

OFFRE SPÉCIALE D'ABONNEMENT

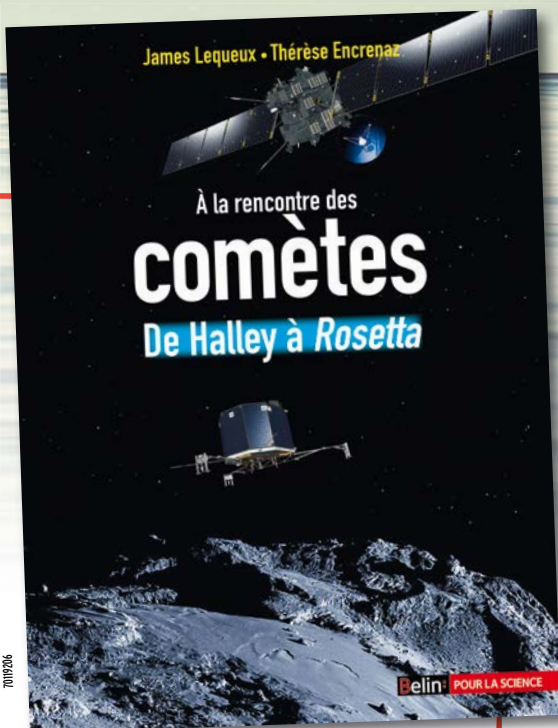
A retourner accompagné de votre règlement à : Service Abonnement 19 rue de l'Industrie 67402 Illkirch Cedex

POUR LA SCIENCE

Votre abonnement PASSION

6,50€ par mois seulement

le magazine
+ le hors-série chez vous
+ les versions numériques offertes
sur **www.pourlascience.fr**



1. MA FORMULE

- ☐ **OUI**, je m'abonne à l'offre « Passion » à 6,50€ par mois.
Je reçois le magazine *Pour la Science* (12 n°/an)
+ son hors-série *Dossier Pour la Science* (4 n°/an)
+ mon cadeau.



Mon e-mail obligatoire pour l'accès aux contenus numériques (à remplir en majuscules)

@
À réception de votre bulletin, comptez 5 semaines pour recevoir votre n° d'abonné. Passé ce délai, merci d'en faire la demande à pourlascience@abopress.fr

2. MES COORDONNÉES

Nom : _____
Prénom : _____
Adresse : _____
Code postal : _____ Ville : _____
Pays : _____ Tél. : _____
Pour le suivi client (facultatif)

3. MON MODE DE RÈGLEMENT

- ☐ Je règle par prélèvement 6,50€ par mois* et reçois en cadeau le livre *À la rencontre des comètes*. Je remplis l'autorisation ci-dessous en joignant impérativement un IBAN/BIC. (PASPVK4)

*Pour la France métropolitaine et d'outre-mer. Pour l'Europe (pays de la zone SEPA) : 7,90€ par mois. Dénonçable à tout moment auprès du service abonnement avec un préavis de 3 mois. Conditions complètes sur www.pourlascience.fr

AUTORISATION DE PRÉLÈVEMENT PAR MANDAT SEPA

En signant ce mandat SEPA, j'autorise Pour la Science à transmettre des instructions à ma banque pour le prélèvement de mon abonnement dès réception de mon bulletin. Je bénéficie d'un droit de rétractation dans la limite de 8 semaines suivant le premier prélèvement. Plus d'informations auprès de mon établissement bancaire.

1 - COORDONNÉES DU TITULAIRE DU COMPTE

Nom, prénom _____
Adresse _____
Numéro et nom de la rue
Code postal _____ Ville _____ Pays _____

2 - COORDONNÉES BANCAIRES

IBAN _____
Numéro d'identification international du compte bancaire - IBAN (International Bank Account Number)

BIC _____
Code international d'identification de votre banque - BIC (Bank Identifier Code)

Type de paiement Paiement récurrent/répétitif

POUR LA SCIENCE

3 - Date et signature obligatoires

À _____
Date _____
Signature : _____

NOM DU CRÉANCIER

Pour la Science - 8 rue Férou - 75006 Paris

ICS N° FR92222426900

N° de référence unique de mandat (RUM)

Partie réservée au service abonnement. Ne rien inscrire

- ☐ Je préfère régler mon abonnement d'un an en une seule fois 79€** sans bénéficier du cadeau. (PAS1A)

** Offre valable en France métropolitaine et d'outre-mer. Pour l'étranger, participation aux frais de port à ajouter : Europe 16€ - autres pays 35€.

☐ Par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ Par carte bancaire N° _____
Date d'expiration _____ Clé _____

Signature obligatoire

En application de l'article 27 de la loi du 6 janvier 1978, les informations ci-dessus sont indispensables au traitement de votre commande. Elles peuvent donner lieu à l'exercice du droit d'accès et de rectification auprès du groupe Pour la Science. Par notre intermédiaire, vous pouvez être amené à recevoir des propositions d'organismes partenaires. En cas de refus de votre part, merci de cocher cette case ☐.

LOGIQUE & CALCUL

Le problème des 8 reines... et au-delà

De combien de façons différentes peut-on placer n reines sur un échiquier de taille $n \times n$ dans des positions compatibles ? Posé depuis bientôt deux siècles, ce problème dit des n reines n'est résolu que jusqu'à $n = 26$.

Jean-Paul DELAHAYE

En 1848, un joueur d'échecs allemand, Max Bezzel, pose le problème suivant : est-il possible de placer 8 reines sur l'échiquier de façon qu'aucune ne soit « en prise » (sous le feu d'une autre) ? Rappelons qu'une reine menace toutes les cases de la ligne, de la colonne et des deux diagonales passant par la case qu'elle occupe.

Puisqu'il n'y a que 8 lignes horizontales sur l'échiquier, et qu'une reine au plus peut se trouver sur une telle ligne dans une

solution du problème, il est certain qu'il n'y aura pas plus de 8 reines indépendantes sur l'échiquier 8×8 : s'il existe des solutions, elles comporteront toutes une reine par ligne au maximum. Il en va de même pour les colonnes et les diagonales.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) étudia le problème et le résolut partiellement en proposant 72 solutions avec, pour chacune, 8 reines sur l'échiquier de 64 cases, mais il avait oublié certaines solutions. La première solution complète fut proposée en 1850,

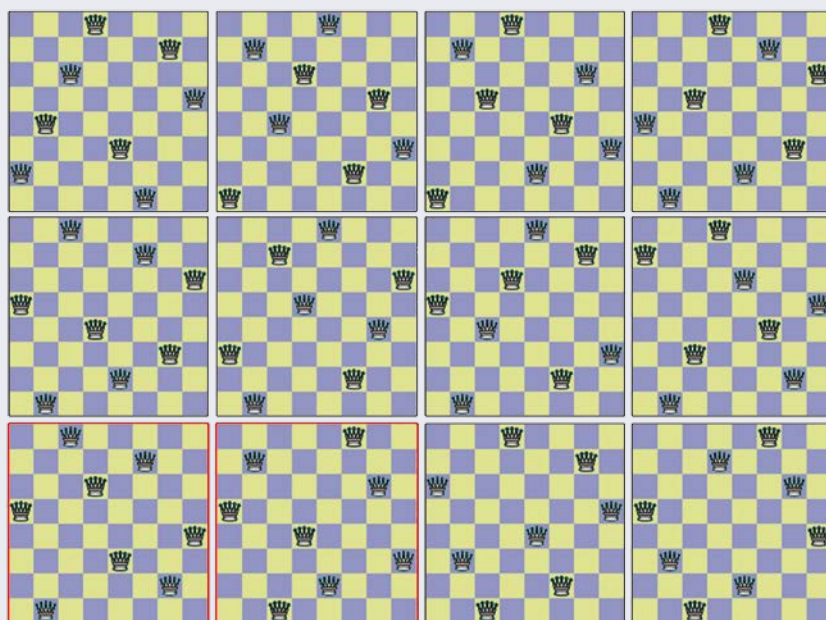
par Franz Nauck. Il existe 92 dispositions convenables, donc 20 de plus que celles trouvées par Gauss. Elles se réduisent à 12 quand on enlève les configurations se déduisant d'une autre par des rotations ou des symétries. Deux de ces 12 solutions ont une jolie propriété : il n'existe jamais trois dames alignées, quelles que soient les droites envisagées. Essayez de les trouver (sans consulter l'encadré ci-dessous).

La généralisation du problème de Bezzel consiste à envisager un échiquier carré

Les 12 solutions de base pour l'échiquier 8×8

On cherche à placer le plus grand nombre possible de reines sur l'échiquier de 64 cases, sans qu'aucune de ces reines ne soit en prise sur une autre.

On ne peut en placer que 8 au plus, car il est impossible d'en mettre 2 sur la même ligne (ou la même colonne). On découvre par tâtonnements qu'il existe des configurations satisfaisantes avec 8 reines. Il y en a 92, qui se réduisent à 12 quand on retire les configurations identiques à une symétrie près ou à une rotation près. Parmi ces solutions, 2 ont la propriété de ne contenir aucun triplet de reines alignées, ce sont les solutions dont le cadre est ici marqué en rouge.



de n cases de côté et à essayer d'y placer n reines. C'est le « problème des n reines ». On découvre sans mal que pour $n=2$ et $n=3$, c'est impossible. En revanche, pour $n \geq 4$, cela semble toujours possible.

On envisage deux aspects du problème :

(i) trouver pour tout n une solution, s'il en existe ;

(ii) trouver toutes les solutions ou seulement les dénombrer, au moins pour les premières valeurs de n .

Une solution, oui ; toutes les solutions, non

Le problème (i) est aujourd'hui parfaitement résolu, cela sans avoir besoin d'un ordinateur : on décrit un procédé général sous forme géométrique qui, pour tout $n \geq 4$, construit une configuration convenable. De tels procédés sont nombreux et on en découvre régulièrement de nouveaux.

La version (ii) est bien plus délicate. Imaginer des procédés simples qui, pour tout entier n , décrivent toutes les solutions ne semble pas envisageable. On utilise donc des ordinateurs pour effectuer des calculs systématiques. C'est un exercice de programmation que tout étudiant en informatique a pratiqué au moins une fois. Il est assez facile d'écrire un programme qui traite le problème jusqu'à $n=12$. Aller au-delà demande plus de soin et de patience et fait l'objet de records qui, à cause de l'explosion combinatoire, évoluent lentement. À ce jour, le décompte des solutions a été mené jusqu'à $n=26$. Réussir ce décompte pour $n=27$ apparaît un défi difficile : on en est à $n=26$ depuis plus de cinq ans.

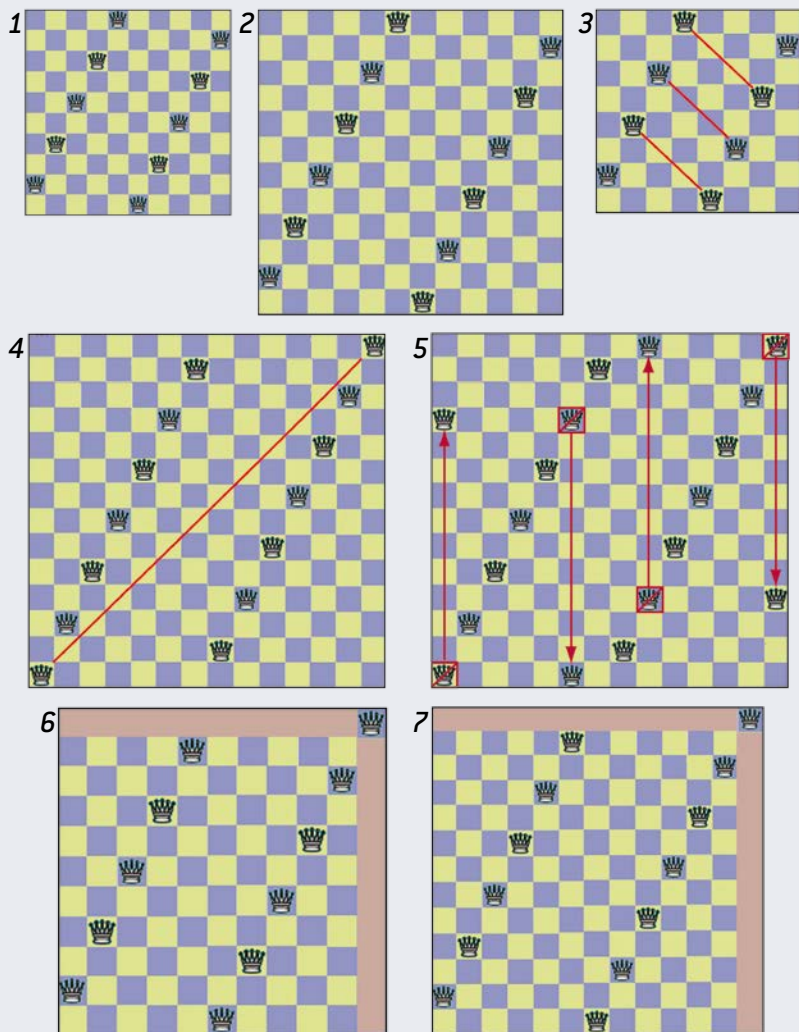
À défaut de connaître le nombre exact de solutions pour tout n , on essaie de minorer ce nombre, car il est intéressant de savoir (et de démontrer) que le nombre de solutions augmente très rapidement avec n . Quelques minoration sont connues et les raisonnements qui y mènent sont assez intéressants. Nous allons en présenter un et expliquer comment plusieurs mathématiciens ont été piégés et ont proposé de faux raisonnements repris parfois sans vérification dans la littérature sur le sujet. Auparavant, présentons la méthode pour obtenir

Une solution pour tout entier $n \geq 4$

Pour montrer que le problème des n reines a au moins une solution pour tout entier $n \geq 4$, il n'y a pas besoin d'ordinateur : il suffit de réfléchir. En plaçant des reines selon deux lignes obliques, on obtient un schéma qui marche parfaitement pour les nombres pairs n de la forme $6m+4$ (échiquier 1, $n=10$), où m est un entier positif ou nul, et de la forme $6m$ (échiquier 2, $n=12$), mais pas quand n est de la forme $6m+2$ (échiquier 3, $n=8$).

Il faut traiter à part le cas où n est de la forme $6m+2$. C'est assez facile : on part de deux lignes obliques de reines (échiquier 4), puis on déplace 4 reines (échiquier 5).

Lorsque n est impair, la solution se déduit des solutions trouvées pour le cas où n est pair : on reprend les solutions pour les cas pairs en ajoutant une reine en haut à droite sur l'échiquier agrandi d'une ligne et d'une colonne (échiquiers 6 et 7).



au moins une bonne configuration pour chaque entier $n \geq 4$.

Pour trouver une solution pour n quelconque, l'idée la plus simple, proposée dès 1874 par Emil Pauls, est de disposer les reines régulièrement selon un double parcours rectiligne de cavalier, en s'arrangeant pour qu'il y ait une reine sur chaque ligne et une sur chaque colonne.

La méthode est parfaite (voir échiquiers 1 et 2 de l'encadré page 79) pour tout entier n multiple de 6 (c'est-à-dire $n = 6m$ où m est un entier), et pour tout n supérieur de 4 unités à un multiple de 6 (c'est-à-dire $n = 6m + 4$). Pour les nombres pairs supérieurs de 2 unités à un multiple de 6 (soit $n = 6m + 2$), la méthode ne convient pas à cause des diagonales (voir échiquier 3). Un autre schéma un peu plus compliqué permet de s'en tirer (voir échiquiers 4 et 5). On a donc une solution pour tout entier pair supérieur ou égal à 4.

Pour les nombres impairs, soit $n = 2m + 1$, on prend une solution pour le nombre pair inférieur d'une unité, soit $2m$, on la place dans le coin en bas à gauche de l'échiquier de côté $2m + 1$, et l'on ajoute une reine dans le coin en haut à droite (voir échiquiers 6 et 7).

Le problème (i) de trouver une solution pour tout entier $n \geq 4$ est donc résolu... sans avoir utilisé d'ordinateur. Disposer d'une solution, c'est très bien, mais les connaître toutes ou réussir à les compter, ce serait encore mieux. À moins d'une découverte mathématique, l'ordinateur semble cette fois indispensable.

Des ruses pour chercher toutes les solutions

Nous allons envisager trois façons de plus en plus « intelligentes » de rechercher toutes les solutions pour une valeur donnée de n . Cette progression de la puissance quand on améliore les méthodes illustre l'idée qu'en informatique, un programme peut être juste et fonctionner parfaitement pour les petites valeurs d'un paramètre, et pourtant être inefficace car conduisant à des temps de calcul irréalistes (des années, des siècles ou plus !) quand le paramètre augmente.

On commence par écrire un sous-programme qui, quand on lui donne une configuration quelconque de n reines, indique si oui ou non elle est satisfaisante. Un tel sous-programme est facile à concevoir, car deux dames en positions (a, b) et (a', b') sur l'échiquier de côté n (où a, a', b, b' varient de 1 à n) sont en prise l'une avec l'autre si et seulement si $a = a'$ (elles sont sur la même ligne) ou $b = b'$ (même colonne) ou $a - b = a' - b'$ (même première diagonale) ou $a + b = a' + b'$ (même seconde diagonale).

La première idée pour calculer toutes les solutions pour n donné consiste à placer n reines de toutes les façons possibles et pour chaque configuration, d'utiliser le sous-programme qui indiquera si la configuration est solution ou non. Il y a n^2 choix possibles pour la première reine, n^2 choix pour la deuxième, etc., jusqu'à la n -ième. Le nombre de configurations à tester est donc exactement $(n^2)^n = n^{2n}$, ce qui, pour $n = 8$, fait environ $2,815 \times 10^{14}$.

La deuxième idée consiste à remarquer que toute solution s'obtiendra en plaçant une reine par colonne, et qu'on peut même s'arranger pour que les reines placées ne soient pas sur les lignes déjà occupées au moment où on les place. Il y a ainsi n façons de placer la première reine dans la première colonne, $n - 1$ façons de placer la deuxième reine sur la deuxième colonne, $n - 2$ façons de placer la troisième reine sur la troisième colonne, etc.

Cela conduit donc à tester en tout $n!$ configurations de n reines. On les teste une à une avec le sous-programme décrit plus haut, qui peut d'ailleurs être simplifié puisque, par construction, les configurations qu'on lui soumet maintenant sont correctes pour les contraintes de lignes et de colonnes. Le gain entre la première méthode et la seconde est considérable. Pour $n = 8$, il n'y a plus que 40 320 configurations à tester, soit environ 7 milliards de fois moins qu'avec la première méthode !

On peut encore faire mieux. La troisième méthode consiste à remarquer que lorsqu'on place les reines une à une comme dans la deuxième méthode, on peut s'apercevoir rapidement qu'on est en train de construire une configuration qui échouera. Si par

exemple on a placé une reine en $(1, 1)$, puis la seconde en $(2, 2)$, elles sont sur la même diagonale : il faut donc cesser de construire cette configuration qui ne donnera jamais de solution, quelles que soient les reines qu'on y ajoutera. Découvrir le plus tôt possible deux reines en prise dans l'énumération ordonnée de toutes les possibilités et remettre en cause le choix qui y a conduit est ce qu'on nomme la méthode de *backtracking*, ou retour arrière. Elle est d'usage courant dans de nombreux problèmes combinatoires.

Le gain obtenu par rapport à la seconde méthode est encore très intéressant et augmente avec n . Si l'on compte comme un essai une position où soit on a réussi à trouver une solution, soit on a découvert qu'il sera impossible d'aller plus loin, alors on trouve les 92 solutions pour $n = 8$ en 13 756 essais. Cela correspond à trois fois moins d'essais qu'avec la deuxième méthode. Pour $n = 12$, on n'effectue que 9 261 880 essais au lieu de $12! = 479\,001\,600$ avec la deuxième méthode ; on a donc gagné un facteur 50. Notons que la seule façon de connaître le nombre d'essais par la troisième méthode est de l'appliquer complètement, car on ne connaît aucune formule simple donnant ce nombre.

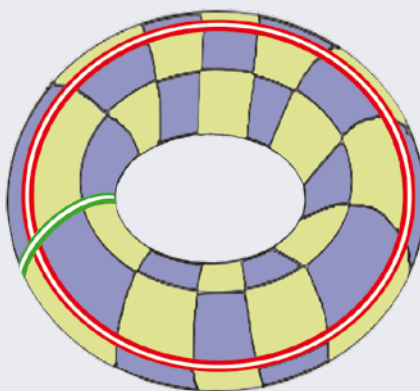
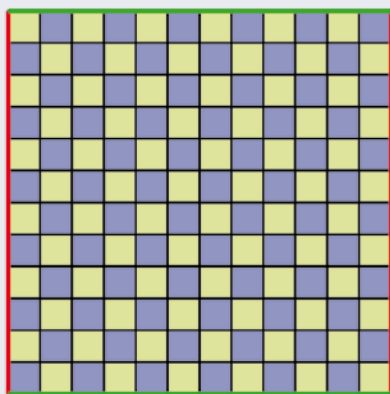
Le record : 26 reines

Il se trouve cependant que pour battre les records, il faut non seulement utiliser une bonne méthode, donc une variante du *backtracking*, mais aussi :

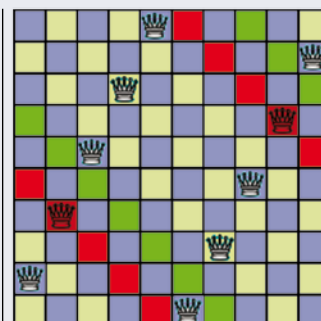
- la programmer très soigneusement ;
- faire exécuter en parallèle les calculs (ce qui n'est pas difficile ici car la méthode s'y prête bien) ;
- fabriquer et utiliser des puces spécialisées qui iront plus vite que les processeurs généraux pour l'exécution des calculs.

C'est ainsi que fonctionne le système informatique aujourd'hui détenteur du record pour $n = 26$. Ce record est détenu par l'université technique de Dresde (projet Queens@TUD), en Allemagne. Les chercheurs ont conçu une méthode massivement parallèle utilisant des circuits FPGA (*field-programmable gate array*) adaptés à ce

Le problème torique et ses prolongements plans

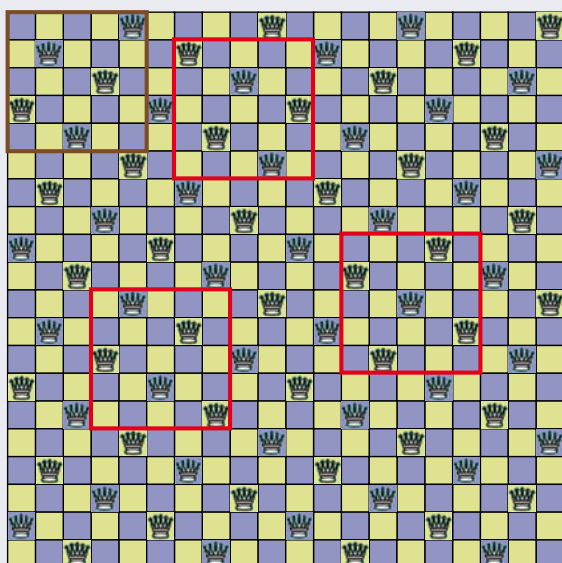


A. Partant d'un échiquier de côté n en caoutchouc, on colle le bord droit avec le bord gauche (*en rouge*). On obtient un échiquier cylindrique. On colle alors les deux extrémités du cylindre (*bords verts*), ce qui donne un tore. Les diagonales du carré initial se sont rejointes et il y en a maintenant n dans chaque sens, chacune ayant n cases.

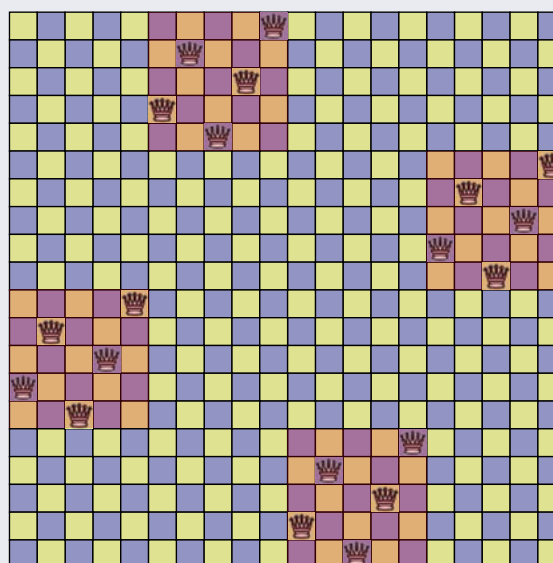


C. Cette solution au problème plan des 12 reines n'en est pas une pour le problème torique : la diagonale rouge contient deux reines (ici, la diagonale verte n'en contient aucune).

B. La diagonale rouge de cet échiquier torique contient deux reines. Cette solution au problème plan des 4 reines n'est donc pas une solution pour le problème torique.



D. Pour $n=5$, le problème torique a 10 solutions (l'une d'elles est représentée, avec un cadre marron). Une solution du problème torique des n reines permet d'en obtenir beaucoup d'autres : en pavant le plan par des carrés solutions du problème torique des n reines et en extrayant un carré $n \times n$ n'importe où dans le plan ainsi pavé, on obtient une autre solution du problème torique (cadres rouges).



E. La « composition » d'une solution plane des 4 reines avec une solution torique des 5 reines fournit une solution au problème plan des 20 reines. En « composant » ainsi les solutions du problème torique des n reines avec des solutions du problème plan des m reines, on obtient un grand nombre de solutions au problème plan des $n \times m$ reines.