

on réussit parfois à résumer toute l'information d'une suite compliquée de terme général a_n avec ce que l'on dénomme sa « fonction génératrice » $f(z)$, définie par :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Cette expression est une façon d'obtenir une formule très courte donnant la suite. En voici un exemple. Le nombre de façons de composer un mot de n lettres avec des x et des y est $a_n = 2^n$: il y a deux choix pour la première lettre, deux choix pour la seconde, etc. Soit f la fonction associée à cette suite a_n par la formule donnée ci-dessus. Comme chaque terme est égal à $2^n z^n$, on reconnaît une suite géométrique de raison $2z$; on a donc $f(z) = 1/(1 - 2z)$, cette égalité valant pour tout nombre z réel ou complexe vérifiant $|z| < 1/2$. La fonction $f(z) = 1/(1 - 2z)$ exprime ainsi indirectement les valeurs de $a_n = 2^n$: c'est la fonction génératrice de la suite 2^n .

Fonctions génératrices

La fonction génératrice de la suite donnée en exemple n'est guère plus simple que la suite elle-même et n'est pas très utile, mais, assez fréquemment, on ne dispose pas de formule élémentaire pour la suite alors que sa fonction génératrice est d'expression simple. C'est le cas pour le décompte du nombre de pavages tatami-parfaits. Le nombre de ces pavages pour les rectangles de hauteur 2 est le nombre $b_n = T(2, n)$ dont la construction ne correspond pas à une expression facile. En revanche, la fonction génératrice de la suite b_n est assez simple : $f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3)$. C'est aussi le cas de la fonction génératrice de la suite donnant le nombre de pavages tatami-parfaits de hauteur m . Frank Ruskey et Jennifer Woodcock ont ainsi établi en 2009 que :

$$f(z) = 1 \text{ si } m = 0,$$

$$f(z) = 1/(1 - z^2) \text{ si } m = 1,$$

$$f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3) \text{ si } m = 2,$$

$$f(z) = (1 + z^{m-1} + z^{m+1})/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est impair et pour $n \geq m \geq 3$, et

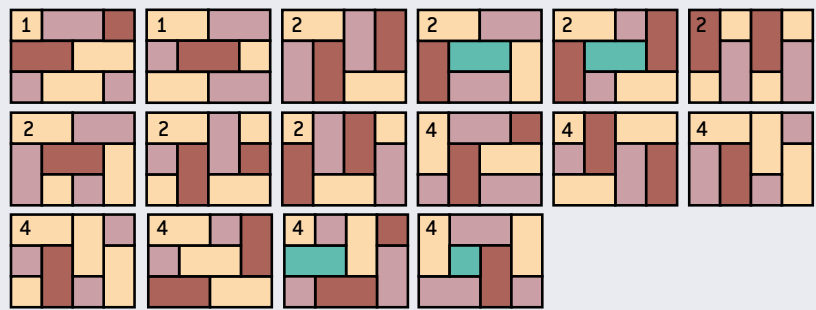
$$f(z) = (1 + z)(1 + z^{m-2} + z^m)/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est pair et pour $n \geq m \geq 4$.

$T(m, n)$ est alors donné par le coefficient de z^n dans le développement de $f(z)$ en une somme de puissances de z . Ces formules sont au

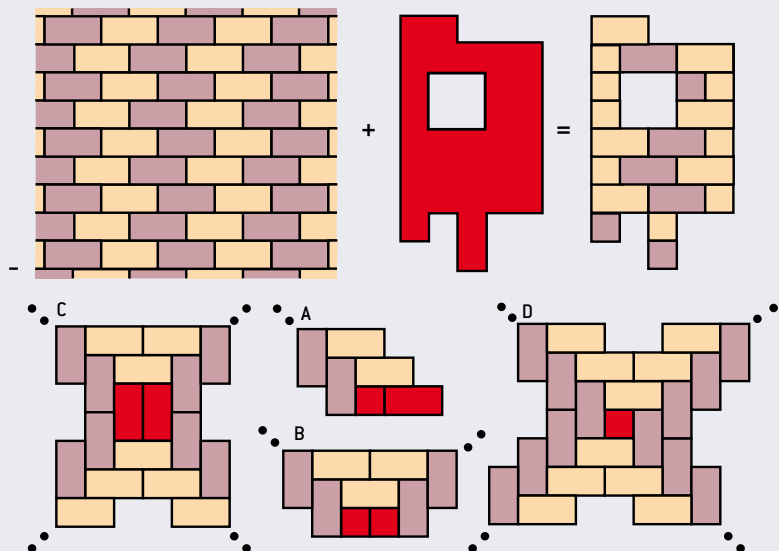
Pavages avec des dominos et des carrés

Si, en plus des tatamis 1×2 , on autorise l'utilisation de tatamis carrés 1×1 (en imposant toujours la contrainte que quatre tapis ne doivent jamais se rencontrer en un même point), le nombre de façons de paver un rectangle augmente. Pour le rectangle 3×4 , il existe 44 pavages à tatamis possibles, qui se groupent en 16 classes représentées ci-dessous, le nombre de pavages d'une même classe (pavages se déduisant par symétrie ou rotation) étant indiqué en haut à gauche du représentant de chaque classe.



Les quatre noyaux et les contraintes induites

Tout rectangle à coordonnées entières se pave d'une façon au moins par des tatamis 1×2 et 1×1 sans que quatre tatamis se rencontrent en un même point. C'est évident en considérant les pavages « mur de briques » ; la méthode du mur de briques s'étend même à des figures non rectangulaires, comme indiqué ci-dessous. Il existe quatre « noyaux » A, B, C, D présents dans un pavage de rectangles par des tatamis 2×1 et 1×1 . Chacun d'eux engendre des contraintes sur les tatamis voisins qui se prolongent jusqu'aux côtés du rectangle.



Le pourtour détermine l'intérieur

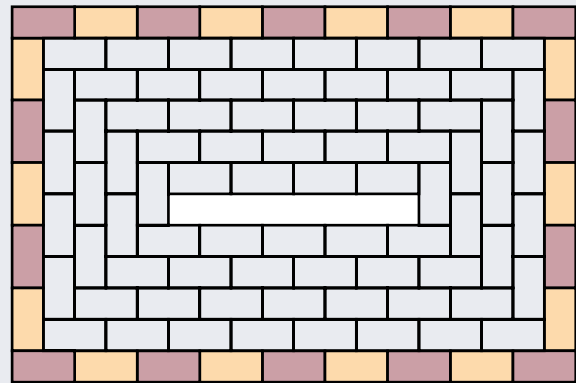
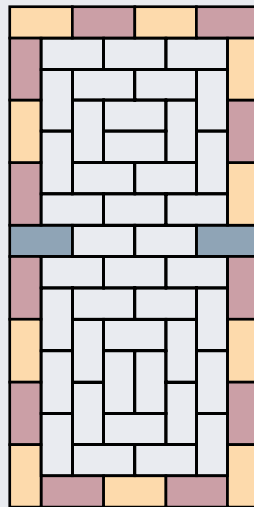
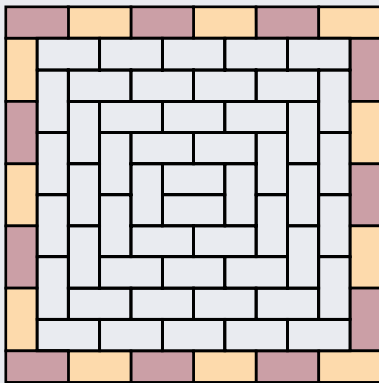
Un théorème de la théorie des pavages tatami-parfaits indique que la connaissance du pavage sur le pourtour d'un rectangle est suffisante pour retrouver toute la

disposition intérieure des tatamis, si elle est possible. Ci-dessous, les pourtours de trois rectangles sont représentés en couleurs. Deux d'entre eux se complètent et donnent

un pavage tatami-parfait du rectangle, alors que le troisième, à droite, conduit à une impossibilité. On s'en rend compte en plaçant une couronne intérieure (obligatoire pour respecter la

contrainte), puis une autre, puis une troisième, puis une quatrième.

On se retrouve alors dans une configuration finale où il est impossible de poursuivre.



centre d'une anecdote mettant en scène Donald Knuth, le célèbre auteur de *The Art of Computer Programming*, traité de référence de l'algorithmique. Dans son ouvrage, Donald Knuth propose en exercice d'écrire un programme pour calculer les nombres $T(m, n)$ (il s'est intéressé avant tout le monde aux dispositions japonaises de tapis).

Avec la solution, il énonce une conjecture sur ces nombres et en propose une fonction génératrice. L'expression conjecturée n'est cependant pas correcte et comme Donald Knuth avait promis un dollar à toute personne qui lui indiquerait une erreur dans son traité, il dut signer un chèque de un dollar aux auteurs des formules ci-dessus, chèque qu'ils ont soigneusement photocopié et qu'ils exhibent fièrement à chaque fois qu'ils présentent un exposé sur les pavages tatami-parfaits.

Puisque les Japonais utilisent parfois des tatamis carrés, le problème général des

pavages par tatamis doit les prendre en compte (toujours avec la contrainte « Jamais quatre tatamis en un même point »).

Avec des tatamis carrés

On s'aperçoit vite que l'on ne peut utiliser qu'un nombre assez limité de tatamis carrés, et que trouver, compter et caractériser tous les pavages à tatamis n'est pas une tâche évidente, même en ne s'intéressant qu'aux pavages de rectangles. L'encadré page 81, en haut, indique les 16 classes donnant (par symétrie et rotation) les 44 solutions pour le rectangle 3×4 .

Cette fois, tous les rectangles admettent au moins un pavage, car la forme « mur de briques » convient parfaitement (voir l'encadré page 81, en bas). Quand on considère d'autres pavages à tatamis de rectangles, on remarque qu'il existe quatre dispositions de

base; nous les dénommerons « noyaux », qui engendrent de proche en proche des contraintes sur les autres tatamis jusqu'au bord du rectangle qu'on cherche à recouvrir. Ces noyaux ont été nommés « hamburger » (deux rectangles 1×2 collés par un grand côté), « cyclone » (un carré entouré de quatre rectangles 1×2), le V (deux carrés côte à côte), le I (un rectangle 1×2 collé sur un petit côté avec un carré). On montre sans mal que le V et le I sont nécessairement placés sur les bords du rectangle qu'on cherche à paver. Le hamburger peut être partout, horizontalement ou verticalement. Le cyclone admet deux variantes, selon le sens dans lequel il tourne, et peut se retrouver partout lui aussi. Tout pavage à tatamis d'un rectangle n'est en définitive que le résultat obligé de quelques noyaux qui contraignent les autres tatamis, ces contraintes s'étendant sur toute la surface du rectangle recouvert.

On notera et on démontrera sans mal que, à part le carré au centre d'un cyclone, un tatami carré isolé ne peut être présent que sur un bord du rectangle pavé.

Toutefois, placer au hasard des noyaux dans un rectangle ne conduit pas toujours à un pavage à tatamis correct. En effet, chaque noyau engendre des diagonales contraintes qui, si elles se rencontrent, doivent être compatibles, ce qui est lié à la parité de leur écartement. Alejandro Erickson et les autres chercheurs déjà mentionnés ont tiré de toutes ces remarques une caractérisation précise des pavages à tatamis de rectangles. Elle est assez compliquée, mais permet de démontrer des résultats intéressants et précis. Notons $T(r, c, m)$ le nombre de pavages à tatamis d'un rectangle de hauteur r , de largeur c et comportant m tatamis carrés. Voici quelques propriétés aujourd'hui établies.

— Si $T(r, c, m)$ est strictement positif, alors m et le produit rc ont la même parité, et m est inférieur ou égal au maximum de $(r+1, c+1)$.

— Soient m et n deux entiers de même parité. Le nombre de pavages à tatamis du carré $n \times n$ comportant exactement m tatamis carrés est nul si $m > n$, égal à n^{2n} si $m = n$, et égal à $m^{2m} + (m+1)^{2m+1}$ si $m < n$.

— Les décomptes sont maintenant beaucoup plus compliqués, mais pour une hauteur donnée, il a été démontré que la fonction génératrice de la suite est un quotient de polynômes dont on sait calculer les coefficients.

Comme pour les pavages tatami-parfaits, si un rectangle possède un pavage de tatamis, alors il semble que la connaissance de ce pavage sur le pourtour du pavage le détermine complètement. Cependant, cette propriété n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Aujourd'hui, résoudre les problèmes par *oui* ou *non*, mener des décomptes et obtenir des formules ou des séries génératrices n'est plus la seule préoccupation des mathématiciens : ils veulent aussi des algorithmes ou au moins savoir quels types d'algorithmes sont possibles ou impossibles.

Quand on se donne une forme quelconque composée de carrés collés par leurs côtés (ces formes sont dénommées « polygones orthogonaux ») et que l'on s'intéresse à leurs pavages par tatamis, la question naturelle

qui se pose est : est-il possible ou non de trouver par algorithme un pavage à tatamis ou un pavage tatami-parfait ? Dans le cas des rectangles, les résultats expliqués précédemment montrent que la réponse est calculable par algorithme et qu'on peut le faire rapidement (on peut répondre *oui* ou *non* en un temps majoré par un polynôme en k , où k est l'aire du rectangle mesurée en nombre de tatamis 1×1).

Et les polygones orthogonaux ?

Dans le cas des pavages simples par dominos (donc sans la contrainte « Pas de rencontre de quatre dominos en un point »), on connaît des algorithmes indiquant en temps polynomial si la forme peut être pavée, et d'ailleurs on connaît de tels algorithmes non seulement pour les rectangles, mais aussi pour les polygones orthogonaux quelconques.

Un deuxième cas facile est celui de savoir si un polygone orthogonal admet un pavage à tatamis (avec des rectangles 1×2 et 1×1). La réponse est toujours *oui* : on prend le pavage en mur de briques de tout le plan, et on y découpe le polygone orthogonal ; certains tatamis 1×2 sont coupés et créent des tatamis 1×1 , mais tout ce qu'il y a à l'intérieur du polygone orthogonal découpé est bien un pavage à tatamis convenable.

Un cas restait difficile, celui des pavages tatami-parfaits (uniquement des tatamis 1×2 , et respect de la règle « Jamais quatre tatamis en un même point »). L'analyse de la question dans le cas général des polygones orthogonaux a été difficile, mais Alejandro Erickson et Frank Ruskey ont démontré en 2013 que le problème est NP-complet. Cela signifie que si la conjecture $P \neq NP$ est vraie (ce que l'on considère comme très probable), alors il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir rapidement (en un temps polynomial) si un polygone orthogonal quelconque admet un pavage tatami-parfait. Cette propriété exprime que trouver des pavages tatami-parfaits demande en général une longue et difficile recherche. Puisque c'est devenu un théorème, on peut donc affirmer : les problèmes de tatamis sont des casse-tête... chinois !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

A. Erickson et F. Ruskey, **Generating tatami coverings efficiently**, prépublication arXiv:1403.4776, 2014.

A. Erickson et F. Ruskey, **Dominotatami covering is NP-complete**, dans *Combinatorial Algorithms* (Lecture Notes in Computer Science n° 8288), Springer, pp. 140-149, 2013.

A. Erickson, **Monomino-domino tatami coverings**, thèse, université de Victoria, 2013.

A. Erickson et F. Ruskey, **Enumerating maximal tatami mat coverings of square grids with vertical dominoes**, prépublication arXiv:1304.0070, 2013.

Références supplémentaires sur www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Hulk et la grenouille, champions de la métamorphose

Certains personnages de fiction sont capables de changer radicalement et rapidement de forme. La nature n'est pas en reste dans ce domaine !

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ. Illustration : Marc BOULAY

De nombreux héros et autres monstres imaginaires présentent l'extraordinaire capacité de changer de forme rapidement, de leur plein gré (comme chez les Barbapapas) ou à leur insu (Bruce Banner devient Hulk sous l'effet de la colère). D'Ovide (*Métamorphoses*, achevé vers l'an 10 de notre ère) à Franz Kafka (*La Métamorphose*, 1915), en passant par Robert Louis Stevenson (*L'Étrange cas du docteur Jekyll et de M. Hyde*, 1886), la transformation morphologique a toujours fasciné les auteurs.

La métamorphose est souvent synonyme de malédiction pour celui qui la subit. Au cœur de l'intrigue, elle est en général spectaculaire et irréaliste. Mais de nombreuses espèces animales subissent aussi des transformations impressionnantes. Quels processus biologiques se cachent derrière ces « effets spéciaux » de la nature ?

Le dieu Protée de la mythologie grecque, les princes des contes de fées transformés en grenouilles, les loups-garous et les vampires du folklore médiéval... : nombreux sont les êtres imaginaires qui changent de forme. Qu'ils soient victimes d'un sortilège, d'une malédiction ou au contraire qu'ils bénéficient d'un superpouvoir, ces personnages sont des *métamorphes* (du grec *meta*, qui veut dire « au-delà », et *morphe*, « la forme »). En sciences naturelles, le terme renvoie à la *métamorphose*, un changement rapide et draconien de forme au cours du développement.



BRUCE BANNER, ALIAS HULK, a été victime d'un accident dans un laboratoire de recherche. Il lutte pour maîtriser ses émotions, qui menacent de le métamorphoser en un géant vert, violent et incontrôlable.

C'est le cas des grenouilles, des insectes et de nombreux autres animaux parmi les mollusques, crustacés, cnidaires (coraux, méduses), échinodermes ou encore tuniciers (sortes de « sacs » marins). Tous ces « métamorphes », bien réels, se caractérisent par un développement discontinu en plusieurs phases très différentes, par exemple la phase larvaire qui dure plus ou moins longtemps avant le passage au stade adulte.

La métamorphose est un phénomène physiologiquement activé par la sécrétion d'hormones de croissance qui varient selon les groupes (ecdysone chez les insectes, hormone thyroïdienne chez les amphibiens...). Cette décharge hormonale dans l'organisme entraîne une cascade de changements : de nouveaux organes (ailes, pattes) apparaissent grâce à une prolifération cellulaire, certains se transforment (tel l'intestin spiralé des têtards qui se déroule lors de la métamorphose) tandis que d'autres organes (telle la queue du têtard) disparaissent définitivement par lyse (désintégration de la membrane cellulaire) ou apoptose (mort cellulaire programmée). Cette révolution morphologique à l'échelle de l'organisme s'accompagne souvent d'un changement important de taille, de masse et d'habitat : ainsi, le petit têtard, aquatique et essentiellement herbivore, se métamorphose en grenouille, adulte amphibie et carnivore.

Moins spectaculaire et radical que la métamorphose, le polymorphisme relève aussi de cette capacité biologique à changer de forme (la « plasticité phénotypique »).