

l'analyse non standard, est élégante et puissante ; elle a mis fin au discrédit dont étaient victimes les infinitésimaux. La théorie est fondée sur celle des modèles, un domaine de la logique mathématique développée au XX^e siècle. Elle constitue une conception alternative à la notion classique des réels.

Dans cette théorie, on construit une notion de développement décimal analogue à celle, classique, fondée sur les suites convergentes. On donne alors un sens à $0,999\dots$. Cette fois, cependant, les points de suspension désignent une infinité de 9, infinité qui peut prendre plusieurs sens car il y a maintenant plusieurs sortes de nombres entiers infinis H (qui n'existent pas dans la théorie classique) et il y a en beaucoup. Selon que le nombre infini de 9 représenté par les points de suspension de $0,999\dots$ est plus ou moins grand, on obtient soit un nombre réel qui est égal à 1, soit un nombre strictement inférieur à 1. Cela provient de ce que si on place H chiffres 9 dans $0,999\dots$, alors on a $0,999\dots = 1 - 1/10^H$, qui n'est pas 1 (à un infinitésimal près).

La théorie de ces développements décimaux a été faite par le mathématicien Albert Lightstone. L'étudiant récalcitrant qui renoncera sagement à sa première tentative pourrait se replier sur cette analyse non standard et soutenir que $0,999\dots < 1$ n'est pas absurde. Puisque les nombres réels de l'analyse non standard de Robinson constituent un corps (un ensemble où l'addition et la multiplication sont bien définies), on ne rencontrera pas avec eux les difficultés constatées avec la méthode trop naïve du dédoublement des décimaux finis.

0,999... est bien égal à 1 !

Que faut-il penser de cette analyse non standard ? Doit-on adopter ses nombres réels (parfois dénommés hyperréels) plutôt que ceux, classiques, légués par le XIX^e siècle et adoptés universellement ? La question est délicate. Disons simplement que de nombreux travaux continuent de défendre cette conception dont les partisans affirment qu'elle produit souvent, pour un même résultat, des démonstrations plus directes et simples que la conception clas-

sique. Certains soutiennent même qu'elle est utilisable dans le cadre d'un enseignement général de l'analyse.

Les opposants ou les sceptiques ne remettent pas en cause la cohérence de la théorie dont il a été prouvé qu'elle était aussi vraisemblable que celle des nombres réels classiques, mais ils doutent de sa simplicité. Le commentaire suivant provient d'un mathématicien assez représentatif qui, dans une discussion à propos de la rédaction d'un article de Wikipédia, écrivait :

« Je suis d'accord que l'analyse non standard est un domaine intéressant, qui explique certainement pourquoi les arguments informels utilisant les infinitésimaux produisent souvent les mêmes réponses que la méthode rigoureuse à la epsilon-delta des limites. Cependant, j'ai des doutes concernant l'affirmation que les preuves du calcul non standard sont plus simples ou plus claires que les preuves standard. Elles ne sont plus simples que si vous vous placez au cœur de l'analyse non standard, et il faut pour cela un haut niveau de maturité mathématique. Bien sûr, l'enseignant peut aider artificiellement les étudiants en leur disant : "Faites-moi confiance, nous pourrions faire tout cela rigoureusement si nous le voulions" ; mais alors c'est qu'il est en train en réalité de proposer un argument informel, et non pas une démonstration rigoureuse. »

Malgré cinquante ans d'existence, l'analyse non standard n'a pas pu s'imposer comme une conception alternative à l'analyse classique. Il est peu probable que cela se produise maintenant, d'autant qu'elle existe sous plusieurs formes concurrentes. Pas plus que d'autres tentatives, elle n'offre un moyen simple permettant de soutenir que l'on a définitivement $0,999\dots < 1$. On doit donc conclure qu'il faut accepter que $0,999\dots = 1$. Il est raisonnable aussi de considérer que l'intuition d'une inégalité stricte entre $0,999\dots$ et 1 n'est qu'un effet de confusion dû à une notation, laquelle nous piège en nous faisant imaginer une identité qui n'existe pas entre nombres réels et suites de chiffres décimaux avec virgule. Les notations sont des aides merveilleuses pour comprendre les mathématiques et les faire progresser ; parfois, cependant, elles nous embrouillent !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

P. Błaszczyk et al., Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking, *Foundations of Science*, vol. 18(1), pp. 43-74, 2013.

K. Katz, M. Katz, Zooming in on infinitesimal 1-... 9... in a post-triumvirate era, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74(3), pp. 259-273, 2010.

M. Blay, Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *Revue d'histoire des sciences*, vol. 39(3), pp. 223-253, 1986 (<http://bit.ly/28M69c1>).

Discussions du problème $0,999\dots = 1$: www.quora.com/Is-0-999-dots-1-in-the-hyperreals
www.cut-the-knot.org/WhatIs/Infinity/9999.shtml#MK

Wikipedia, Criticism of nonstandard analysis, https://en.wikipedia.org/wiki/Criticism_of_non-standard_analysis

M. Katz, When is .999... less than 1 ?, <http://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/999.html>



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Seul sur Mars, un manuel de survie

Dans ce film qui raconte l'histoire d'un naufragé de l'espace, la science a un rôle prépondérant. Tempête de sable dévastatrice, culture de pommes de terre... : ces scènes sont-elles plausibles ?

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

Illustration : Marc BOULAY

Elle est rouge. Elle est froide. Elle est désertique. Et pourtant, aucune autre planète n'a autant excité l'imagination, n'a été l'objet d'autant de rêves ou la cible d'autant de missions scientifiques. À l'heure où les émissaires robotisés de la planète Terre continuent à envahir Mars, le film *Seul sur Mars* (Ridley Scott, 2015), tiré du livre *The Martian* (Andy Weir, 2011) montre comment l'astronaute Mark Watney va survivre seul à la surface de la planète rouge grâce à ses connaissances scientifiques. L'histoire, bien documentée, repose sur des techniques aérospatiales actuelles. Et pourtant, on ne peut s'empêcher de se demander si tout cela est bien réaliste.

Commençons par examiner le vaisseau *Hermès* qui conduit les astronautes sur la planète Mars. Sa grande roue, façon *2001, l'Odyssée de l'espace*, reproduit une gravité artificielle, mais semble un peu excessive. On ne peut nier l'intérêt de recréer une pesanteur durant le voyage de six mois jusqu'à Mars, mais le dispositif utilisé sera sans doute plus léger et moins coûteux que celui du film. En revanche, le programme et le déroulé de la mission *Arès III* du film sont assez raisonnables. Ils ressemblent à ceux retenus par la Nasa, directement fondés sur les travaux de l'expert en exploration martienne Robert Zubrin : un vaisseau principal pour atteindre Mars, un habitat sous pression où séjourner sur place et un MAV (*Mars Ascent Vehicle*) pour quitter le sol et revenir au vaisseau principal, en orbite autour de la planète, le tout envoyé

avant l'arrivée des astronautes. Le MAV est un élément clé : trop massif pour être expédié sur Mars avec un réservoir plein, il est déposé à l'avance avec juste une petite réserve d'hydrogène. Il fabrique son carburant sur place à partir du dioxyde de carbone de l'atmosphère martienne grâce à une usine chimique alimentée par un moteur nucléaire.

Dans le film, le programme ne se déroule pas comme prévu. L'histoire commence quand les astronautes doivent faire décoller le MAV en pleine tempête martienne, avant que ce module ne bascule sous l'effet du vent. Devant l'urgence de la situation, ils sont contraints d'abandonner l'un des leurs, victime d'un accident. Le sol martien est régulièrement balayé par des tempêtes – les particules soulevées donnent d'ailleurs au ciel sa couleur orange (et bleue au coucher du Soleil). Mais la tempête du film peut-elle faire autant de dégâts ?

Avec une pression atmosphérique martienne très faible, 160 fois inférieure à celle de la Terre au niveau de la mer et une température moyenne de -60°C , la densité atmosphérique de Mars est 60 fois inférieure à celle de la Terre. Or la pression exercée sur un obstacle par un fluide en mouvement est proportionnelle au produit de la densité du fluide par le carré de sa vitesse. Dès lors, si la pression exercée par un vent de vitesse donnée est 60 fois plus faible sur Mars que son équivalent terrestre, une tempête ne serait ressentie que comme une brise par les astronautes.



DANS SEUL SUR MARS, Mark Watney doit faire preuve d'ingéniosité pour survivre grâce à ses connaissances en chimie, en botanique, en électronique, etc.



AU COUCHER DU SOLEIL SUR MARS, le ciel de la planète se pare d'une couleur bleue. En effet, la taille des grains de poussière présents dans l'atmosphère martienne est telle que celle-ci laisse passer surtout la lumière bleue.

Estimons quelle vitesse de vent serait nécessaire pour faire basculer la navette. Pour ce faire, il faut tenir compte de la gravité martienne, 2,6 fois plus faible que celle de la Terre. Le rapport entre la force exercée par le vent et le poids du véhicule est donc, à vitesse de vent égale, environ 23 (la valeur de $60/2,6$) fois plus faible sur Mars que sur la Terre. La pression exercée par le vent étant proportionnelle au carré de sa vitesse, celle-ci devrait être, sur Mars, environ 4,8 fois supérieure ($\sqrt{23} \approx 4,82$) à celle qui, sur Terre, ferait basculer le MAV. Il faudrait donc des vitesses bien plus élevées que celles des vents les plus violents enregistrés sur la planète rouge, de l'ordre de 30 mètres par seconde. Comme souvent, le cinéma a ses exigences que la nature ne partage pas.

Ainsi, le vent martien ne pourrait soulever qu'une fine poussière, composée de grains mesurant quelque 50 à 100 micromètres. Les particules transportées sont plutôt de fines argiles. Or, dans le film, on voit passer des aiguilles de silice et des graviers lors de la tempête initiale !

Pour survivre, Watney cultive des pommes de terre dans un sol martien enrichi de ses excréments, mais il a besoin d'eau. Et pour faire de l'eau, il suffit de faire brûler du dihydrogène dans le dioxygène de l'air et de condenser la vapeur d'eau ainsi produite. Il faut aussi être prudent, car la réaction est très exothermique. Le problème est de disposer de dihydrogène, absent de l'air martien.

Dans le film, Watney utilise de l'hydrazine, carburant utilisé dans les moteurs à faible poussée qui assurent le positionnement sur orbite des satellites et des sondes spatiales. Dans ce cas, l'hydrazine est employée seule. En présence d'un catalyseur, elle se décompose en diazote et dihydrogène. Cette réaction exothermique se produit en quelques millisecondes, ce qui permet de doser précisément la poussée de la sonde. Sur Mars, Watney utilise cette réaction pour produire l'hydrogène dont la combustion avec l'oxygène de son habitat lui permet d'obtenir de l'eau.

Récolte de patates martiennes

Mars n'est pas dénuée d'eau : elle existe sous forme de glace (que Watney pourrait fondre avec son réacteur nucléaire). Se trouvant dans une région proche de l'équateur, le héros aurait dû se déplacer à des latitudes plus élevées, au-delà de 25 degrés, pour en trouver sous quelques centimètres de sable martien, sur des pentes orientées vers les pôles. Mais même avec de l'eau pour arroser ses plants, une alimentation à base de pommes de terre uniquement conduirait, à terme, à d'importantes carences.

Même s'il a des défauts, ce film permet au moins de poser la question des vols habités vers Mars. Explorer Mars pour tenter de savoir si un processus d'évolution prébiotique, voire l'émergence de la vie, a pu s'y dérouler est un enjeu scientifique majeur. Mais il n'est

nullement urgent d'envoyer des humains pour conduire cette exploration, tant il reste à faire avec des robots. En plus, il sera très difficile – et donc coûteux – de poser à la surface de Mars les lourdes charges nécessaires à la construction d'une base, même modeste. L'atmosphère y est trop ténue pour freiner correctement avec un parachute, comme sur Terre, et trop épaisse pour arriver à pleine vitesse jusqu'à la surface (les frottements produiraient des échauffements qui détruiraient l'appareil) et décélérer avec de simples rétrofusées, comme sur la Lune.

En revanche, il pourrait être intéressant d'envoyer des humains en orbite autour de la planète rouge. Cela économiserait l'infrastructure au sol pour organiser la survie de l'équipage tout en permettant de piloter en temps réel ou presque des robots perfectionnés déposés sur la planète (les signaux radio émis de la Terre mettent 5 à 22 minutes pour atteindre Mars). Et de plus, les astronautes pourraient facilement aller se poser sur les petites lunes Phobos ou Deimos, dont la très faible gravité facilite l'accès.

Finalement, *Seul sur Mars* montre en creux que les vols habités vers Mars sont d'abord une volonté politique. Et aucune autre raison, certainement pas l'exploration scientifique de Mars, ne peut justifier les budgets qu'ils exigent. ■

Roland LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. Jean-Sébastien STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. Marc BOULAY est sculpteur numérique.

ART & SCIENCE

Un jardin qui coule de source

L'art du jardin oriental, de l'Alhambra au Taj Mahal, s'expose à l'Institut du monde arabe, à Paris. On y découvre l'ingéniosité mise en œuvre pour maîtriser l'eau et l'influence toujours actuelle d'un modèle de jardin persan apparu il y a plus de 2 500 ans.

Loïc MANGIN

En cette chaleur estivale, nous sommes tous à la recherche d'un peu de fraîcheur. Les solutions sont nombreuses : plonger dans la piscine ou la mer, s'approcher d'un ventilateur à pleine puissance, se gaver de glaces... Une autre a prouvé son efficacité depuis des millénaires, c'est de déambuler dans un jardin. L'art d'aménager ces espaces verts a atteint un haut degré de raffinement et d'ingéniosité dans le monde arabe. Une exposition offre l'occasion de s'en rendre compte. Pour mieux échapper à l'ardeur du Soleil, la gestion de l'eau sera ici notre guide.

Depuis l'apparition de l'agriculture, il y a quelque 10 000 ans dans le Croissant fertile, l'un des principaux défis a été de dompter l'eau, souvent rare dans les contrées du monde arabe. Les oasis sont longtemps restées les seuls systèmes où plantes et eau cohabitaient en harmonie.

Puis on entreprit de maîtriser le cours des fleuves tels que le Nil, le Tigre et l'Euphrate grâce à de grands ouvrages (ponts, aqueducs, canaux, barrages, digues...). Ces travaux d'envergure ont amélioré l'agriculture et accompagné la sédentarisation, puis la croissance démographique dans les grandes villes. Enfin, on vit apparaître les premiers jardins d'agrément dans l'Égypte des pharaons.

Au cours de cette histoire, de nombreux dispositifs hydrauliques ont été mis au point. Citons la machine à godets actionnée par des animaux, la noria (une grande roue mue par le courant d'une rivière et qui hisse l'eau en

haut d'un aqueduc) et le chadouf. Cet appareil à bascule aide à remonter l'eau d'un point d'eau, une rivière ou un puits. Il est utilisé depuis le III^e millénaire avant notre ère et existe toujours, en Égypte notamment. On le retrouve dans plusieurs toiles françaises, par exemple chez Eugène Fromentin et Louis Hippolyte Mouchot au XIX^e siècle.

Les Perses ont excellé dans l'art du jardin et ont créé un modèle en quatre parties toujours en vigueur aujourd'hui. L'histoire débute lorsque le roi Cyrus, fondateur de l'empire achéménide au VI^e siècle avant notre ère, fait construire dans sa cité de Pasargades un immense jardin

Le modèle du jardin persan est perceptible dans les jardins italiens de la Renaissance, dans ceux des urbanistes du début du XX^e siècle...

de 100 hectares. Dans la région, l'eau abonde (fonte des neiges, pluies saisonnières...), mais est irrégulière. Le problème est donc d'assurer un approvisionnement constant.

Il a été résolu par d'imposants travaux d'adduction, ainsi que l'édification de barrages et de systèmes de régulation du débit au fonctionnement encore inconnu. Le jardin qui en résulte est organisé autour d'un grand bassin qui fait office de réservoir se déversant via des vannes dans un grand canal transverse. Ce dernier croise perpendiculairement une grande allée. C'est la naissance du jardin classique persan Chahâr-bâgh (soit « Quatre jardins »).

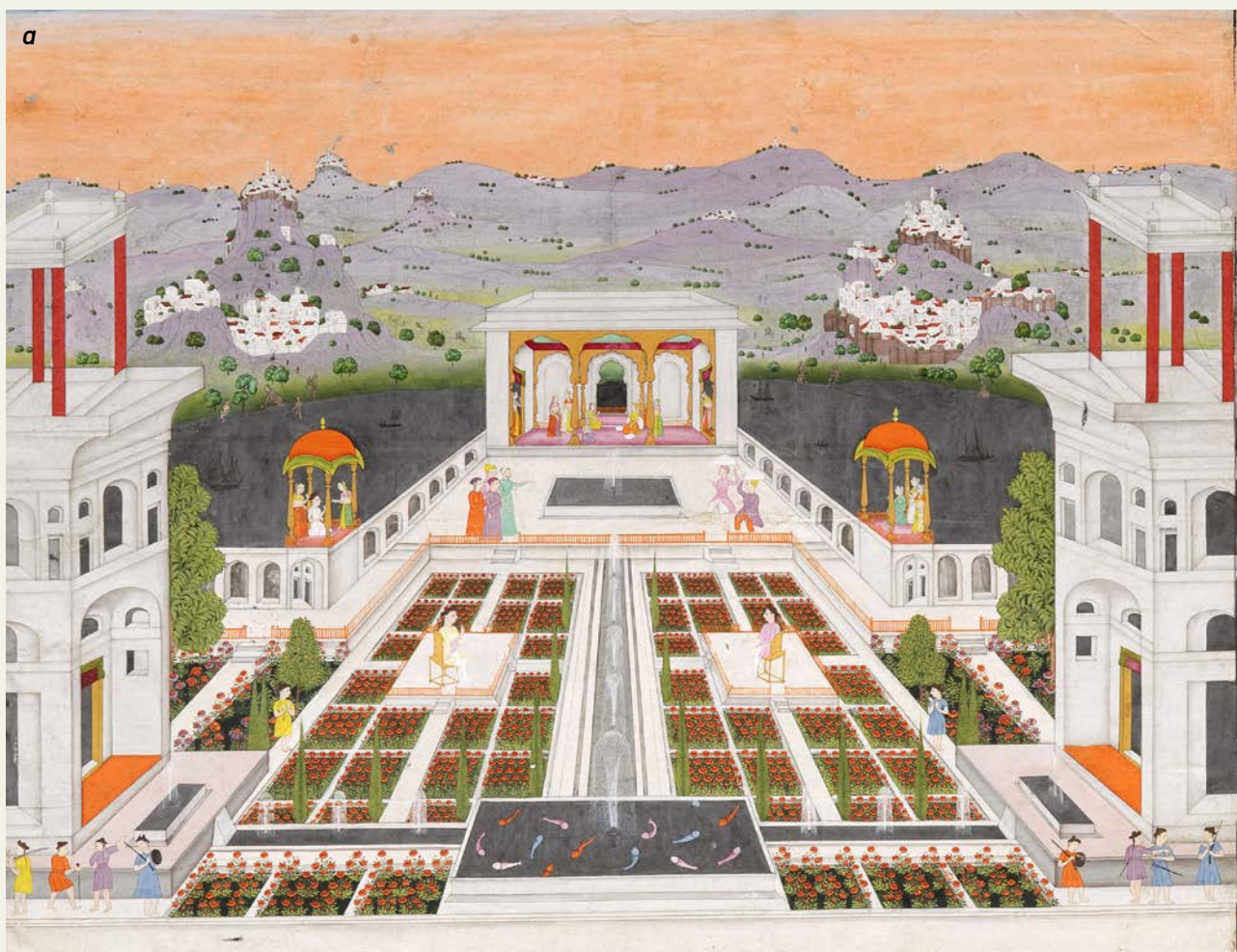
Le modèle est devenu la référence du jardin oriental. On le retrouve vingt siècles plus tard en Inde, où il a été introduit par Bâbur (1483-1530), fondateur de la dynastie des Moghols (1526-1857). Le dessin original subit quelques variations, mais la structure principale reste identique au modèle persan (*ci-contre, a*). Les descendants de Bâbur suivent l'exemple et l'appliquent avec un raffinement inégalé pour leurs mausolées, situés au centre d'un jardin évoquant le paradis. Le Taj Mahal en est l'illustration emblématique.

On repère l'influence du Chahâr-bâgh dans les jardins italiens de la Renaissance, puis dans ceux des urbanistes du début du XX^e siècle. Plus récemment encore, des parcs édifiés à Beyrouth et au Caire se réclament de cet héritage. Le jardin et l'eau sont également au centre des préoccupations d'artistes contemporains, telle l'Émiratie Lateefa bint Maktoum (*c*). Et

l'on trouve un hommage au Chahâr-bâgh au pied de l'Institut du monde arabe dans le jardin éphémère associé à l'exposition. Là, des parterres suspendus, référence à Babylone, constituent une anamorphose (*b*) en forme de zellige, un motif typique du monde arabe.

À l'heure de la lutte contre le réchauffement climatique et de la volonté de faire de Paris une ville plus végétalisée, les jardins d'Orient sont une source d'inspiration... rafraîchissante. ■

Jardins d'Orient. De l'Alhambra au Taj Mahal, du 19 avril au 30 septembre 2016 à l'Institut du monde arabe, à Paris.



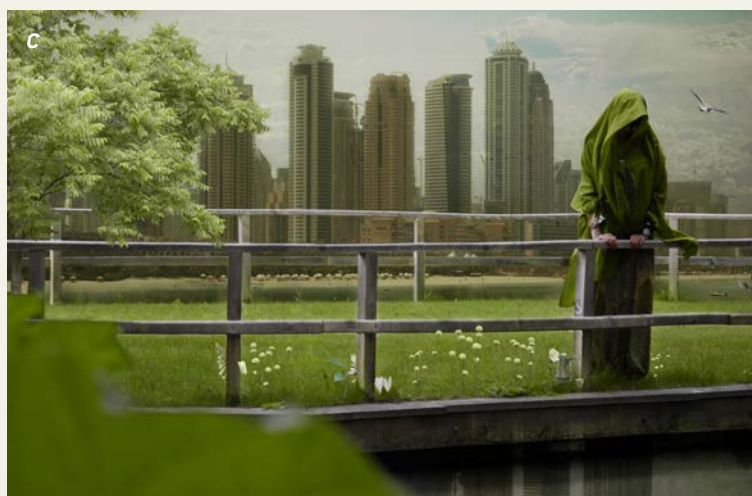
© Fondation Cusubodia, Collection Frits Lugt, Paris

Un jardin de l'Inde Moghole (ici, à Hyderabad, au-dessus d'un lac et face à un paysage de collines) est construit selon le modèle persan mis au point près de vingt siècles plus tôt. Il est découpé en quatre parties par des canaux rectilignes alimentés par un bassin.



© Thierry Rambaud

L'anamorphose qui transforme des jardins suspendus en motif octogonal.



© Image courtesy of Barjeel Art Foundation, Sharjah

Reflecting, de Lateefa bint Maktoum, pour réfléchir sur notre rapport aux jardins en ces temps d'urbanisation intensive.

Tous les papiers se recyclent,
alors trions-les tous.

**C'est aussi
simple à faire
qu'à lire.**

La presse écrite s'engage pour le recyclage
des papiers avec Ecofolio.

