

problème habituel) et l'on remplace dans cette solution chaque reine par une solution du problème torique des m reines. Cela donne une configuration de reines sur l'échiquier de côté $n \times m$ qui est une solution au problème plan des $n \times m$ reines (les menaces qui auraient pu se produire en diagonale entre les différentes copies de la solution torique sont évitées par les diagonales allongées de l'échiquier torique).

Le nombre de solutions croît exponentiellement

La méthode de composition permet d'établir que le nombre de solutions au problème des n reines augmente exponentiellement avec n , ce que l'on a constaté jusqu'à $n = 26$, mais qu'il est bon de démontrer rigoureusement pour n tendant vers l'infini.

Voici un exemple de raisonnement. Puisqu'il y a 10 solutions au problème torique des 5 reines, en les combinant de toutes les façons possibles, l'une quelconque des 10 avec l'une quelconque des 10, on obtient 100 solutions au problème des 25 reines. Il est facile de s'assurer qu'elles sont différentes. En recommençant à partir de ces 100 solutions au problème des 25 reines, on obtient 1 000 solutions au problème des 125 reines, puis 10 000 solutions au problème des 625 reines, et, plus généralement, 10^m solutions au problème des 5^m reines. Pour les entiers n de la forme 5^m , on a donc 2^n fois plus de solutions que de nombre de reines. En partant de $T(7) = 28$, on aurait obtenu 28^n solutions au problème des 7^n reines, soit 4^n fois plus de solutions que de reines.

On a bien une démonstration que le nombre de solutions augmente très vite lorsque le nombre de reines est une puissance de 5. En fait, le nombre de solutions comparé au nombre de reines semble croître bien plus vite encore que ne l'indique notre démonstration.

Notons, avant d'en venir aux conjectures, que la méthode décrite permet de concevoir une solution sur l'échiquier infini : du problème torique des 5 reines, on prend la solution présentant une reine au centre et on la combine indéfiniment

avec elle-même, ce qui conduit à une solution (ayant une reine sur chaque horizontale, chaque verticale et même chaque diagonale) du plan infini (voir l'encadré page 82).

La conjecture qui semble la plus probable est que si l'on note $R(n)$ le nombre de solutions au problème des n reines, alors $\log R(n)/(n \log n)$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une constante qui vaut à peu près 0,44438... Si c'est vrai, cela signifie que $R(n)$ augmente aussi vite que $n^{0,44438n}$: c'est beaucoup plus rapide que ce que nous avons su démontrer avec la méthode des solutions toriques de Pólya.

Signalons que certains mathématiciens se sont fait piéger en utilisant la méthode de composition. Ils ont pensé que l'on pouvait remplacer les reines de la solution plane par des solutions différentes du problème torique, ce qui est faux. La démonstration des minoration obtenues est donc fautive, bien que ces minoration soient reproduites dans divers articles, dont celui de Jordan Bell et Brett Stevens de 2009, très souvent cité (voir la bibliographie), où le *Theorem 2* n'est en réalité qu'une conjecture.

D'autres jeux

Les échecs sont un jeu de raisonnement et intéressent donc de nombreux mathématiciens. Cependant, les problèmes d'échecs semblent un peu trop liés aux règles précises du jeu lui-même. Aussi les mathématiciens se sont-ils amusés à concevoir des énigmes combinatoires plus pures, tels le problème des n reines ou le tout aussi populaire problème du parcours du cavalier (faire circuler un cavalier de telle façon qu'il passe par chaque case de l'échiquier une fois exactement) qui a passionné Euler. Ce ne sont pas les seules. Les livres de John Watkins ou l'énorme mémoire gratuit (en anglais et en tchèque !) de Václav Kotěšovec en mentionnent un grand nombre (voir la bibliographie). Ces problèmes ont stimulé le développement de la théorie des graphes et resteront longtemps une source précieuse de défis informatiques et mathématiques.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

R. Spallek, *The world record by FPGAs*, 2015 : <http://queens.inf.tu-dresden.de/?n=0&l=en>

Rosetta Code, *N-queens problem*, 2015 : <http://rosettacode.org/wiki/N-Queens>

V. Kotěšovec, *Non-attacking chess pieces*, 2013
(téléchargeable sur le site <http://www.kotesovec.cz/>).

J. Bell et B. Stevens, *A survey of known results and research areas for n-queens*, *Discrete Mathematics*, vol. 309(1), pp. 1-31, 2009 (attention, *Theorem 2* n'est en fait qu'une conjecture).

J. J. Watkins, *Across the Board : The Mathematics of Chessboard Problems*, Princeton University Press, 2007.

I. Rivin et al., *The n-queens problem*, *Amer. Math. Monthly*, vol. 101(7), pp. 629-639, 1994 (attention, le théorème 2 et son corollaire sont faux).

P. Campbell, *Gauss and the eight queens problem : A study in miniature of the propagation of historical error*, *Historia Mathematica*, vol. 4(4), pp. 397-404, 1977.



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Quel animal roule comme Sonic et BB-8 ?

L'homme a inventé la roue, mais le principe semble beaucoup moins répandu dans la nature. À quelques exceptions près, les animaux qui roulent sont tous imaginaires.

Roland Lehoucq et Jean-Sébastien Steyer. Illustration : Marc Boulay

Le *hoopsnake* (serpent-cerceau) est l'une des plus fameuses bestioles du folklore américain du début du XIX^e siècle. Selon la légende, ce serpent pouvait, à la manière de l'Ouroboros de la mythologie grecque, attraper sa queue avec sa gueule pour former un anneau lui permettant de se déplacer à grande vitesse en roulant. Doté d'un aiguillon venimeux, le seul moyen d'échapper à ce dangereux serpent était de sauter à travers l'anneau qu'il formait, ce qui le désorientait et le rendait incapable de faire demi-tour. On trouverait le *hoop snake* dans diverses régions d'Amérique du Nord et aussi une variété dans les grands espaces australiens. Inutile de préciser que l'existence de cet étrange serpent n'a jamais été démontrée.

Mais existe-t-il des animaux qui roulent en utilisant soit leur corps entier, soit des parties mobiles, des « roues », ou cela est-il l'apanage des animaux imaginaires ? Ces derniers sont nombreux. L'artiste hollandais M. C. Escher, sur une lithographie de 1951 intitulée *Wentelteefje* (*Curl-up* en anglais), a représenté *Pedalternorotandomovens centroculatus articulatus*, une bête fictive, articulée et hexapode qui s'enroule sur elle-même puis se met à rouler. Dans un autre domaine, Sonic – le hérisson de la série de jeux vidéo éponyme, développée par la firme japonaise Sega depuis 1991 – se déplace en roulant très rapidement sur lui-même.

Ce déplacement par roulage est très apprécié des enfants et des gymnastes,



DANS L'ÉPISODE 7 DE STAR WARS, le robot BB-8, composé d'un corps sphérique surmonté d'une tête en lévitation magnétique, roule en modifiant la position de son centre de gravité ; ce qu'il fait en déplaçant ses composants internes.

mais peu d'humains adultes l'utilisent. En revanche, certains organismes allongés sont capables de déformer leur corps pour former une boucle et, éventuellement, de rouler. C'est le cas de la chenille, du myriapode, de la crevette-mante et de la salamandre. D'autres adoptent une posture plus proche de la sphère, tels le pangolin et le tatou (qui se protègent aussi en se roulant en boule), le lézard d'Armardille (dont le nom savant *Ouroborus cataphractus* évoque l'Ouroboros), l'isopode et la dame blanche, une araignée de Namibie qui dévale les dunes en roulant sur elle-même. Ces espèces peuvent rouler passivement, en utilisant la gravité par exemple, ou activement, en déformant leur corps pour modifier la position de leur centre de gravité. On retrouve ce mode de locomotion chez le robot TARS du film *Interstellar* (Christopher Nolan, 2014).

Les plantes ne sont pas en reste, comme le montrent la plupart des graines et le virevoltant, bien connu des amateurs de westerns. Il s'agit d'un ensemble de tiges ramifiées qui, une fois sèches, se détachent de la racine de certaines plantes des déserts du sud des États-Unis. Sa forme à peu près sphérique lui permet de rouler au gré du vent et de répandre ses graines.

Le mouvement de rotation pourrait se limiter à une partie du corps, telle la roue autour d'un axe. En dépit de l'ubiquité de la roue dans les véhicules humains, aucun organisme terrien ne semble l'avoir adopté. L'une des rares structures biologiques



rotatives qui s'en rapprochent est le flagelle de certaines bactéries. Chez les procaryotes, un moteur moléculaire situé sur l'embase du flagelle assure sa rotation. Ce système fournit un couple propulsif à un corps fixe, à la manière de l'hélice d'un navire. Et le système est plutôt efficace, car la vitesse de déplacement de la bactérie peut atteindre soixante longueurs corporelles par seconde. À peu près la moitié des bactéries disposent d'au moins un flagelle, indiquant que l'hélice a probablement plus de succès que la roue.

Le plus grand obstacle anatomique à l'existence d'organismes multicellulaires à roues est l'interface entre les parties statique et rotative. Contrairement aux articulations, qui ont une liberté de mouvement limitée, une roue doit être capable de tourner librement d'un angle arbitraire par rapport au reste de l'organisme.

L'interface entre la roue et son axe pose problème : si elle est constituée de tissu vivant, il faut la « nourrir », en oxygène et en nutriments. Le réseau vasculaire habituel ne peut convenir, car il aurait besoin d'être « déroulé » de temps en temps, afin d'éviter d'être endommagé par la torsion due à la rotation de la roue. La même difficulté s'applique à l'éventuel système nerveux qui contrôlerait le mouvement et la vitesse de la roue. L'alimentation de la roue, elle, pourrait être transmise par diffusion, mais c'est un processus très lent. Pour s'en sortir, il faudrait que la roue soit constituée de matière presque inerte, excrétée par le corps

de l'animal, comme nous le faisons avec la kératine de nos ongles ou de nos cheveux.

Par ailleurs, dans la plupart des environnements terrestres, la roue présente d'autres désavantages, comparée à des membres articulés. Si la roue est très efficace pour se déplacer sur un terrain nivelé et dur, comme une route pavée, elle n'est pas vraiment adaptée à un terrain souple, déformable ou accidenté. Elle devient alors sujette à une forte résistance à l'avancement à cause des frictions engendrées par la déformation du sol sur lequel elle se déplace. De plus, alors que la roue interagit avec le sol sur l'ensemble de sa trace, des pattes ou des pieds ne sont en contact avec lui que sur un ensemble de petites zones localisées, ce qui limite les pertes d'énergie.

La roue moins efficace que les pattes articulées

Les sols les plus déformables engendrent bien sûr les résistances les plus grandes : il est ainsi cinq à huit fois moins efficace de rouler sur un sol souple que sur une surface en béton. Et c'est encore deux à trois fois pire sur du sable. Cela explique pourquoi le transport des marchandises se faisait avec des chariots à roues dans les régions de l'Empire romain bien équipées en routes en dur, alors que les caravanes de dromadaires étaient bien plus efficaces dans les déserts du Moyen-Orient et d'Afrique du Nord.

Les roues sont également mal adaptées au franchissement d'obstacles, surtout ceux ayant une hauteur comparable à leur taille. Si l'animal ou le véhicule peut se déformer pour déplacer son centre de masse, la hauteur limite que peut franchir une roue passive (c'est-à-dire non propulsée) est égale à son rayon. Sans déformation possible, cette limite est comprise entre un quart et la moitié du rayon. C'est pourquoi les roues destinées aux terrains accidentés sont plus grandes. De plus, un véhicule non articulé peut se retrouver coincé au sommet d'un obstacle laissant ses roues tourner dans le vide. Le risque de retournement est aussi non négligeable : il suffit que la projection au sol du centre de masse du véhicule sorte de ses points d'appui, ce qui peut arriver en porte-à-faux. À l'inverse, les pattes sont bien plus efficaces pour se déplacer en toutes circonstances.

Avec toutes ces difficultés, on comprend aisément pourquoi la vie multicellulaire n'a pas exploré la possibilité de se déplacer sur une ou plusieurs roues, et pourquoi la sélection naturelle n'a pas retenu un tel dispositif. Étant donné les désavantages de la roue, il se pourrait même que la bonne question ne soit pas : « pourquoi la nature n'a-t-elle pas inventé la roue ? », mais plutôt : « pourquoi les véhicules humains n'utilisent-ils pas des pattes articulées ? ».

Roland LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. J.-Sébastien STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris.
Marc BOULAY est sculpteur numérique.

ART & SCIENCE

Et en Amazonie coule la Seine...

Une toile géante, présentée à 360°, permet d'explorer la forêt amazonienne sans y aller. Le spectateur est plongé dans un panorama spectaculaire où lui sont donnés à voir différents types de forêts tropicales. Un art grandeur nature !

Loïc MANGIN

Par les temps qui courent, ce serait bien compréhensible, vous avez peut-être envie d'évasion, d'un grand bol de nature. La forêt amazonienne est un des endroits idéaux pour une échappée belle. Trop loin ? Une solution de rechange est disponible : l'exposition présentée au Panorama XXL, à Rouen, sur les quais de la Seine. De quoi s'agit-il ? D'*Amazonia*, une toile immense, de 31 mètres de hauteur et 101 de longueur, disposée en cylindre de façon à offrir une vue à 360°. Les plus de 3 000 mètres carrés de l'œuvre, que l'on doit à l'artiste d'origine iranienne Yadegar Asisi, offrent une immersion complète en forêt tropicale... sans avoir besoin de s'envoler pour l'Amérique du Sud !

Le public est invité à gravir une structure centrale pour contempler, de trois hauteurs différentes, le foisonnement de la végétation peuplée de plusieurs dizaines d'espèces animales que l'on peut débusquer à l'aide de quelques jumelles disséminées sur les balustrades. Le détail est tel que l'on peut repérer jusqu'à une chenille déambulant sur le sol.

Pour mieux renforcer l'illusion, la lumière crée une alternance du jour et de la nuit et même, aidée par une bande sonore adéquate, un épisode d'orage. Dans la phase d'obscurité, des éclairages ultraviolets font briller les zones blanches de la toile donnant ainsi l'impression d'un clair de lune sous les frondaisons.

Comment s'y est pris l'artiste ? Pour *Amazonia*, il a séjourné à quatre reprises au Brésil, et s'est entouré des conseils de deux botanistes, d'abord Wilfried Morawetz, responsable du jardin botanique de Leipzig, puis Dietmar Satter. Yadegar Asisi est revenu avec des milliers de photographies et de nombreux croquis. Il a ensuite composé sur ordinateur son œuvre mixte, où les photographies correspondent à environ 70 % du total, puis l'a fait imprimer en Allemagne, par bandes de 3 mètres sur 30.

L'œuvre de 3 000 mètres carrés offre une immersion complète en forêt amazonienne... sans avoir besoin de s'envoler pour l'Amérique du Sud !

Il a souhaité rendre compte de la diversité de la forêt amazonienne, un milieu loin d'être homogène. En effet, d'abord, elle se répartit sur plusieurs étages, du sol jusqu'à la canopée. Ensuite, elle est un assemblage complexe de plusieurs types de végétation.

Citons la varzea, une forêt inondée par des crues de plusieurs mois, la terra firme, c'est-à-dire la forêt de plaine qui reste les pieds au sec, ou bien la forêt d'altitude qui s'étend sur les contreforts des Andes jusqu'à 3 000 mètres d'altitude. Tous ces écosystèmes, ainsi que différents points d'eau (cascades, ruisseaux, mares...), figurent dans le panorama où les arbres sont représentés à taille réelle.

