunettes astronomiques, instruments inventés quelques années plus tôt, et se livre aux premières observations célestes. Se tournant vers la Voie lactée, il observe qu'elle est composée d'étoiles si nombreuses que leur densité confère à la galaxie un aspect nuageux, lacté. Il publie ses résultats dans *Sidereus Nuncius* (*Le Messager céleste*), un court traité d'astronomie paru en 1610. L'ouvrage eut un grand retentissement.

Or à cette époque, Elsheimer était en Italie. Il était arrivé à Venise à la fin du XVI^e siècle, puis il vécut à Rome dans les premières années du siècle suivant. Intéressé par l'astronomie, il eut connaissance des travaux de Galilée avant même la parution du *Sidereus Nuncius*, puisque *La fuite en Égypte* a été peinte en 1609, un an avant la mort de l'artiste.

Outre le réalisme de la Voie lactée, on peut observer la pertinence des constellations (la flèche blanche indique la Grande Ourse). Elsheimer serait également le premier à se soucier de la position des étoiles dans ses œuvres. ■

J. Parks, *Adam Elsheimer : Rich and magical storytelling*, *American Artist*, vol. 71, pp. 36-45, 2007.

F. Bertola, *Via lactea*, Biblos, 2004.



IDÉES DE PHYSIQUE

Un microscope pour moins d'un euro

Une simple bille de verre peut servir de loupe. Suffisamment petite et avec un montage approprié, elle peut aussi devenir un microscope performant.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Tout le monde a en tête l'image d'un microscope ordinaire : un appareil assez volumineux, avec son pied, sa platine, sa tourelle d'objectifs, son oculaire... et dont les premiers modèles coûtent quelques dizaines d'euros au moins. Or Manu Prakash, de l'Université Stanford, a conçu avec deux collègues un dispositif qui fait depuis quelques mois sensation : un microscope coûtant moins d'un dollar, réalisé en découpant et pliant une feuille de carton, et qui grossit plus de 1 000 fois !

Le cœur de ce dispositif est constitué par une bille de saphir de diamètre inférieur au millimètre. C'est en quelque sorte une réminiscence du premier microscope, conçu à la fin du XVII^e siècle par le marchand et savant hollandais Antoni van Leeuwenhoek. Voyons quel en est le principe optique.

Une lentille convexe...

Que faisons-nous pour observer les détails d'un objet ? Nous l'approchons le plus possible de notre œil afin d'augmenter l'angle sous lequel nous le voyons. La meilleure distance est la plus courte pour laquelle notre œil peut encore accommoder (voir la figure 1a). Nommée *punctum proximum*, elle est d'environ 25 centimètres (elle est plus faible pour les myopes et augmente avec l'âge). La résolution angulaire de l'œil au centre du champ visuel étant de l'ordre d'une minute d'arc, cela signifie que nous ne pouvons distinguer des détails mesurant moins de 50 micromètres.

Comment faire mieux ? En s'aidant d'instruments. Le plus simple est la loupe, composée d'une seule lentille, bien souvent une lentille mince aux faces convexes. Dans son utilisation la plus courante, l'objet est placé dans le plan focal de la lentille, de telle sorte que les rayons émergents soient parallèles ; l'œil observe alors sans avoir à accommoder (voir la figure 1b). Dans cette configuration, c'est la distance entre la loupe et l'objet, soit ici la distance focale de la lentille, qui détermine l'angle sous lequel l'objet est vu. Le grossissement de la loupe est égal au rapport du *punctum proximum* sur cette distance.

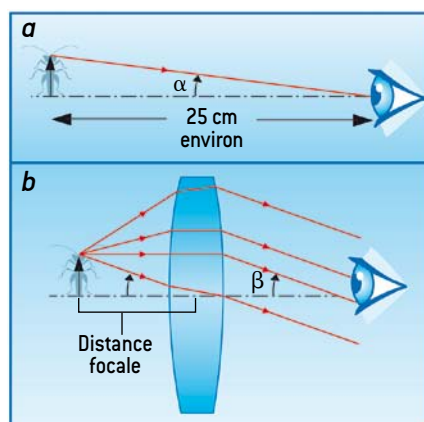
Lorsqu'on désire un champ d'observation large, la lentille doit être grande et la courbure de ses faces, pour des raisons pratiques, faible. On obtient la loupe qu'affectionne

Sherlock Holmes et qui, avec une distance focale de l'ordre de cinq centimètres, grossit environ cinq fois.

Cette utilisation de la loupe ne nécessitant aucune accommodation, elle est confortable. Mais elle n'autorise pas un grossissement important. Pour voir des détails plus fins, il faut, comme l'horloger ou le bijoutier, adopter un second mode d'utilisation en plaçant l'œil tout contre la loupe.

...puis sphérique

Dans cette configuration, le grossissement est comparable à celui de la première position, mais le champ d'observation est bien plus grand. Quitte à restreindre ce dernier, il est alors possible d'augmenter le gros-



1. À L'ŒIL NU, la plus courte distance à laquelle on peut observer un objet sans trop d'efforts d'accommodation est de l'ordre de 25 centimètres [a]. Avec une loupe, l'objet est placé généralement au foyer de la lentille, et l'angle sous lequel on le voit est augmenté [b]. Le grossissement est égal au rapport β/α des angles de vue.