

minutes, puis le ressortait : la réponse à l'encre sympathique était apparue grâce à la propagation du révélateur et de ses vapeurs à travers les pages du livre.

À la fin du XVIII^e siècle, on vit un regain d'intérêt pour la magie naturelle ; l'encre invisible, avec ses substances naturelles, était dans le ton. Certains praticiens étaient des illusionnistes et des magiciens de scène qui manipulaient la réalité à l'aide de tours de passe-passe. D'autres étaient des scientifiques que la mode des tours de magie servant d'emballage pour l'éducation scientifique enchantait, et nombre d'entre eux écrivaient des livres dans ce sens.

Ces nouveaux livres de magie naturelle contenaient moins de physique expérimentale et plus d'effets physiques spectaculaires, dont l'encre sympathique. Citons par exemple *Die natürliche Magie: aus allerhand belustigenden und nützlichen Kunststücken bestehend* («La magie naturelle, consistant en toutes sortes d'amusements et de tours utiles», 1779), une série monumentale de Johann Wiegand, un des apothicaires-chimistes les plus informés et respectés de l'Allemagne des Lumières.

À l'assaut des cabinets de chimie

L'explosion d'intérêt pour la magie naturelle coïncida avec l'invention des cabinets de chimie, des caisses pleines de fournitures pour les expérimentateurs amateurs. En 1791, le chimiste et pharmacien allemand Johann Götting construisit l'un des premiers cabinets portables de chimie. Les tubes à essai n'étaient pas inclus dans le kit ; Götting utilisait un verre à vin pour mélanger les produits. La tradition de magie naturelle et ces cabinets portables de chimie conduisirent au design et au marketing des coffrets de chimie modernes.

Des ouvrages tels que *Conversations in Chemistry* (1805), de l'auteure britannique Jane Marcet, écrit comme une discussion et prenant ses exemples dans la vie quotidienne, ou *Chemical recreations* de John Griffin, publiées au milieu du XIX^e siècle, contribuèrent à la popularité de la chimie. Le chimiste britannique y consignait des descriptions de l'encre sympathique de Hellot et quelques histoires associées. Sa compagnie, J. J. Griffin and Sons, se mit à fabriquer et à vendre onze sortes de cabinets de chimie, dominant le marché pour quelque cinquante ans, jusqu'au déclenchement de la Première Guerre mondiale.

Cette popularité de la chimie coïncida avec un engouement, au milieu du XIX^e siècle, pour les spectacles de magie dans les salons privés. Les chimistes encourageaient les prestidigitateurs à intégrer à leurs tours des expériences de chimie, souvent impliquant un composant devenant invisible. Les cabinets de chimie fournissaient la matière première de ces activités. Des manuels enseignaient aussi aux magiciens amateurs des illusions optiques, mécaniques ou magnétiques.

Au début du XX^e siècle, nombre de magiciens étaient devenus des prestidigitateurs scientifiques. Le «professeur» Ellis Stanyon offrait des cours de «Feu et magie chimique» à son «École de magie» de Londres. Ces cours mettaient l'accent sur la magie scientifique et ne faisaient pas appel à la sorcellerie. Le monde est maintenant bâti sur des «principes physiques», non sur des «arts noirs», écrivait le magicien américain Harry Blackstone en 1959 dans une réédition du manuel *Chemical Magic* (1930), du chimiste et magicien amateur John Lipsey. «La magie reste avec nous – pas la magie noire, mais la magie qui amuse [...], la magie qui, sous son meilleur jour, fascine.» Et dans cette métamorphose, l'encre invisible a joué un rôle particulier. S'éloignant de ses liens précoces avec l'alchimie, elle s'est transformée au fil des siècles en un outil de choix pour démontrer le pouvoir de la chimie et présenter sa valeur divertissante à un vaste public.

Après les deux guerres mondiales, l'encre invisible acquit une autre identité tout aussi populaire : elle devint synonyme d'intrigue internationale et d'espionnage. Durant la seconde moitié du XX^e siècle, les livres et jeux pour enfants se mirent à évoquer des agents secrets usant d'encre invisible et de stylos ultraviolets, et le citron devint le complice des petits espions en herbe. Ainsi l'encre invisible a-t-elle traversé l'histoire et les modes. Elle est certes devenue un jeu d'enfant. Mais pour nombre de jeunes curieux, elle constitue une passerelle pour découvrir la magie de la chimie et ouvrir leur imagination scientifique – voire celle de leurs parents. L'histoire des messages invisibles n'est d'ailleurs pas terminée. En 2011, Manuel Palacios et David Walt, de l'université Tufts, George Whitesides, de l'université Harvard, et leurs collègues ont développé une matrice constituée de colonies de microorganismes qui délivrent des messages sur demande en changeant de couleur...



LES CABINETS DE CHIMIE destinés aux chimistes amateurs ont fleuri à la fin du XVIII^e siècle et au XIX^e. Certains avaient la taille d'un bureau. D'autres étaient plus petits, tel le modèle pour étudiant ci-dessus, conçu par le Britannique William Statham au XIX^e siècle.

■ BIBLIOGRAPHIE

K. Macrakis, *Prisoners, Lovers, and Spies: The Story of Invisible Ink from Herodotus to al-Qaeda*, Yale University Press, 2014

S. Al-Gailani, *Magic, science, and masculinity: marketing toy chemistry sets*, *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 40, pp. 372-381, 2009.

J. Hellot, *Sur une nouvelle encre sympathique*, *Histoire de l'Académie royale des sciences*, pp. 101-120 et pp. 228-247, 1737, en ligne sur gallica.bnf.fr.

■ À VOIR

Le secret de l'État. Surveiller, protéger, informer. XVII^e-XX^e siècle, exposition des Archives nationales, à l'Hôtel de Soubise, à Paris, jusqu'au 28 février 2016.



Un volet est consacré à l'histoire des techniques et des langages du secret. <http://bit.ly/1VaZnCP>.

LOGIQUE & CALCUL

Paver avec des tatamis

Les tapis japonais ont des proportions bien définies. De combien de façons peuvent-ils recouvrir une pièce rectangulaire ? Grâce à une contrainte géométrique traditionnelle, la question devient intéressante.

Jean-Paul DELAHAYE

Au Japon, on recouvre traditionnellement le sol des habitations de tapis de paille de riz soigneusement serrés : les tatamis. Ils sont le plus souvent de dimension 91×182 cm ou 88×176 cm (à Tokyo). Dans toutes les régions, ils forment des rectangles aux proportions 1×2 , auxquels on ajoute parfois des tatamis carrés 1×1 . Le tatami est utilisé comme unité d'aire ; sa largeur détermine souvent la taille des pièces d'une maison ainsi que celles des portes et des fenêtres. Lorsqu'on dispose les tatamis, on s'arrange pour qu'en aucun point ne se rencontrent quatre tatamis (voir l'encadré page ci-contre). La raison – esthétique ou pratique ? – n'est pas bien claire, mais cette tradition semble respectée partout au Japon.

La contrainte « Jamais quatre tatamis en un même point » intéresse les mathématiciens. Elle a suscité, depuis une dizaine d'années, d'étonnantes recherches, dont celles d'Alexandro Erickson, qui a soutenu en 2013 une thèse sur le sujet à l'université de Victoria, au Canada. Il se trouve en effet que la règle imposée limite fortement les combinaisons possibles, sans toutefois imposer un nombre trop restreint de dispositions dont on trouverait facilement une caractérisation. Le mathématicien aime ce genre de situations !

Dans un premier temps, nous n'enviagerons que les pavages sans carrés. Par définition, le pavage d'une forme géométrique par des rectangles 1×2 respectant

la contrainte des tatamis sera un « pavage tatami-parfait ». Lorsque l'utilisation de tatamis 1×1 sera autorisée, nous parlerons de « pavages à tatamis ».

Pavages tatami-parfaits

L'encadré ci-contre donne un décompte du nombre de pavages tatami-parfaits pour les rectangles les plus petits et fournit pour certains rectangles les listes de pavages différents. On remarquera que même lorsque l'aire d'un rectangle est paire, il peut n'exister aucun pavage tatami-parfait. Le plus petit rectangle pour lequel cette situation d'impossibilité se produit est le rectangle 7×10 .

Ce tableau provient d'un travail de Dean Hickerson réalisé en 2002 et complété par Frank Ruskey et Jennifer Woodcock en 2009. Les chercheurs sont parvenus au résultat suivant. Notons $T(m, n)$ le nombre de pavages tatami-parfaits du rectangle $m \times n$ correspondant au tableau ; quatre cas sont à distinguer.

(a) $T(1, n)$ vaut 1 si n est pair, et 0 si n est impair (ce qui est évident).

(b) $T(2, n)$ est égal au nombre de façons d'écrire l'entier n comme une somme de 1 et de 2 sans qu'il y ait deux 2 consécutifs. Exemple : l'entier 5 s'écrit $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 2$, il y a donc 6 pavages tatami-parfaits pour le rectangle 2×5 .

(c) Si m est impair et supérieur à 1, $T(m, n)$ est le double du nombre de façons

d'écrire n comme une somme de $m - 1$ et de $m + 1$. Ainsi, $T(5, 10) = 4$, car $10 = 4 + 6 = 6 + 4$. Le fait qu'il n'existe pas de pavages tatami-parfaits pour 7×10 se comprend maintenant aisément : 10 ne peut pas s'écrire comme somme de nombres égaux à 6 ou à 8.

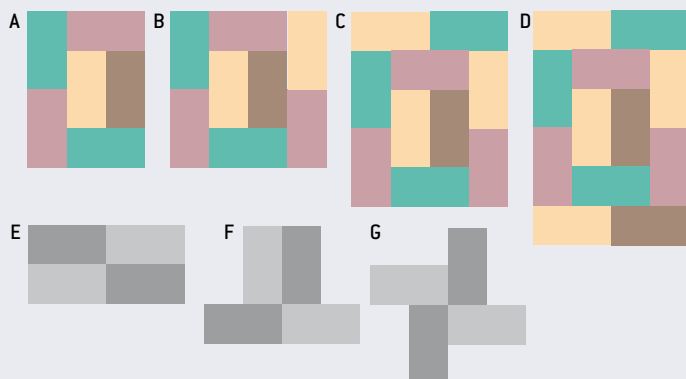
(d) Si m est pair et supérieur à 2, $T(m, n)$ est le nombre de façons d'écrire n comme somme de nombres pris parmi 1, $m - 2$ et m en s'arrangeant pour qu'un terme sur deux soit un 1. Par exemple, $T(6, 12) = 4$ car $12 = 1 + 4 + 1 + 6 = 1 + 6 + 1 + 4 = 4 + 1 + 6 + 1 = 6 + 1 + 4 + 1$.

L'encadré page 80 décrit la structure générale des pavages tatami-parfaits de rectangles et illustre pourquoi le nombre de solutions au problème du pavage est lié aux dénombrements arithmétiques indiqués ci-dessus.

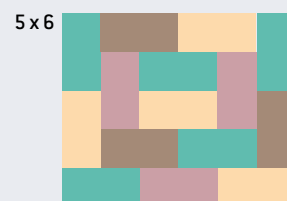
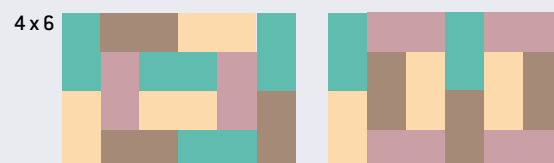
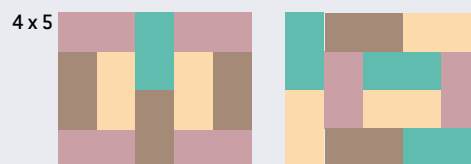
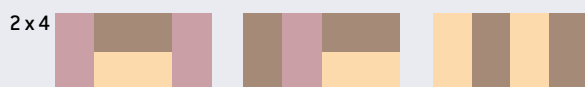
Ces conclusions sont fondées sur des résultats intermédiaires soigneusement démontrés. Toutefois, en manipulant des dominos à la recherche de solutions et en s'aidant de l'encadré page 80, on se persuade de l'exactitude des résultats mentionnés sans qu'il faille lire la dizaine de pages de la démonstration complète. Parmi les résultats généraux intéressants sur les pavages tatami-parfaits, il y a celui indiquant que connaître la disposition des tatamis sur le pourtour du rectangle qu'on cherche à paver détermine entièrement le pavage intérieur s'il est possible.

Dans le domaine de la combinatoire, il est souvent impossible de donner une expression simple (comme $2n$, $n(n+1)(n+2)/3$, ou $5n+n!$) pour les suites rencontrées. Cependant,

Pavages tatami-parfaits avec des dominos



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277	406
3	0	3	0	4	0	6	0	10	0	16	0	26	0	42	0	68
4	1	4	4	2	3	3	3	5	5	6	8	8	11	13	14	19
5	0	6	0	3	0	2	0	2	0	4	0	4	0	6	0	8
6	1	9	6	3	2	2	2	1	1	2	3	4	3	3	3	4
7	0	13	0	3	0	2	0	2	0	0	0	2	0	4	0	2
8	1	19	10	5	2	1	2	2	2	1	0	0	1	2	3	4
9	0	28	0	5	0	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	2
10	1	41	16	6	4	2	0	1	2	2	2	1	0	0	0	0
11	0	60	0	8	0	3	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0
12	1	88	26	8	4	4	2	0	0	1	2	2	2	1	0	0
13	0	129	0	11	0	3	0	1	0	0	0	2	0	2	0	0
14	1	189	42	13	6	3	4	2	0	0	0	1	2	2	2	1
15	0	277	0	14	0	3	0	3	0	0	0	0	0	2	0	2
16	1	406	68	19	8	4	2	4	2	0	0	0	0	1	2	2



Recouvrir un rectangle $m \times n$ par des dominos 1×2 sans que quatre dominos ne se rencontrent en un point, telle est la contrainte des tatamis parfaits. Ce problème de géométrie combinatoire intéresse les mathématiciens depuis quelques années.

Pour un rectangle $m \times n$, quand la contrainte est acceptée, la configuration obtenue est un «pavage tatami-parfait»: les configurations A, B, C, D sont permises, les configurations E, F, G sont interdites. De tels pavages ne sont pas toujours possibles.

Quand m et n sont tous les deux impairs, leur produit est impair; il n'existe alors pas de pavages tatami-parfaits du rectangle $m \times n$, l'aire d'un domino étant paire. Cependant, ce n'est pas le seul cas d'impossibilité: par exemple, les rectangles 10×7 , 8×11 ou

14×10 n'admettent aucun pavage tatami-parfait.

Le tableau en haut à droite donne le nombre de solutions en fonction de m et n , où l'on compte toutes les solutions, dont celles qui se déduisent d'autres par symétrie ou rotation. Ce tableau est l'une des conséquences de résultats démontrés par Dean Hickerson en 2002.

Avec le tableau vous disposez d'une belle série de puzzles amusants. Après avoir découpé suffisamment de rectangles 1×2

ou réuni quelques jeux de dominos, choisissez une valeur du tableau, par exemple celle indiquant qu'il existe six pavages tatami-parfaits pour le rectangle 2×6 , et recherchez-les tous.

Les dessins du bas montrent des solutions pour les plus simples des puzzles: 2×2 , 2×4 , 3×4 , 4×4 , 4×5 , 4×6 et 5×6 (nous n'avons pas représenté les solutions qui se déduisent d'autres par symétrie ou rotation).

Dénombrement des pavages tatami-parfaits

Par pavage, nous entendrons ici pavage tatami-parfait.

Hauteur 1. Il n'existe de pavages tatami-parfaits pour le rectangle $1 \times m$ que si m est pair, et un seul pour chaque m .

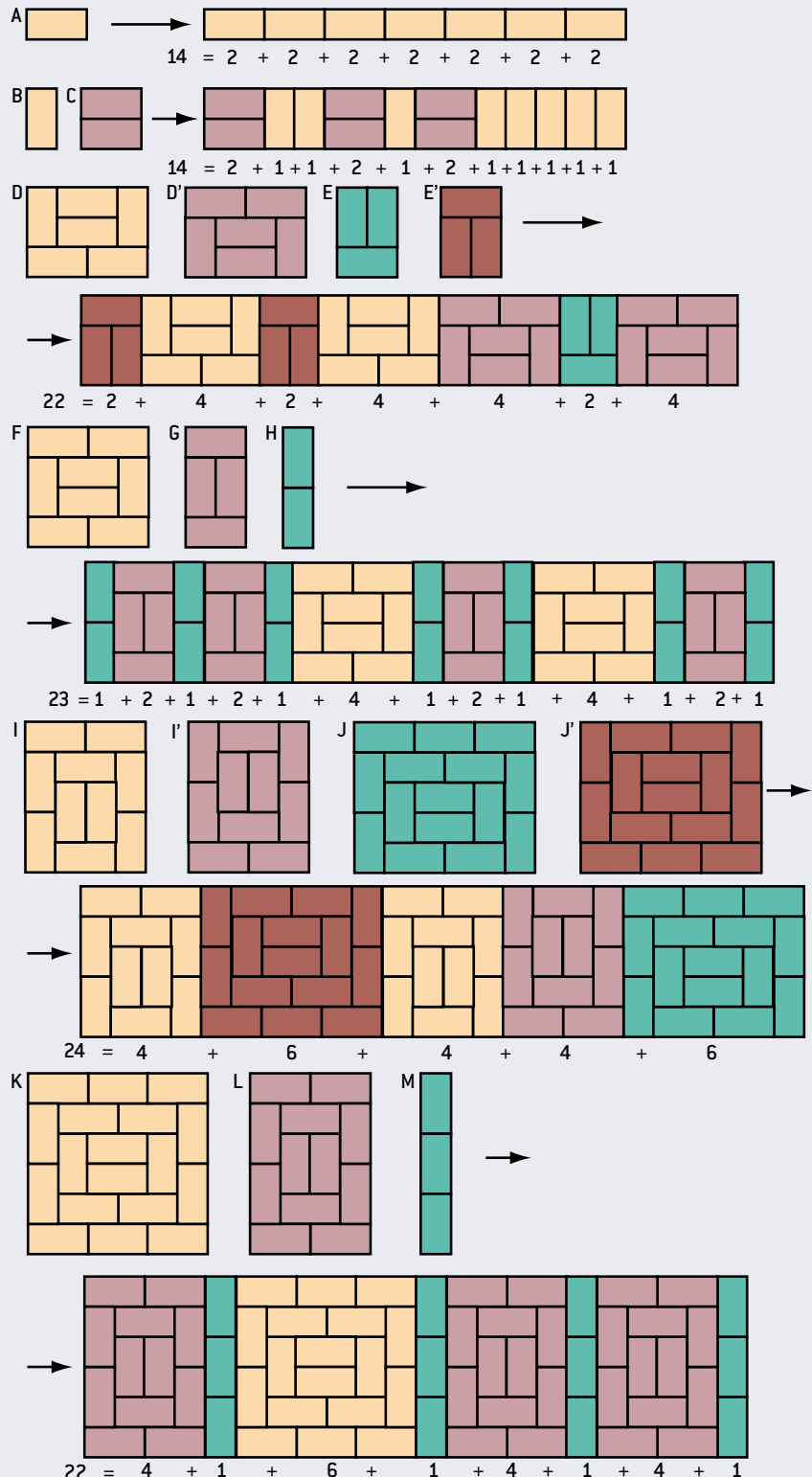
Hauteur 2. Il existe deux composants de base, B et C. Tous les pavages du rectangle $2 \times m$ s'obtiennent en accolant des copies de ces deux composants sans jamais mettre deux C côte à côte. Par exemple, le rectangle 2×14 est obtenu par l'accolement C, B, B, C, B, C, B, B, B, B, B. Ainsi, le nombre de façons de paver le rectangle $2 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de nombres 1 et 2 sans deux 2 consécutifs.

Hauteur 3. On a quatre composants de base: D, D', E et E'. Deux lettres nues (D, E) ne peuvent être côte à côte, et *idem* pour deux lettres primées (D', E'). Les juxtapositions de lettres prises parmi D, D', E, E' respectant cette règle donnent un pavage tatami-parfait. Par exemple, pour le rectangle 3×22 , la juxtaposition E'D'E'D'D'E'D' est satisfaisante. Le nombre de façons de paver le rectangle $3 \times m$ est égal au double (car on peut commencer par une lettre nue ou primée) du nombre de façons d'écrire m comme somme composée de 2 et de 4.

Hauteur 4. Il y a maintenant trois composants de base: F, G et H. Une juxtaposition sera bonne si un composant sur deux est H (F et G ne peuvent être côte à côte). Ainsi, pour le rectangle 4×23 , la juxtaposition HGHGHFHGHFHGH convient. Le nombre de façons de paver le rectangle $4 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de 1, de 2 et de 4 en mettant un 1 une fois sur deux dans la somme.

Hauteur 5. Analogue au cas « Hauteur 3 », de même que pour toute hauteur impaire $n = 2k + 1$. Il y a quatre composants de base, I, I', J et J', donnant des pavages pour les rectangles $n \times (n - 1)$ et $n \times (n + 1)$.

Hauteur 6. Analogue au cas « Hauteur 4 », de même que pour toute hauteur paire. Il y a trois composants de base, K, L et M, de taille $n \times (n - 2)$, $n \times n$ et $n \times 1$, et il faut alterner le M avec l'un des deux autres.



on réussit parfois à résumer toute l'information d'une suite compliquée de terme général a_n avec ce que l'on dénomme sa « fonction génératrice » $f(z)$, définie par :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Cette expression est une façon d'obtenir une formule très courte donnant la suite. En voici un exemple. Le nombre de façons de composer un mot de n lettres avec des x et des y est $a_n = 2^n$: il y a deux choix pour la première lettre, deux choix pour la seconde, etc. Soit f la fonction associée à cette suite a_n par la formule donnée ci-dessus. Comme chaque terme est égal à $2^n z^n$, on reconnaît une suite géométrique de raison $2z$; on a donc $f(z) = 1/(1 - 2z)$, cette égalité valant pour tout nombre z réel ou complexe vérifiant $|z| < 1/2$. La fonction $f(z) = 1/(1 - 2z)$ exprime ainsi indirectement les valeurs de $a_n = 2^n$: c'est la fonction génératrice de la suite 2^n .

Fonctions génératrices

La fonction génératrice de la suite donnée en exemple n'est guère plus simple que la suite elle-même et n'est pas très utile, mais, assez fréquemment, on ne dispose pas de formule élémentaire pour la suite alors que sa fonction génératrice est d'expression simple. C'est le cas pour le décompte du nombre de pavages tatami-parfaits. Le nombre de ces pavages pour les rectangles de hauteur 2 est le nombre $b_n = T(2, n)$ dont la construction ne correspond pas à une expression facile. En revanche, la fonction génératrice de la suite b_n est assez simple : $f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3)$. C'est aussi le cas de la fonction génératrice de la suite donnant le nombre de pavages tatami-parfaits de hauteur m . Frank Ruskey et Jennifer Woodcock ont ainsi établi en 2009 que :

$$f(z) = 1 \text{ si } m = 0,$$

$$f(z) = 1/(1 - z^2) \text{ si } m = 1,$$

$$f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3) \text{ si } m = 2,$$

$$f(z) = (1 + z^{m-1} + z^{m+1})/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est impair et pour $n \geq m \geq 3$, et

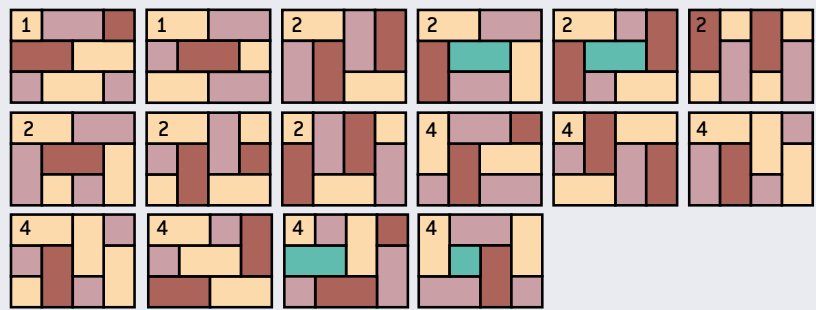
$$f(z) = (1 + z)(1 + z^{m-2} + z^m)/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est pair et pour $n \geq m \geq 4$.

$T(m, n)$ est alors donné par le coefficient de z^n dans le développement de $f(z)$ en une somme de puissances de z . Ces formules sont au

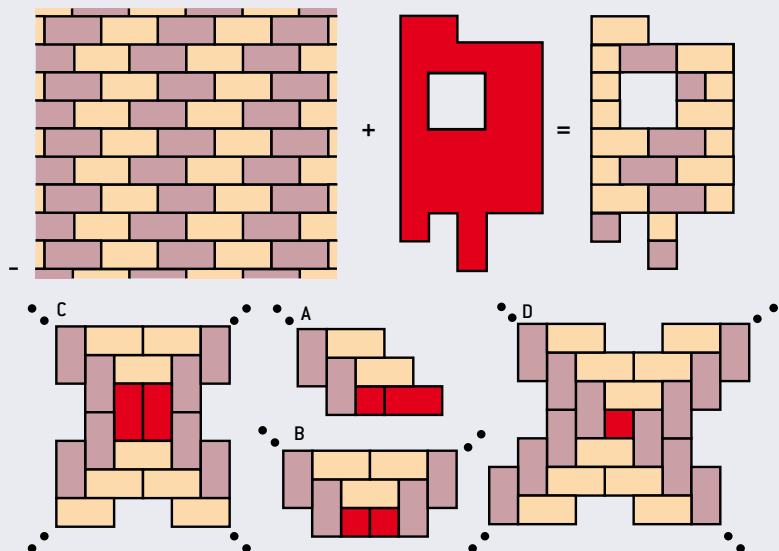
Pavages avec des dominos et des carrés

Si, en plus des tatamis 1×2 , on autorise l'utilisation de tatamis carrés 1×1 (en imposant toujours la contrainte que quatre tapis ne doivent jamais se rencontrer en un même point), le nombre de façons de paver un rectangle augmente. Pour le rectangle 3×4 , il existe 44 pavages à tatamis possibles, qui se groupent en 16 classes représentées ci-dessous, le nombre de pavages d'une même classe (pavages se déduisant par symétrie ou rotation) étant indiqué en haut à gauche du représentant de chaque classe.



Les quatre noyaux et les contraintes induites

Tout rectangle à coordonnées entières se pave d'une façon au moins par des tatamis 1×2 et 1×1 sans que quatre tatamis se rencontrent en un même point. C'est évident en considérant les pavages « mur de briques » ; la méthode du mur de briques s'étend même à des figures non rectangulaires, comme indiqué ci-dessous. Il existe quatre « noyaux » A, B, C, D présents dans un pavage de rectangles par des tatamis 2×1 et 1×1 . Chacun d'eux engendre des contraintes sur les tatamis voisins qui se prolongent jusqu'aux côtés du rectangle.



Le pourtour détermine l'intérieur

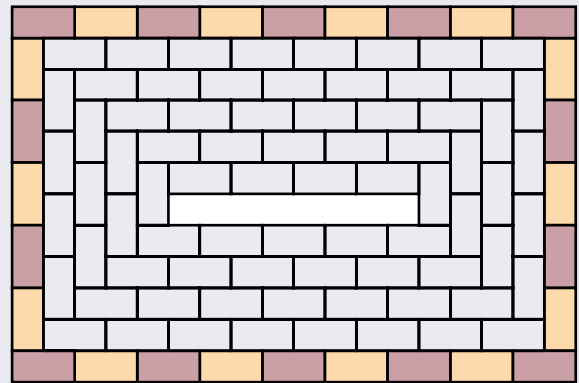
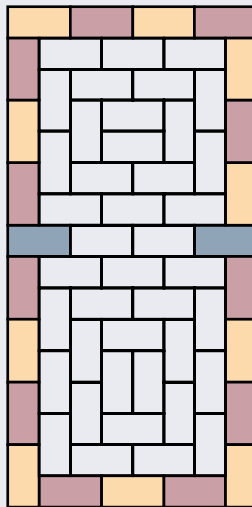
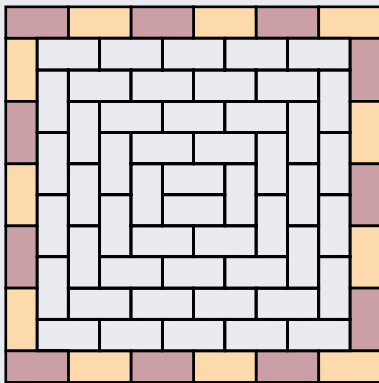
Un théorème de la théorie des pavages tatami-parfaits indique que la connaissance du pavage sur le pourtour d'un rectangle est suffisante pour retrouver toute la

disposition intérieure des tatamis, si elle est possible. Ci-dessous, les pourtours de trois rectangles sont représentés en couleurs. Deux d'entre eux se complètent et donnent

un pavage tatami-parfait du rectangle, alors que le troisième, à droite, conduit à une impossibilité. On s'en rend compte en plaçant une couronne intérieure (obligatoire pour respecter la

contrainte), puis une autre, puis une troisième, puis une quatrième.

On se retrouve alors dans une configuration finale où il est impossible de poursuivre.



centre d'une anecdote mettant en scène Donald Knuth, le célèbre auteur de *The Art of Computer Programming*, traité de référence de l'algorithmique. Dans son ouvrage, Donald Knuth propose en exercice d'écrire un programme pour calculer les nombres $T(m, n)$ (il s'est intéressé avant tout le monde aux dispositions japonaises de tapis).

Avec la solution, il énonce une conjecture sur ces nombres et en propose une fonction génératrice. L'expression conjecturée n'est cependant pas correcte et comme Donald Knuth avait promis un dollar à toute personne qui lui indiquerait une erreur dans son traité, il dut signer un chèque de un dollar aux auteurs des formules ci-dessus, chèque qu'ils ont soigneusement photocopié et qu'ils exhibent fièrement à chaque fois qu'ils présentent un exposé sur les pavages tatami-parfaits.

Puisque les Japonais utilisent parfois des tatamis carrés, le problème général des

pavages par tatamis doit les prendre en compte (toujours avec la contrainte « Jamais quatre tatamis en un même point »).

Avec des tatamis carrés

On s'aperçoit vite que l'on ne peut utiliser qu'un nombre assez limité de tatamis carrés, et que trouver, compter et caractériser tous les pavages à tatamis n'est pas une tâche évidente, même en ne s'intéressant qu'aux pavages de rectangles. L'encadré page 81, en haut, indique les 16 classes donnant (par symétrie et rotation) les 44 solutions pour le rectangle 3×4 .

Cette fois, tous les rectangles admettent au moins un pavage, car la forme « mur de briques » convient parfaitement (voir l'encadré page 81, en bas). Quand on considère d'autres pavages à tatamis de rectangles, on remarque qu'il existe quatre dispositions de

base; nous les dénommerons « noyaux », qui engendrent de proche en proche des contraintes sur les autres tatamis jusqu'au bord du rectangle qu'on cherche à recouvrir. Ces noyaux ont été nommés « hamburger » (deux rectangles 1×2 collés par un grand côté), « cyclone » (un carré entouré de quatre rectangles 1×2), le V (deux carrés côte à côte), le I (un rectangle 1×2 collé sur un petit côté avec un carré). On montre sans mal que le V et le I sont nécessairement placés sur les bords du rectangle qu'on cherche à paver. Le hamburger peut être partout, horizontalement ou verticalement. Le cyclone admet deux variantes, selon le sens dans lequel il tourne, et peut se retrouver partout lui aussi. Tout pavage à tatamis d'un rectangle n'est en définitive que le résultat obligé de quelques noyaux qui contraignent les autres tatamis, ces contraintes s'étendant sur toute la surface du rectangle recouvert.

On notera et on démontrera sans mal que, à part le carré au centre d'un cyclone, un tatami carré isolé ne peut être présent que sur un bord du rectangle pavé.

Toutefois, placer au hasard des noyaux dans un rectangle ne conduit pas toujours à un pavage à tatamis correct. En effet, chaque noyau engendre des diagonales contraintes qui, si elles se rencontrent, doivent être compatibles, ce qui est lié à la parité de leur écartement. Alejandro Erickson et les autres chercheurs déjà mentionnés ont tiré de toutes ces remarques une caractérisation précise des pavages à tatamis de rectangles. Elle est assez compliquée, mais permet de démontrer des résultats intéressants et précis. Notons $T(r, c, m)$ le nombre de pavages à tatamis d'un rectangle de hauteur r , de largeur c et comportant m tatamis carrés. Voici quelques propriétés aujourd'hui établies.

— Si $T(r, c, m)$ est strictement positif, alors m et le produit rc ont la même parité, et m est inférieur ou égal au maximum de $(r+1, c+1)$.

— Soient m et n deux entiers de même parité. Le nombre de pavages à tatamis du carré $n \times n$ comportant exactement m tatamis carrés est nul si $m > n$, égal à n^{2n} si $m = n$, et égal à $m^{2m} + (m+1)^{2m+1}$ si $m < n$.

— Les décomptes sont maintenant beaucoup plus compliqués, mais pour une hauteur donnée, il a été démontré que la fonction génératrice de la suite est un quotient de polynômes dont on sait calculer les coefficients.

Comme pour les pavages tatami-parfaits, si un rectangle possède un pavage de tatamis, alors il semble que la connaissance de ce pavage sur le pourtour du pavage le détermine complètement. Cependant, cette propriété n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Aujourd'hui, résoudre les problèmes par *oui* ou *non*, mener des décomptes et obtenir des formules ou des séries génératrices n'est plus la seule préoccupation des mathématiciens : ils veulent aussi des algorithmes ou au moins savoir quels types d'algorithmes sont possibles ou impossibles.

Quand on se donne une forme quelconque composée de carrés collés par leurs côtés (ces formes sont dénommées « polygones orthogonaux ») et que l'on s'intéresse à leurs pavages par tatamis, la question naturelle

qui se pose est : est-il possible ou non de trouver par algorithme un pavage à tatamis ou un pavage tatami-parfait ? Dans le cas des rectangles, les résultats expliqués précédemment montrent que la réponse est calculable par algorithme et qu'on peut le faire rapidement (on peut répondre *oui* ou *non* en un temps majoré par un polynôme en k , où k est l'aire du rectangle mesurée en nombre de tatamis 1×1).

Et les polygones orthogonaux ?

Dans le cas des pavages simples par dominos (donc sans la contrainte « Pas de rencontre de quatre dominos en un point »), on connaît des algorithmes indiquant en temps polynomial si la forme peut être pavée, et d'ailleurs on connaît de tels algorithmes non seulement pour les rectangles, mais aussi pour les polygones orthogonaux quelconques.

Un deuxième cas facile est celui de savoir si un polygone orthogonal admet un pavage à tatamis (avec des rectangles 1×2 et 1×1). La réponse est toujours *oui* : on prend le pavage en mur de briques de tout le plan, et on y découpe le polygone orthogonal ; certains tatamis 1×2 sont coupés et créent des tatamis 1×1 , mais tout ce qu'il y a à l'intérieur du polygone orthogonal découpé est bien un pavage à tatamis convenable.

Un cas restait difficile, celui des pavages tatami-parfaits (uniquement des tatamis 1×2 , et respect de la règle « Jamais quatre tatamis en un même point »). L'analyse de la question dans le cas général des polygones orthogonaux a été difficile, mais Alejandro Erickson et Frank Ruskey ont démontré en 2013 que le problème est NP-complet. Cela signifie que si la conjecture $P \neq NP$ est vraie (ce que l'on considère comme très probable), alors il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir rapidement (en un temps polynomial) si un polygone orthogonal quelconque admet un pavage tatami-parfait. Cette propriété exprime que trouver des pavages tatami-parfaits demande en général une longue et difficile recherche. Puisque c'est devenu un théorème, on peut donc affirmer : les problèmes de tatamis sont des casse-tête... chinois !

■ L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

■ BIBLIOGRAPHIE

A. Erickson et F. Ruskey, **Generating tatami coverings efficiently**, prépublication arXiv:1403.4776, 2014.

A. Erickson et F. Ruskey, **Dominotatami covering is NP-complete**, dans *Combinatorial Algorithms* (Lecture Notes in Computer Science n° 8288), Springer, pp. 140-149, 2013.

A. Erickson, **Monomino-domino tatami coverings**, thèse, université de Victoria, 2013.

A. Erickson et F. Ruskey, **Enumerating maximal tatami mat coverings of square grids with vertical dominoes**, prépublication arXiv:1304.0070, 2013.

Références supplémentaires sur www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Hulk et la grenouille, champions de la métamorphose

Certains personnages de fiction sont capables de changer radicalement et rapidement de forme. La nature n'est pas en reste dans ce domaine !

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ. Illustration : Marc BOULAY

De nombreux héros et autres monstres imaginaires présentent l'extraordinaire capacité de changer de forme rapidement, de leur plein gré (comme chez les Barbapapas) ou à leur insu (Bruce Banner devient Hulk sous l'effet de la colère). D'Ovide (*Métamorphoses*, achevé vers l'an 10 de notre ère) à Franz Kafka (*La Métamorphose*, 1915), en passant par Robert Louis Stevenson (*L'Étrange cas du docteur Jekyll et de M. Hyde*, 1886), la transformation morphologique a toujours fasciné les auteurs.

La métamorphose est souvent synonyme de malédiction pour celui qui la subit. Au cœur de l'intrigue, elle est en général spectaculaire et irréaliste. Mais de nombreuses espèces animales subissent aussi des transformations impressionnantes. Quels processus biologiques se cachent derrière ces « effets spéciaux » de la nature ?

Le dieu Protée de la mythologie grecque, les princes des contes de fées transformés en grenouilles, les loups-garous et les vampires du folklore médiéval... : nombreux sont les êtres imaginaires qui changent de forme. Qu'ils soient victimes d'un sortilège, d'une malédiction ou au contraire qu'ils bénéficient d'un superpouvoir, ces personnages sont des *métamorphes* (du grec *meta*, qui veut dire « au-delà », et *morphe*, « la forme »). En sciences naturelles, le terme renvoie à la *métamorphose*, un changement rapide et draconien de forme au cours du développement.



BRUCE BANNER, ALIAS HULK, a été victime d'un accident dans un laboratoire de recherche. Il lutte pour maîtriser ses émotions, qui menacent de le métamorphoser en un géant vert, violent et incontrôlable.

C'est le cas des grenouilles, des insectes et de nombreux autres animaux parmi les mollusques, crustacés, cnidaires (coraux, méduses), échinodermes ou encore tuniciers (sortes de « sacs » marins). Tous ces « métamorphes », bien réels, se caractérisent par un développement discontinu en plusieurs phases très différentes, par exemple la phase larvaire qui dure plus ou moins longtemps avant le passage au stade adulte.

La métamorphose est un phénomène physiologiquement activé par la sécrétion d'hormones de croissance qui varient selon les groupes (ecdysone chez les insectes, hormone thyroïdienne chez les amphibiens...). Cette décharge hormonale dans l'organisme entraîne une cascade de changements : de nouveaux organes (ailes, pattes) apparaissent grâce à une prolifération cellulaire, certains se transforment (tel l'intestin spiralé des têtards qui se déroule lors de la métamorphose) tandis que d'autres organes (telle la queue du têtard) disparaissent définitivement par lyse (désintégration de la membrane cellulaire) ou apoptose (mort cellulaire programmée). Cette révolution morphologique à l'échelle de l'organisme s'accompagne souvent d'un changement important de taille, de masse et d'habitat : ainsi, le petit têtard, aquatique et essentiellement herbivore, se métamorphose en grenouille, adulte amphibie et carnivore.

Moins spectaculaire et radical que la métamorphose, le polymorphisme relève aussi de cette capacité biologique à changer de forme (la « plasticité phénotypique »).