

5. Les graphes de Erich Friedman

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
1							
2							
3							

Erich Friedman s'est intéressé aux graphes-allumettes ayant uniquement des sommets de degré n ou m (n et m étant deux entiers fixés, ici $m = 1, 2, 3$ et $n = 2, 3, \dots, 8$). Nous les nomme-

rons « graphes-allumettes de type $n-m$ ». On recherche à chaque fois les solutions minimales (voir la page www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html).

doute que dessiner un graphe-allumettes en partant seulement de la donnée de ses arêtes exige des calculs qui deviennent déraisonnablement longs quand le nombre d'arêtes augmente.

Le maximum de points distants d'une unité

Un graphe-allumettes est un ensemble de points du plan dont tous ceux liés par une arête sont distants d'une unité exactement. Une question naturelle se pose à propos des ensembles des points distants d'une unité. C'est le grand mathématicien hongrois Paul Erdős qui y a pensé le premier en 1946. Un entier n étant fixé, on considère n points sur un plan ; combien au plus de couples de points peuvent-ils être mutuellement à distance 1 ? À la condition d'autoriser les croisements d'allumettes (ce qui jusqu'à présent n'était pas le cas), ce nombre, que nous noterons $f(n)$, est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe-allumettes ayant n sommets. Erdős s'est penché sur cette suite $f(n)$ qui, depuis, a donné lieu à une série de publications. Quelques dessins permettent de trouver les premières valeurs

de $f(n)$: $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 7, f(6) = 9$.

Au-delà, c'est nettement plus délicat comme le montrent les configurations optimales de l'encadré 4, qui conduisent aux valeurs : $f(7) = 12, f(8) = 14, f(9) = 18, f(10) = 20, f(11) = 23, f(12) = 27, f(13) = 30, f(14) = 33$.

La beauté et l'importance des mathématiques sont sans doute liées à ce que nous constatons en étudiant les graphes-allumettes : au départ, le sujet est simple, et semble n'être qu'une question combinatoire assez facile à maîtriser. Pourtant, en allant y voir de plus près, toutes sortes de mathématiques y glissent leur nez (dénombrements délicats, topologie, polynômes, classes de complexité, etc.) pour, finalement, constituer des vrais et difficiles sujets de recherche dont personne ne sait faire le tour et dont les avancées enrichissent les mathématiques d'objets fascinants, tel le graphe de Harborth. ■



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

■ L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'Université
de Lille
et chercheur
au Laboratoire d'informatique
fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

S. Kurz et G. Mazzuocollo, **3-regular matchstick graphs with given girth** (<http://arxiv.org/abs/1401.4360>), 2014.

S. Kurz et R. Pinchasi, **Regular matchstick graphs**, *The Amer. Math. Monthly*, vol. 118(3), pp. 264-267, 2011.

E. Gerbracht, **Minimal polynomials for the coordinates of the Harborth graph** (<http://arxiv.org/pdf/math/0609360.pdf>), 2006.

P. Brass, W. Moser et J. Pach, **Research Problems in Discrete Geometry**, Springer, 2005.

Références supplémentaires sur le site www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Visions d'un autre monde

Ils peuvent voir de loin, de nuit ou à 360 degrés... Les héros de la science-fiction ont la vue perçante. Pourtant, les animaux terrestres n'ont rien à leur envier.

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

Les yeux des extraterrestres dans la science-fiction font preuve d'une grande diversité : globuleux comme ceux de Jar Jar Binks (*Star Wars*), à pupille verticale pour les aliens de la série télévisée *V*, ou encore à facettes comme chez le monstre d'Edgar Burroughs dans la nouvelle *Yellow Men of Mars* (1948). Si ces organes sont variés, c'est qu'ils doivent aussi faire ressortir la personnalité de leur porteur : E. T. du film éponyme de Steven Spielberg a de grands yeux bleus, signe infaillible que c'est un gentil, tandis que l'atrabilaire Sebulba (*Star Wars*) a de petits yeux jaunes qui lui confèrent un regard perfide. Enfin, les yeux du monstre Alien ne semblent pas visibles, ce qui accentue l'angoisse provoquée par ce superprédateur.

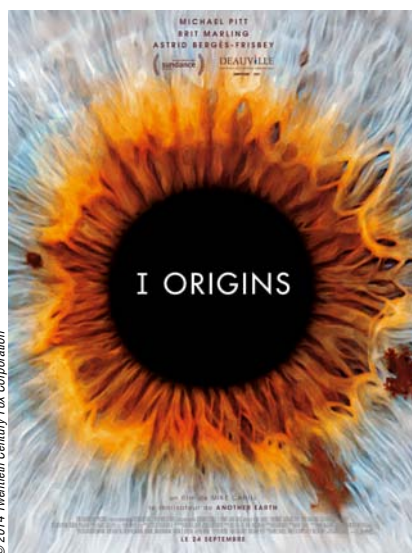
La diversité des yeux extraterrestres rivalise avec celle des animaux sur Terre. Rien que chez l'homme, on peut identifier une personne d'après le motif unique de l'iris, une idée au centre de l'intrigue de *I Origins* (voir la figure 1). La vision est un sens très répandu et l'évolution a conduit à une grande variété de systèmes sensibles à la lumière.

Un dispositif simple, présent chez des organismes unicellulaires, est celui de photorécepteurs capables de détecter la direction et l'intensité d'une source lumineuse. La cellule se dirige alors vers la lumière pour optimiser sa photosynthèse. Chez la plupart des êtres vivants, la lumière

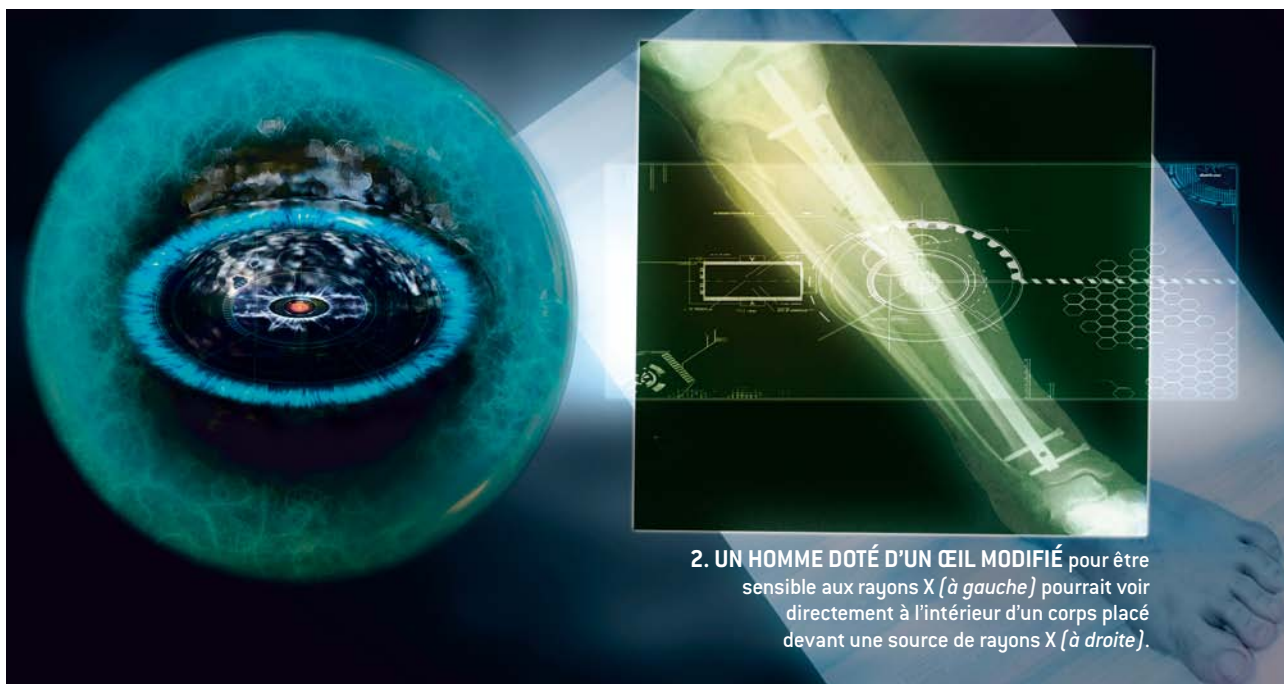
est détectée grâce à une famille de protéines nommées opsines. Celles-ci sont capables d'absorber la lumière pour la convertir en signal électrique traité par le système nerveux.

Dans le monde animal, on trouve deux grandes catégories d'yeux, les simples et les composés, apparus indépendamment au cours de l'évolution. Les yeux simples ont une surface sensible à la lumière sur laquelle l'image est formée. Le nautilus est le seul exemple d'animal à œil simple fonctionnant comme un sténopé, que l'on nomme aussi *camera obscura* ou chambre noire. La lumière entre par un petit trou et se projette sur la face opposée. Avec ce système, l'œil voit net à toutes les distances en même temps, mais l'image est peu lumineuse, car la petite taille du trou ne permet pas de recueillir beaucoup de lumière.

En utilisant la réflexion, l'œil de la coquille Saint-Jacques forme une image plus lumineuse : une couche réflectrice concave, derrière la rétine, joue le rôle de miroir. Les rayons provenant d'une même direction sont ainsi réfléchis différemment selon leur incidence et sont concentrés sur un faible nombre de photorécepteurs, permettant la formation d'une image lumineuse. Enfin, chez les vertébrés et certains mollusques, l'image est formée par réfraction à travers un matériau transparent situé devant la rétine (le cristallin dans l'œil humain). Cela permet de dévier les rayons lumineux et de concentrer ceux provenant



1. DANS *I ORIGINS* (Mike Cahill, 2014), le héros étudie l'évolution de l'œil. Il tombe amoureux d'une femme et la retrouve grâce au motif unique de l'iris de ses yeux.



2. UN HOMME DOTÉ D'UN ŒIL MODIFIÉ pour être sensible aux rayons X (à gauche) pourrait voir directement à l'intérieur d'un corps placé devant une source de rayons X (à droite).

d'une même direction sur une zone limitée de la rétine, à la manière d'une loupe.

Dans le film *La Mouche* (David Cronenberg, 1986), une tentative de téléportation tourne mal et le héros se transforme progressivement en mouche. Il expérimente ainsi la vision de ces insectes dotés d'yeux à facettes, composés de multiples récepteurs sensibles à la lumière, les ommatidies. Il y en a jusqu'à 30 000 chez certains coléoptères ! Les yeux composés sont apparus au début du Paléozoïque avec les premiers arthropodes : des sortes de cloportes présents dans les mers il y a 521 millions d'années avaient déjà des yeux comptant plus de 15 000 ommatidies.

Ces yeux à facettes confèrent à l'animal une vision à 360 degrés ou presque. Une autre façon d'avoir une vue large dépend de la position des yeux sur la tête. Cette caractéristique révèle aussi la position trophique de l'animal, proie ou prédateur.

Chez une proie, tels les moineaux, les lapins ou les souris, les yeux sont placés de part et d'autre de la tête. Cela augmente le champ visuel et facilite la détection d'un danger dans l'environnement. À l'inverse, chez un prédateur, tels les chats ou les rapaces, les yeux sont placés l'un à côté de l'autre à l'avant du crâne, ce qui permet d'avoir une vision binoculaire et de mieux estimer la distance d'une proie. On ne voit pas la position des yeux d'Alien, mais, dans le troisième opus de la saga, la vue du monstre est simulée par des lentilles *fisheye*

qui augmentent le champ de vision et les chances de repérer la victime.

En l'air, Superman repère de très loin une catastrophe. Sa vision acérée n'est pas sans rappeler celle des rapaces. Ils peuvent distinguer des détails à des distances deux à trois fois supérieures à celles qui nous sont accessibles : un faucon crécerelle peut repérer une souris en volant à 50 mètres de haut et le faucon pèlerin peut apercevoir un pigeon à plus d'un kilomètre.

De nuit, rien n'échappe au Prédateur

Quelle est la particularité de la vue du Prédateur, le chasseur par excellence ? Sa vision est parfaitement adaptée pour traquer ses proies humaines : elle est sensible à la lumière infrarouge émise par leur corps chaud. Cependant, la vision au-delà du spectre visible n'est pas réservée à la science-fiction.

Par exemple, le crotale détecte ses proies dans l'obscurité totale grâce à des fossettes situées entre les yeux et les narines. Il s'agit de cavités creuses dont les parois sont tapissées de nerfs sensibles au réchauffement provoqué par l'absorption de rayonnement infrarouge. Leur maximum de sensibilité correspond au rayonnement émis par des proies dont la température est d'environ 30 °C. L'image dans ces récepteurs demeure assez rudimentaire : la lumière passe par un petit trou et forme sur le fond

de la cavité l'image inversée de l'animal observé, comme dans une chambre noire. Cette image est trop floue pour permettre au serpent de bien reconnaître sa cible, qu'il identifie plutôt grâce à son odorat. Mais une fois la proie choisie, ce moyen de détection lui suffit pour l'atteindre à coup sûr.

À l'autre extrémité du spectre visible, la lumière ultraviolette est exploitée par d'autres animaux : l'abeille, l'hirondelle, le poisson zèbre... et les stomatopodes. Ces derniers sont des crustacés nommés aussi squilles ou, par les anglophones, « crevettes-mantes », même si ce ne sont ni des crevettes ni des mantes. Leurs yeux ont 3 pigments différents pour la lumière ultraviolette et 12 pour le visible. Ils bougent indépendamment l'un de l'autre, comme chez le caméléon, et offrent une vision à 360 degrés. Chaque œil est composé de trois sortes de pupilles indépendantes, ce qui confère à chaque œil une vision en relief. Enfin, ces animaux discernent la lumière polarisée.

Pour battre de telles caractéristiques, un extraterrestre devra être équipé d'une vision vraiment extraordinaire. Mais si ses yeux doivent composer avec les lois de l'optique, on peut s'attendre à certaines différences : notamment, ils seront adaptés au spectre lumineux de leur soleil. ■

R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris.

ART & SCIENCE

Le réveil de la matière fatiguée

Comment donner à voir le vide quantique ? La parole abstraite des scientifiques s'associe à l'expression artistique de danseurs, de vidéastes, de musiciens... pour raconter l'origine de l'Univers.

Loïc MANGIN

Comment est né l'Univers ? Selon les hypothèses en vigueur aujourd'hui, il résulterait des fluctuations du vide quantique ! Cette réponse est peu satisfaisante, car elle conduit à de nombreuses autres interrogations, à commencer par « Qu'est-ce que le vide quantique ? ».

À ce stade, deux options sont possibles : soit vous vous inscrivez à l'université pour faire de longues études de physique, soit vous guettez la venue dans votre région de *Origins*. Il s'agit d'un spectacle imaginé par la journaliste de radio Marie-Odile Monchicourt avec la participation de nombreux scientifiques, dont Michel Spiro, ancien président du conseil du Cern. Citons également parmi les contributeurs Hubert Reeves, Étienne Klein, Marc Lachièze-Rey, Pierre Sonigo, Sandrine Laplace, Stéphane Dugowson, Anatole Khelif...

L'idée centrale du projet est de donner à voir des concepts ardues qui défient le sens commun (c'est bien le cas du vide quantique) à l'aide d'un outil inédit de divulgation des connaissances, en l'occurrence un spectacle. Dans celui-ci, mis en scène par Jack Souvant, trois acrobates danseurs évoluent, parfois accrochés à des filins, sur une structure aérienne constituée d'éléments métalliques, tels des mâts, des escaliers et des rampes (voir les photographies page ci-contre). La musique a été composée par Benjamin Moussay.

Par ailleurs, Pierrick Sorin, artiste vidéaste et scénographe, a conçu des « petits

théâtres optiques », c'est-à-dire des dispositifs dans lesquels des physiciens et des mathématiciens donnent des indications et des informations sur divers concepts (voir la figure ci-dessous). Par ce stratagème, la parole des scientifiques est transmise de façon ludique dans un contexte décalé.

Par exemple, selon É. Klein, le vide est rempli d'une sorte de matière fatiguée qui



ne demande qu'un peu d'énergie pour sortir de sa torpeur. Aussi voit-on, dans un des théâtres optiques, le physicien devenu une sorte de prince charmant réveillant une « matière au bois dormant » endormie.

Un premier volet de *Origins* consacré au vide quantique a été présenté les 15 et 16 septembre 2014 au Centre des Arts d'Enghien-les-Bains, l'établissement étant

l'un des coproducteurs du projet avec le collectif *Bonheur Intérieur Brut*.

Le projet *Origins* organise également des *Labos* où se rencontrent artistes, scientifiques, philosophes et public. Ces échanges nourrissent l'écriture du spectacle. Dans l'un d'eux, M. Spiro raconte que les idées d'Albert Einstein sont plus accessibles aujourd'hui qu'à l'époque où elles ont été énoncées, grâce à des générations de pédagogues qui se sont succédé pour les digérer et les rendre plus intelligibles.

Il en ira sans doute de même des progrès récents de la physique, notamment la découverte du boson de Higgs en juillet 2012 et la mesure précise du fond diffus cosmologique par le satellite *Planck* en 2013. Ces deux résultats majeurs sont des étapes décisives sur le chemin qui nous conduit à la compréhension de l'Univers, de ses débuts et de son histoire. Et de fait, le vide quantique est la clef de voûte de cet édifice intellectuel en construction.

Nous avons donc là aussi besoin de quelques générations de pédagogues pour bien comprendre de quoi il retourne, et *Origins* nous montre le chemin. P. Sorin prévient : « On sort du spectacle peut-être plus perdu qu'on ne l'était en y entrant, mais avec cette conscience qu'il y a quelque chose que l'on ne maîtrise pas et qui influe beaucoup sur notre manière d'être au monde. » ■

Le site de *Origins, le spectacle* pour connaître les dates des prochaines représentations et des *Labos* : www.originslespectacle.eu