

de sécurité, tandis que les ITSEC vérifiaient leur pertinence et leur efficacité.

Bientôt émergea l'idée de critères universels acceptables des deux côtés de l'Atlantique et même au-delà. C'est ainsi que naquirent les « Critères Communs » bientôt transformés en norme ISO, à la rédaction desquels la France prit une part déterminante, la présidence du groupe de travail lui étant revenue.

De fait, alors que les États-Unis et le Royaume-Uni se concentraient sur la certification de différents systèmes d'exploitation et dispositifs de sécurité tels les pare-feu, la France trouva dans la carte à puce un champ d'application privilégié. Son expertise dans ce domaine l'amena même à exercer une sorte de monopole. À ce titre, des firmes prestigieuses coréennes, japonaises et même américaines telle Motorola en vinrent à lui confier les évaluations de leurs produits. Cette grande compétence était le fait d'une petite équipe de chercheurs de France Télécom répartie entre Grenoble et Caen. Une dizaine de personnes qui avaient su, en collaboration avec le SCSSI, développer les méthodes d'investigation à la fois sur le matériel et sur le logiciel et automatiser la recherche de failles. Cette équipe fut ensuite transférée au sein du Laboratoire des technologies de l'information (LETI) du CEA.

Ce travail sur la sécurisation des composants de cartes à puce impliquait un effort considérable de la part des industriels se lançant dans le processus et parfois des changements substantiels dans l'organisation de la chaîne de production à l'intérieur même des salles blanches, pour lesquelles les investissements avaient été considérables. C'est ainsi qu'en 1999 à Tours, lors de l'opération de lancement de Moneo, ce porte-monnaie électronique qui malheureusement n'a pas eu le succès escompté, un PDG de la société, en recevant officiellement son certificat de sécurité, déclara que ce certificat lui avait coûté 20 % de logiciel et de dépenses supplémentaires, un dépassement de 30 % des délais, et 50 % de sueur et de stress en plus pour les premiers composants. Mais il se félicitait du gain en rapidité de développement et de mise au point obtenu ensuite.

Longtemps, la carte à puce ainsi sécurisée fut réputée comme le moyen de paiement le plus sûr, avec une fraude affichée de 0,03 %. Ce taux ne militait pas pour un renforcement de la sécurité. Ainsi la taille des clés, pourtant jugée bien trop faible par

Sécurisation et législation

Un des problèmes rencontrés pour sécuriser la carte a été la législation française, car les moyens cryptologiques, classés dans la catégorie des armes de guerre, étaient soumis au régime défini par le décret de 1939. Ainsi, lors d'une réunion du Directoire de la cryptologie, vers 1985, le représentant du ministère de l'Industrie, en entrant à Matignon, s'excusa d'avoir pénétré dans ce lieu en portant une arme de deuxième catégorie : sa carte bancaire... Celle-ci contenait en effet un algorithme cryptographique qui interdisait sa possession. Un aménagement au décret fut donc adopté pour ne pas pénaliser cette technologie dont on commençait à percevoir le potentiel... Arme de guerre ou non ? La question refait surface alors que la carte est utilisée pour des moyens de télécommunication ou de diffusion tels que la télévision à péage ou la téléphonie mobile.

■ BIBLIOGRAPHIE

Carte à puce et cryptographie : je t'aime moi non plus, conférence de J.-L. Desvignes et J.-J. Quisquater au Musée des arts et métiers du Cnam, 2015 : <http://bit.ly/29mT1Lk>

S. Bouzeffrane et P. Paradinas, **Les Cartes à puce**, Hermès Science Publications, 2013.

C. Tavernier, **Les Cartes à puce. Théorie et mise en œuvre**, 2^e édition, Dunod, 2011.

W. Rankl et W. Effing, **Smart Card Handbook**, 4^e édition, Wiley, 2010.

M. Éluard et S. Lelievre, **YesCard, entre mythe et réalité ou un aperçu du système bancaire français**, MISC, hors-série n° 002, novembre 2008.

les experts, fut maintenue bien trop longtemps. Aussi, quand le GIE Carte bancaire fut confronté à l'affaire Humpich, un vent de panique souffla sur ce bel optimisme.

L'affaire Humpich

En 1997, Serge Humpich, ingénieur auto-didacte de la puce, réussit à casser la signature RSA, alors statique et stockée dans la carte, notamment à l'aide du processus décrit page 74. Il réalisa ensuite des cartes trompant les terminaux de la RATP (les yescards) qui n'exigeaient pas une identification forte, car traitant des transactions d'un faible montant. Il tenta de monnayer son savoir-faire, mais se fit interpellé dans le cadre de la loi Godfrain. Son procès en 2000 suscita quelque effroi, car lui et ses soutiens étaient en mesure de compromettre la clé RSA en la diffusant.

En fait, les fraudes d'origine technologique sont généralement restées d'assez bas niveau, l'essentiel des escroqueries étant à imputer à une incroyable naïveté des victimes et à l'habileté des escrocs en matière d'ingénierie sociale. Pourtant, une vraie vulnérabilité est apparue lorsque les cartes ont été dotées d'une capacité « sans contact ». Il s'est en effet avéré que cette technologie était piratable à courte distance et entraînait le risque d'exfiltration d'informations hautement sensibles. La Commission nationale de l'informatique et des libertés (CNIL) s'en est émue et impose désormais aux banques de désactiver cette fonctionnalité sur demande du porteur ou de lui fournir un étui « cage de Faraday » évitant la sollicitation électromagnétique non désirée.

Mais un risque bien plus inquiétant se profile. Avec ou sans contact, la carte à puce est un instrument de sécurité en elle-même. Or on entend beaucoup qu'elle pourrait disparaître en raison des offres nouvelles des géants de l'Internet et de la téléphonie. Que le téléphone utilise une puce SIM ayant de nouvelles capacités ou qu'il remplisse lui-même ces nouvelles fonctions, il n'y aurait alors plus de séparation entre l'outil de communication et le moyen d'identification et d'authentification – la puce. Une situation qui devrait faire le bonheur des pirates... et offrir aux géants du Web Google, Apple, Facebook et Amazon la mainmise sur un des rares domaines pas encore complètement sous la domination américaine. ■

LOGIQUE & CALCUL

Est-il vrai que $0,999... = 1$?

Les développements décimaux des nombres sont universellement utilisés. Cependant, certains nombres ont deux développements possibles. Il existe des approches qui tentent de l'éviter et de soutenir rigoureusement que $0,999... < 1$.

Jean-Paul DELAHAYE

Les notations aident à comprendre et soutiennent la pensée mathématique. De nombreux progrès sont dus à l'introduction de bons symboles et de règles précises qui en fixent la manipulation. Le système de numération décimal de position dû aux mathématiciens indiens des V^e, VI^e et VII^e siècles de notre ère permet à tous de représenter des nombres très grands ou très petits et de calculer avec. Ce fut une invention extraordinaire sans laquelle la science n'aurait sans doute pas pu se développer, ni le commerce ou l'industrie moderne.

Il existe cependant des cas où une notation engendre des confusions dont il est difficile de s'échapper. C'est le cas, du moins en première analyse, du problème qui nous intéresse ici. La question est : « Est-il vrai que $0,999... = 1$? » ou, au contraire, $0,999... < 1$? »

L'expression $0,999...$ se réfère bien évidemment à la notation décimale des nombres réels. Les points de suspension signifient ici que la suite de chiffres 9 se poursuit indéfiniment. Cela n'a de sens que moyennant l'idée que n'importe quelle suite de chiffres avec une virgule, par exemple 192,252525..., désigne un nombre bien défini. Nous allons revenir sur le sens précis que l'on attribue aujourd'hui à cette notation. Mais auparavant, sans faire de théorie, et en appliquant quelques règles élémentaires de calcul, énumérons plusieurs des démonstrations que les professeurs de mathématiques proposent aux

étudiants afin de les persuader que l'affirmation $0,999... = 1$ est vraie.

Démonstration 1. Personne ne doute que $1/3 = 0,333...$ Imaginons en effet que l'on pose la division de 1 par 3. On trouve 0 ; puis 0,3 ; puis 0,33 ; puis 0,333. On est alors convaincu que cela se poursuit indéfiniment et donc que $1/3 = 0,333...$

$$\begin{array}{r|l} 1 & \begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ 0 \quad 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ 0,3 \quad 10 \\ 0,33 \quad 10 \\ 0,333 \quad 10 \end{array} \end{array}$$

Partant de l'égalité $1/3 = 0,333...$, en multipliant de chaque côté du signe égal par 3, on arrive à $3 \times 1/3 = 3 \times 0,333...$ ce qui donne $1 = 0,999...$

De même, partant de $1/9 = 0,111...$ obtenu en posant la division, on arrive, en multipliant par 9 de chaque côté du signe égal, encore à $1 = 0,999...$

Plusieurs démonstrations

Démonstration 2. Posons $u = 0,999...$ Multiplions de chaque côté par 10 (on remarque que multiplier par 10 un nombre en écriture décimale revient à déplacer la virgule d'une case vers la droite) : $10u = 9,999...$

Soustrayons maintenant $u = 0,999...$ de chaque côté de l'égalité : $10u - u = 9$ (car bien sûr $9,999... - 0,999... = 9$). Cela donne $9u = 9$, donc $u = 1$. On a ainsi à nouveau prouvé que $1 = 0,999...$

Démonstration 3. Faisons l'hypothèse que $0,999... < 1$. Considérons la moyenne m

des deux nombres $0,999...$ et 1. C'est un nombre inférieur à 1 et supérieur à 0,9, car la moyenne de deux nombres se situe toujours entre les deux nombres considérés. L'écriture décimale de m commence donc par 0,9. Cette moyenne m est aussi supérieure à 0,99 et inférieure à 1 ; c'est donc un nombre dont l'écriture décimale commence par 0,99.

En poursuivant, on établit que le développement décimal de m est nécessairement $0,999...$ La moyenne m est donc égale au plus petit des deux nombres considérés. C'est absurde, car la moyenne entre deux nombres différents n'est égale à aucun d'eux. L'hypothèse de départ, $0,999... < 1$, est donc fautive. Comme il ne se peut pas que $0,999... > 1$, on a nécessairement $1 = 0,999...$

Il existe une autre fin possible pour ce raisonnement. On pose $u = 0,999...$ Nous avons établi que $m = (u + 1)/2 = u$, donc $u + 1 = 2u$, ce qui donne $u = 1$.

Toutefois, les enseignants de mathématiques le savent bien : même après l'exposé de telles démonstrations, si on interroge les étudiants en leur laissant vraiment la parole, ils exprimeront encore des doutes sur la validité de l'égalité. De nombreuses études réalisées en divers endroits du monde confirment que même après une ou plusieurs démonstrations en bonne et due forme, tout le monde n'est pas convaincu de l'égalité.

Des dizaines d'articles de didactique des mathématiques ont porté sur cette étrangeté. Il me semble qu'elle a une

L'abandon des infinitésimaux

Bien que l'on ait utilisé les infinitésimaux dès l'Antiquité, ce sont les travaux de Leibniz qui ont permis leur emploi généralisé et le développement du calcul infinitésimal aux XVII^e et XVIII^e siècles. Le grand mathématicien Leonhard Euler les manipulait avec expertise dans son ouvrage fondamental *Introductio in analysin infinitorum*.

Cependant, certaines difficultés à calculer rigoureusement avec les infinitésimaux ont conduit le mathématicien Michel Rolle et l'évêque George Berkeley (voir la bibliographie) à contester leur usage jugé trop incertain et finalement très délicat. Au XIX^e siècle, les travaux de Cauchy et de Weierstrass, entre autres, ont permis de les abandonner au profit d'une conception nouvelle qui se fonde sur la

définition suivante de limite d'une suite numérique et sur des définitions du même type pour la continuité des fonctions.

Par définition, la suite numérique (x_n) converge vers la limite L si pour tout ϵ (epsilon) donné strictement positif (par exemple de la forme $1/m$), il existe un entier k , tel que pour tout entier $n > k$, on a $|x_n - L| < \epsilon$.

Moyennant ces définitions et l'utilisation de la théorie des

ensembles, due à Cantor, pour construire les nombres réels à partir des entiers, on tire une conception de ces nombres universellement adoptée aujourd'hui. C'est le « continu ensembliste ». Il permet de résoudre la question de la comparaison entre 1 et $0,999\dots$: $0,999\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} 0,99\dots 9$ (n fois le 9) $= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/10^n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 1/10^n = 1$.

L'idée d'infinitésimal n'a jamais été totalement abandonnée, y compris par Cauchy qui l'utilise pour formuler la notion de continuité avant d'en venir à la définition avec des ϵ . Le mathématicien Mikhail Katz (voir la bibliographie) dénonce la réécriture simplifiée de l'histoire

des mathématiques qui oublie le rôle constant des infinitésimaux dont l'utilisation n'a jamais vraiment cessé d'être féconde.

Abraham Robinson, dans la décennie 1960-1970, en a proposé une version moderne conforme aux canons de la rigueur mathématique contemporaine. L'analyse aujourd'hui peut donc soit se passer des infinitésimaux (ce qu'on fait dans l'enseignement le plus souvent), soit les utiliser en se fondant sur la conception de Robinson, dont il existe d'ailleurs à présent plusieurs présentations, certaines suffisamment simples pour l'enseignement.



G. W. Leibniz (1646-1716)



M. Rolle (1652-1719)



G. Berkeley (1685-1753)



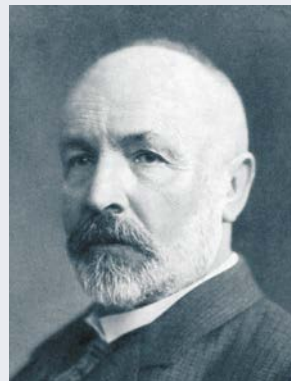
L. Euler (1707-1783)



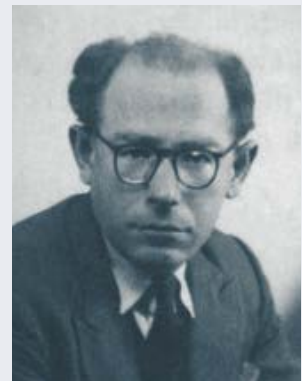
A. L. Cauchy (1789-1857)



K. Weierstrass (1815-1897)



G. Cantor (1845-1918)



A. Robinson (1918-1974)

explication simple. Les étudiants ne sont pas convaincus par les démonstrations du type de celles proposées plus haut parce que dans le monde des entiers et des nombres décimaux finis qu'ils manipulent depuis l'âge de 6 ou 8 ans, la règle suivante produit toujours un bon résultat.

Règle de comparaison. Pour comparer deux nombres positifs, on les place l'un sous l'autre en alignant les virgules, puis on regarde le premier chiffre différent rencontré en les parcourant simultanément de gauche à droite. Dès que deux chiffres différents sont rencontrés, on est certain que les deux nombres comparés sont différents et le plus petit des deux chiffres différents désigne le plus petit des deux nombres comparés.

Par exemple, si l'on doit comparer 0,28145 et 0,2813989, on écrit :

0,28145
0,2813989.

La règle indique que le premier nombre est le plus grand, car 4 est supérieur à 3. En appliquant la règle avec 1 (qu'on écrit aussi 1,000...) et 0,999..., on obtient que 1,000... est plus grand que 0,999..., car le premier chiffre du premier nombre est 1, et le premier chiffre du second est 0 :

1,000...
0,999...

D'après la règle de comparaison, pas de doute : $0,999... < 1$. La réponse d'un professeur à un étudiant récalcitrant qui lui exposerait cet argument sera, sous une forme ou une autre : « Ce qui est vrai avec les développements décimaux finis ne l'est pas nécessairement avec les développements décimaux infinis. La règle de comparaison des nombres entiers ou décimaux, valable s'ils sont finis, ne s'étend pas aux nombres réels écrits avec des développements décimaux infinis. » En langage simple : tout ne passe pas à l'infini.

L'autorité du professeur permet de clore le débat. Pourtant, l'étudiant récalcitrant pourrait à juste titre répliquer : « Mais ce passage à l'infini avec la règle de comparaison n'est pas moins légitime que ceux utilisés dans les démonstrations 1, 2 et 3 fondées aussi sur des extensions à l'infini des règles connues pour les développements décimaux finis. » Nous sommes alors revenus au point de départ. Qui a raison ? Le professeur avec ses trois démonstrations ou bien l'étudiant récalcitrant avec sa règle de comparaison qui contredit la thèse d'égalité du professeur ?

Pour prolonger le débat sans utiliser d'argument d'autorité, il faut revenir à la notion des développements décimaux illimités.

La conception admise universellement aujourd'hui se fonde sur l'idée de « suite

convergente ». Écrire un nombre r sous la forme $0,a_1a_2a_3...a_n...$ revient à dire que r est égal à

$a_1/10 + a_2/100 + a_3/1\,000 + ... + a_n/10^n + ...$, c'est-à-dire que r est la limite de la suite numérique : $a_1/10, a_1/10 + a_2/100, a_1/10 + a_2/100 + a_3/1\,000, ...$

Epsilon à la rescousse

Le nombre r est ainsi la limite d'une suite dont chaque élément a un développement décimal fini. Par exemple, 0,333... désigne la limite de la suite 0, 3/10, 33/100, 333/1 000, etc. Cette conception a été rendue entièrement précise grâce aux notions de limite élaborées par Bernard Bolzano, Augustin Louis Cauchy et Karl Weierstrass au début du XIX^e siècle. C'est ce qu'on nomme parfois la définition des limites à la ϵ (epsilon) et δ (delta). En complétant celle-ci par les méthodes de construction de l'ensemble des nombres réels à partir des entiers (au moyen des « suites de Cauchy » ou des « coupures de Dedekind »), les mathématiciens se sont accordés sur une idée parfaitement précise des nombres réels et de ce que désignent les développements décimaux illimités.

Ces fondements rigoureux élaborés au XIX^e siècle nous rassurent, ainsi que l'accord unanime qui règne à leur sujet. C'est cette conception qui a été enseignée, et elle est devenue naturelle à tous. Nous la dénommerons la « conception classique des nombres réels et du continu ». Que nous dit cette conception de la question « $1 = 0,999... ?$ » ? Sans surprise, elle confirme le camp des professeurs.

Démonstration 4. Le nombre $u = 0,999...$ est la limite, quand n tend vers l'infini, de la suite dont le terme général est : $x_n = 0,9 + 0,09 + ... + 0,0...09$ (avec n zéros entre la virgule et le dernier 9). Après factorisation : $x_n = 0,9 (1 + 1/10 + ... + 1/10^n)$.

Sachant que $0,9 = 1 - 1/10$, appliquons à ce résultat l'identité :

$(1 - a)(1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n) = 1 - a^{n+1}$, que l'on peut vérifier en développant. On en déduit $x_n = 1 - 1/10^{n+1}$. La suite 10^{n+1} tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc $1/10^{n+1}$ tend vers 0, et x_n tend vers 1, d'où $1 = 0,999...$

Dans les autres bases de numération

Dans toutes les bases de numération, on rencontre une difficulté analogue à celle créée par les développements décimaux se terminant par une infinité de 9. Dans la base 2, la conception classique des nombres réels conduit à l'égalité $1 = 0,111...$; dans la base 3, on a $1 = 0,222...$; etc.

Il faut noter cependant que la non-unicité des développements décimaux (ou binaires, etc.) ne concerne qu'une faible partie des nombres réels.

Les nombres ayant deux développements décimaux sont en effet ceux de la

forme $k/10^p$ où k et p sont des nombres entiers. Il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de nombres réels ayant deux développements décimaux différents. Comme l'infini des nombres réels est non dénombrable (autrement

dit, strictement plus grand que l'infini dénombrable), on peut dire que les nombres ayant deux développements décimaux différents sont en quantité négligeable par rapport aux autres nombres. L'unicité des développements décimaux est donc « presque toujours » vraie !

Remarquons aussi qu'il existe une façon d'avoir l'unicité des développements décimaux : il suffit d'interdire ceux se terminant par une infinité de 9.

Quelle théorie des infinitésimaux ?

Quand Leibniz invente le calcul infinitésimal en même temps que Newton, il utilise des infinitésimaux, c'est-à-dire des quantités plus petites que tout inverse de nombre entier. On les note parfois dx . Une propriété de ces nombres infiniment petits est que, même en en prenant beaucoup, on ne réussit jamais à atteindre la valeur 1 : $dx < 1$; $2dx < 1$; $3dx < 1$, etc. On dit que l'ensemble des nombres auxquels on ajoute les infinitésimaux est non archimédien.

La manipulation des infinitésimaux est délicate et conduit facilement à des incohérences que George Berkeley dénonça. S'en passer pour définir la continuité ou la notion de dérivée sera donc considéré comme un progrès au XIX^e siècle. Pourtant, en 1966, Abraham Robinson propose une théorie qui permet

de parler sans risque des nombres infiniment petits.

Depuis, d'autres méthodes ont été proposées pour manipuler des infinitésimaux. Il y a la théorie des *smooth infinitesimals* de John Bell, celle d'Alain Connes où l'on perd la commutativité. Les nombres surréels de John Conway

donnent aussi une version incontestablement rigoureuse de ces infinitésimaux, qui ont donc trouvé une place dans les mathématiques.

Cependant, aucune de ces théories ne propose des nombres réels aussi simples que la théorie classique qui refuse les infinitésimaux. On peut dire des infinitésimaux que, une fois ceux-ci maîtrisés, certaines démonstrations s'en trouvent simplifiées, mais que les maîtriser n'est pas simple. Ajouté au fait qu'on a au moins quatre façons assez différentes de les introduire, tout cela rend difficile une réhabilitation concrète des infinitésimaux et leur utilisation dans l'enseigne-

ment (bien que cela ait été tenté). Aucune de ces théories ne conduit d'ailleurs à donner un sens clair à l'inégalité stricte $0,999... < 1$. Dans certaines, elle est partiellement vraie, dans d'autres elle n'a pas de sens.

Quoi qu'on fasse, il ne semble pas possible de concevoir un continu donnant définitivement raison à ceux qui refusent d'admettre que $0,999... = 1$.

Sur les théories concurrentes des infinitésimaux, on pourra consulter Mikhail G. Katz et Éric Leichtnam, « Commuting and noncommuting infinitesimals », *American Mathematical Monthly*, vol. 120(7), pp. 631-641, 2013.

Nous n'avons pas détaillé toutes les étapes (avec des epsilons) qui justifient les affirmations successives, mais c'est assez facile pour qui a saisi l'esprit de la conception classique des nombres réels.

La notion classique de nombre réel, par le biais des limites, confirme donc que les démonstrations 1, 2 et 3 sont justes. Elle permettrait d'ailleurs de justifier les règles infinies à l'œuvre dans ces démonstrations, tout en ne permettant pas de valider la règle de comparaison utilisée par l'étudiant récalcitrant car les inégalités strictes ne passent pas à la limite pour les suites.

Avec des lycéens, il ne faut pas aller plus loin dans la discussion. On profitera au contraire de l'occasion pour énumérer toutes les conséquences de cette conception des réels fondée sur les limites. Les voici.

— Certains passages à la limite sont illégitimes : même si, pour tout entier n , $y_n < a$ et que la suite y_n est convergente, cela n'implique pas que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n < a$, mais seulement que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq a$.

— Certains nombres réels, ceux de la forme $n/10^k$ (n et k entiers), ont deux

développements décimaux : l'un se termine par une infinité de 0 (que l'on n'écrit pas), l'autre par une infinité de 9. Ainsi : $0,15 = 0,14999... ; 12,8 = 12,7999... ; 1 = 0,999...$

— La situation est analogue dans toutes les bases de numération. En base 2, par exemple, $1,000... = 0,111... ; 0,101 = 0,100111...$

— La difficulté à admettre que $1 = 0,999...$ provient de la confusion entre « notation décimale infinie » et « nombre réel ». Dans le monde des nombres entiers et décimaux finis, l'identification des nombres et de leur écriture décimale est sans conséquence du fait de l'unicité de l'écriture décimale. En passant aux développements infinis, elle devient impossible et oblige à une conception plus abstraite des nombres réels. Il ne faut pas assimiler les nombres réels et leur représentation décimale. Le monde aurait été plus simple si chaque nombre réel avait un unique développement décimal infini, mais ce n'est pas le cas !

Reste une question : est-il totalement inconcevable de définir une situation mathématique qui donne un sens à $0,999... < 1$? La réponse est qu'il est

possible de trouver des formalismes donnant raison à l'affirmation $0,999... < 1$. Attention cependant aux conséquences ! On va envisager deux voies permettant de préserver l'idée intuitive initiale d'une inégalité stricte entre $0,999...$ et 1. On verra qu'aucune ne conduit à un ensemble de nombres vraiment en mesure de concurrencer les nombres réels tels que le XIX^e siècle les a définis. Pour simplifier, nous n'envisagerons que des nombres positifs, mais bien sûr, moyennant quelques ajustements, tout ce que nous disons s'adapte aux nombres négatifs.

Les nombres réels de l'étudiant récalcitrant

La première méthode est simple et brutale : on dédouble les nombres décimaux finis. C'est une méthode économique : on ne change presque rien, on se contente de prendre au sérieux que $0,999... < 1$ et toutes les inégalités du même genre. Nous dénommerons cette attitude « les nombres réels de l'étudiant récalcitrant ».

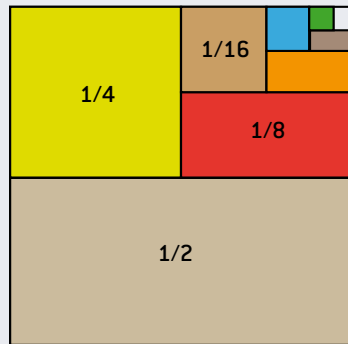
Une démonstration graphique

Une tentative pour démontrer que $0,999... = 1$ s'appuie sur un dessin.

On se place en base 2, où le problème est alors transformé en la question : $0,111... \text{ est-il égal à } 1$?

Le développement $0,111...$ désigne en fait la somme $1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + ...$. Or le dessin ci-contre, où le grand carré de côté 1 est convenablement décomposé, montre que cette somme vaut bien 1.

Notons cependant que le sceptique, là encore, pourrait se montrer insatisfait. En effet, il n'est pas vrai que la réunion de tous les carrés et rectangles internes recouvre le coin en haut à droite du grand carré de côté 1. Ce point reste indéfiniment non recouvert !



$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1$$

On considère donc que toute suite de chiffres décimaux avec une virgule (par exemple 315,212121...) est un nombre réel et que deux tels nombres sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes chiffres. L'ordre qui permet de les classer est celui défini par la règle que l'étudiant évoquait : on place l'un sous l'autre les deux nombres à comparer en alignant les virgules et on les parcourt en parallèle de gauche à droite jusqu'à trouver une différence qui indique alors le plus petit. Cet ordre est dénommé ordre lexicographique sur les suites infinies (à droite) de chiffres avec virgules. Par exemple, 7 345,222222... est plus grand que 7 345,221222...

Avec ces nombres réels de l'étudiant récalcitrant, on a $0,999... < 1$.

L'ordre défini entre les nombres réels classiques est tel qu'entre deux nombres différents on trouve toujours une infinité d'autres nombres réels. Pour les nombres réels de l'étudiant récalcitrant, c'est vrai aussi... sauf dans le cas où les deux nombres sont ceux qui étaient auparavant confondus, comme 1 et $0,999...$. Pour l'ordre de l'étudiant récalcitrant, il n'y a, par exemple, aucun autre nombre entre 2,19999... et 2,20000... Ils sont différents et il y a comme un trou entre eux. En fait, il y a une infinité de tels trous : il y en a un derrière chaque nombre se terminant par une infinité de 9. Cela contredit l'idée que nous avons du continu, censé

représenter la structure de la droite géométrique, lisse et infinie. De ce point de vue déjà, les réels de l'étudiant récalcitrant ne sont pas très satisfaisants. Et ils rencontrent d'autres difficultés avec les opérations.

Pour définir les opérations entre les nombres réels de l'étudiant récalcitrant, plusieurs méthodes sont envisageables. Choisissons-en une et voyons ses défauts (les autres méthodes ne sont pas meilleures).

On convient que le résultat de l'addition de r et de r' (respectivement de la multiplication de r et de r') est le nombre $f(r+r')$ [respectivement $f(r \times r')$] où $+$ et $\times$ sont les opérations définies par les règles de calcul usuelles avec retenues et où f est l'opération qui transforme, si c'est nécessaire, une série infinie de 9 en 0 et qui simultanément ajoute 1 au chiffre juste avant la série des 9.

Pour l'étudiant récalcitrant, l'opération $0,666... + 0,333...$, par application des règles de calcul usuelles, donne d'abord $0,999...$, puis, par application de f , donne 1. Pour lui, on a donc : $0,666... + 0,333... = 1$. Si on avait choisi d'avoir $0,666... + 0,333... = 0,999...$ (plus naturel au premier abord), on aurait eu $1/3 + 2/3 = 0,333... + 0,666... = 0,999...$, alors qu'on s'attend à trouver $1/3 + 2/3 = 1$. Cela n'aurait pas été plus satisfaisant !

La méthode proposée évite, quand on calcule, de tomber sur des 999..., donc sur le problème mentionné avec $1/3 + 2/3$ et bien d'autres du même type. Surtout, les

opérations adoptées conduisent à démontrer sans mal que l'addition est commutative et associative, ainsi que la multiplication. Il y a aussi distributivité de l'addition par rapport à la multiplication. Les nombres réels de l'étudiant récalcitrant ont, à première vue, un comportement assez raisonnable.

Ce n'est pas vrai en tout point, car 1 n'est plus l'élément neutre de la multiplication : multiplier par 1 change parfois un nombre. On a en effet $0,999... \times 1 = 1$

Pire, la règle de simplification par un nombre non nul (si $a \neq 0$, alors de $ab = ac$ on déduit $b = c$) n'est plus vraie : de $0,999... \times 1 = 1 = 1 \times 1$ on ne peut pas déduire $0,999... = 1$, puisque justement, pour l'étudiant récalcitrant, $0,999...$ est différent de 1.

Pour utiliser ces nombres, il faudrait revoir toutes les règles de calcul et de manipulation algébrique qu'on a l'habitude d'utiliser.

La notion de limite dans le monde des nombres réels de l'étudiant récalcitrant n'est pas non plus très satisfaisante : la suite $1 - (1/10)^n$ ne converge pas vers 1, mais vers $0,999...$ [qui n'est pas 1 !]. Pourtant, $1/10^n$ converge vers 0, ce qui implique que $1/10^n - 1$ converge vers -1 . En d'autres termes, l'opposé d'une suite qui converge vers L n'a pas nécessairement comme limite $-L$. Désagréable ! L'étudiant récalcitrant disposera peut-être de nombres réels qui vérifient l'inégalité $0,999... < 1$, mais à quel prix ! Cherchons autre chose.

La voie de l'analyse non standard

La notion de limite définie au XIX^e siècle et qui fonde la conception contemporaine du continu interdit de considérer les infinitésimaux, c'est-à-dire les nombres plus petits que n'importe quel inverse d'un entier non nul. Ces nombres infiniment petits n'existent pas dans la conception classique des réels. Pourtant, les mathématiciens des XVII^e et XVIII^e siècles, Leibniz en particulier, les utilisaient. Les physiciens aujourd'hui encore aiment en faire usage, car ils simplifient certains calculs. Or en 1966, le mathématicien américain Abraham Robinson a montré que l'on peut envisager sans incohérence des nombres réels qui contiendraient des infinitésimaux. Sa théorie,

l'analyse non standard, est élégante et puissante ; elle a mis fin au discrédit dont étaient victimes les infinitésimaux. La théorie est fondée sur celle des modèles, un domaine de la logique mathématique développée au XX^e siècle. Elle constitue une conception alternative à la notion classique des réels.

Dans cette théorie, on construit une notion de développement décimal analogue à celle, classique, fondée sur les suites convergentes. On donne alors un sens à $0,999...$. Cette fois, cependant, les points de suspension désignent une infinité de 9, infinité qui peut prendre plusieurs sens car il y a maintenant plusieurs sortes de nombres entiers infinis H (qui n'existent pas dans la théorie classique) et il y a en beaucoup. Selon que le nombre infini de 9 représenté par les points de suspension de $0,999...$ est plus ou moins grand, on obtient soit un nombre réel qui est égal à 1, soit un nombre strictement inférieur à 1. Cela provient de ce que si on place H chiffres 9 dans $0,999...$, alors on a $0,999... = 1 - 1/10^H$, qui n'est pas 1 (à un infinitésimal près).

La théorie de ces développements décimaux a été faite par le mathématicien Albert Lightstone. L'étudiant récalcitrant qui renoncera sagement à sa première tentative pourrait se replier sur cette analyse non standard et soutenir que $0,999... < 1$ n'est pas absurde. Puisque les nombres réels de l'analyse non standard de Robinson constituent un corps (un ensemble où l'addition et la multiplication sont bien définies), on ne rencontrera pas avec eux les difficultés constatées avec la méthode trop naïve du dédoublement des décimaux finis.

0,999... est bien égal à 1 !

Que faut-il penser de cette analyse non standard ? Doit-on adopter ses nombres réels (parfois dénommés hyperréels) plutôt que ceux, classiques, légués par le XIX^e siècle et adoptés universellement ? La question est délicate. Disons simplement que de nombreux travaux continuent de défendre cette conception dont les partisans affirment qu'elle produit souvent, pour un même résultat, des démonstrations plus directes et simples que la conception clas-

sique. Certains soutiennent même qu'elle est utilisable dans le cadre d'un enseignement général de l'analyse.

Les opposants ou les sceptiques ne remettent pas en cause la cohérence de la théorie dont il a été prouvé qu'elle était aussi vraisemblable que celle des nombres réels classiques, mais ils doutent de sa simplicité. Le commentaire suivant provient d'un mathématicien assez représentatif qui, dans une discussion à propos de la rédaction d'un article de Wikipédia, écrivait :

« Je suis d'accord que l'analyse non standard est un domaine intéressant, qui explique certainement pourquoi les arguments informels utilisant les infinitésimaux produisent souvent les mêmes réponses que la méthode rigoureuse à la epsilon-delta des limites. Cependant, j'ai des doutes concernant l'affirmation que les preuves du calcul non standard sont plus simples ou plus claires que les preuves standard. Elles ne sont plus simples que si vous vous placez au cœur de l'analyse non standard, et il faut pour cela un haut niveau de maturité mathématique. Bien sûr, l'enseignant peut aider artificiellement les étudiants en leur disant : "Faites-moi confiance, nous pourrions faire tout cela rigoureusement si nous le voulions" ; mais alors c'est qu'il est en train en réalité de proposer un argument informel, et non pas une démonstration rigoureuse. »

Malgré cinquante ans d'existence, l'analyse non standard n'a pas pu s'imposer comme une conception alternative à l'analyse classique. Il est peu probable que cela se produise maintenant, d'autant qu'elle existe sous plusieurs formes concurrentes. Pas plus que d'autres tentatives, elle n'offre un moyen simple permettant de soutenir que l'on a définitivement $0,999... < 1$. On doit donc conclure qu'il faut accepter que $0,999... = 1$. Il est raisonnable aussi de considérer que l'intuition d'une inégalité stricte entre $0,999...$ et 1 n'est qu'un effet de confusion dû à une notation, laquelle nous piège en nous faisant imaginer une identité qui n'existe pas entre nombres réels et suites de chiffres décimaux avec virgule. Les notations sont des aides merveilleuses pour comprendre les mathématiques et les faire progresser ; parfois, cependant, elles nous embrouillent !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

P. Błaszczyk et al., Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking, *Foundations of Science*, vol. 18(1), pp. 43-74, 2013.

K. Katz, M. Katz, Zooming in on infinitesimal 1-... 9... in a post-triumvirate era, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74(3), pp. 259-273, 2010.

M. Blay, Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *Revue d'histoire des sciences*, vol. 39(3), pp. 223-253, 1986 (<http://bit.ly/28M69c1>).

Discussions du problème $0,999... = 1$: www.quora.com/Is-0-999-dots-1-in-the-hyperreals
www.cut-the-knot.org/WhatIs/Infinity/9999.shtml#MK

Wikipedia, Criticism of nonstandard analysis, https://en.wikipedia.org/wiki/Criticism_of_non-standard_analysis

M. Katz, When is .999... less than 1 ?, <http://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/999.html>



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Seul sur Mars, un manuel de survie

Dans ce film qui raconte l'histoire d'un naufragé de l'espace, la science a un rôle prépondérant. Tempête de sable dévastatrice, culture de pommes de terre... : ces scènes sont-elles plausibles ?

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

Illustration : Marc BOULAY

Elle est rouge. Elle est froide. Elle est désertique. Et pourtant, aucune autre planète n'a autant excité l'imagination, n'a été l'objet d'autant de rêves ou la cible d'autant de missions scientifiques. À l'heure où les émissaires robotisés de la planète Terre continuent à envahir Mars, le film *Seul sur Mars* (Ridley Scott, 2015), tiré du livre *The Martian* (Andy Weir, 2011) montre comment l'astronaute Mark Watney va survivre seul à la surface de la planète rouge grâce à ses connaissances scientifiques. L'histoire, bien documentée, repose sur des techniques aérospatiales actuelles. Et pourtant, on ne peut s'empêcher de se demander si tout cela est bien réaliste.

Commençons par examiner le vaisseau *Hermès* qui conduit les astronautes sur la planète Mars. Sa grande roue, façon *2001, l'Odyssée de l'espace*, reproduit une gravité artificielle, mais semble un peu excessive. On ne peut nier l'intérêt de recréer une pesanteur durant le voyage de six mois jusqu'à Mars, mais le dispositif utilisé sera sans doute plus léger et moins coûteux que celui du film. En revanche, le programme et le déroulé de la mission *Arès III* du film sont assez raisonnables. Ils ressemblent à ceux retenus par la Nasa, directement fondés sur les travaux de l'expert en exploration martienne Robert Zubrin : un vaisseau principal pour atteindre Mars, un habitat sous pression où séjourner sur place et un MAV (*Mars Ascent Vehicle*) pour quitter le sol et revenir au vaisseau principal, en orbite autour de la planète, le tout envoyé

avant l'arrivée des astronautes. Le MAV est un élément clé : trop massif pour être expédié sur Mars avec un réservoir plein, il est déposé à l'avance avec juste une petite réserve d'hydrogène. Il fabrique son carburant sur place à partir du dioxyde de carbone de l'atmosphère martienne grâce à une usine chimique alimentée par un moteur nucléaire.

Dans le film, le programme ne se déroule pas comme prévu. L'histoire commence quand les astronautes doivent faire décoller le MAV en pleine tempête martienne, avant que ce module ne bascule sous l'effet du vent. Devant l'urgence de la situation, ils sont contraints d'abandonner l'un des leurs, victime d'un accident. Le sol martien est régulièrement balayé par des tempêtes – les particules soulevées donnent d'ailleurs au ciel sa couleur orange (et bleue au coucher du Soleil). Mais la tempête du film peut-elle faire autant de dégâts ?

Avec une pression atmosphérique martienne très faible, 160 fois inférieure à celle de la Terre au niveau de la mer et une température moyenne de -60°C , la densité atmosphérique de Mars est 60 fois inférieure à celle de la Terre. Or la pression exercée sur un obstacle par un fluide en mouvement est proportionnelle au produit de la densité du fluide par le carré de sa vitesse. Dès lors, si la pression exercée par un vent de vitesse donnée est 60 fois plus faible sur Mars que son équivalent terrestre, une tempête ne serait ressentie que comme une brise par les astronautes.



DANS SEUL SUR MARS, Mark Watney doit faire preuve d'ingéniosité pour survivre grâce à ses connaissances en chimie, en botanique, en électronique, etc.