

Dans l'**inter**êt de la science

mathieu
vidard

la tête au carré
14:05-15:00



**france
inter**venez
franceinter.fr

Les arbres des mathématiciens sont-ils tous gracieux ?

Au détour de questions sur les graphes et leur décomposition surgit un problème qui se formule simplement et qui, cinquante ans plus tard, résiste toujours.

Jean-Paul DELAHAYE

Les mathématiciens ont leur propre conception de ce qui est beau. Ce qu'ils dénomment « graphes gracieux » ou « arbres gracieux » ne vous semblera pas aussi ravissant qu'une ballerine d'opéra interprétant *Le Lac des cygnes*... Or ces notions introduites en 1967 par le mathématicien slovaque Alexander Rosa désignent une catégorie de structures combinatoires dotées de propriétés délicates et rares. Leur attrait esthétique n'est ressenti que si l'on sait que l'ajustement nécessaire à leur construction est difficile et improbable.

Un graphe de n arcs (ou arêtes) est dit gracieux si l'on peut numérotiser ses nœuds par des entiers différents pris entre 0 et n de façon que les arcs soient numérotés par tous les entiers de 1 à n quand on associe à chaque arc la valeur absolue de la différence des numéros de ses extrémités.

La définition est un peu raide ! Procédons plus lentement :

a) Un « graphe numéroté » est un graphe auquel on a associé un entier positif ou nul à chaque nœud.

b) La « valeur » d'un arc d'un graphe numéroté est la valeur absolue de la différence des numéros de ses extrémités.

c) Un graphe de n arcs est « gracieux » si l'on peut numérotiser ses nœuds par certains des entiers pris entre 0 et n , de façon que les valeurs des arcs soient tous les entiers de 1 à n . Le graphe *a* dans l'encadré page ci-contre est un exemple de graphe gracieux.

Les graphes que nous considérerons ici sont non orientés (l'arc AB est identique à l'arc BA), connexes (d'un seul tenant), sans boucle (pas d'arc liant un nœud à lui-même) et sans arc multiple (un arc, au plus, relie deux nœuds différents).

Placer des entiers aux nœuds d'un graphe donné pour établir qu'il est gracieux est un jeu : il faut tâtonner, vérifier, recommencer, etc. La difficulté est qu'on a la certitude d'avoir réussi seulement lorsque tous les nœuds sont numérotés, et qu'il est souvent impossible de concevoir des méthodes progressives de numérotation des nœuds. Essayez avec les cinq graphes *b, c, d, e, f* de la page ci-contre en tentant d'identifier le seul graphe de cette série qui n'est pas gracieux (*solutions sur le site de Pour la Science : <http://bit.ly/pls467-delahaye>*).

Des familles de graphes

On remarquera que si l'on a une numérotation des nœuds qui rend gracieux un graphe de n arcs, alors, en remplaçant chaque numéro a d'un nœud par $n-a$, on obtient une autre numérotation satisfaisante. En effet, d'une part, si a est compris entre 0 et n , c'est aussi le cas pour $n-a$. D'autre part, l'égalité $|(n-a) - (n-b)| = |a-b|$ est évidente, et donc les arcs seront numérotés de la même façon avec la nouvelle numérotation des nœuds : par tous les entiers entre 1 et n .

Le jeu devient un problème mathématique quand on introduit des classes de graphes.

Considérons par exemple la classe la plus simple de graphes, les « graphes linéaires », constitués de n nœuds $a_1, a_2, \dots, a_n$ reliés le plus simplement possible par des arcs $a_1-a_2, a_2-a_3, \dots, a_{n-1}-a_n$.

On découvre sans peine que tous sont gracieux en numérotant de gauche à droite un nœud sur deux par les entiers 0, 1, 2, ... puis, arrivé au bout, en repartant de droite à gauche pour numérotiser les nœuds oubliés lors du premier passage (*graphe h ci-contre*).

Cette numérotation régulière qui rend le graphe linéaire gracieux n'est pas la seule : il existe un grand nombre de telles numérotations. Les chercheurs ont établi en 2003 que ce nombre est supérieur à $(5/3)^n$ pour le graphe linéaire à n nœuds. Ce résultat a été amélioré, à l'aide d'un ordinateur, par le mathématicien polonais Michał Adamaszek, lequel a montré que le nombre de numérotations possibles est supérieur à $(2,37)^n$.

Une autre classe infinie de graphes gracieux facile à découvrir est celle des graphes en étoile (*graphe g ci-contre*). Le nœud au centre, numéroté 0, est relié à n autres nœuds numérotés 1, 2, ..., n ; bien évidemment, cela produit la numérotation attendue 1, 2, ..., n des arcs. Il n'y a qu'une seule numérotation, les autres s'y ramenant par permutation des branches de l'étoile.

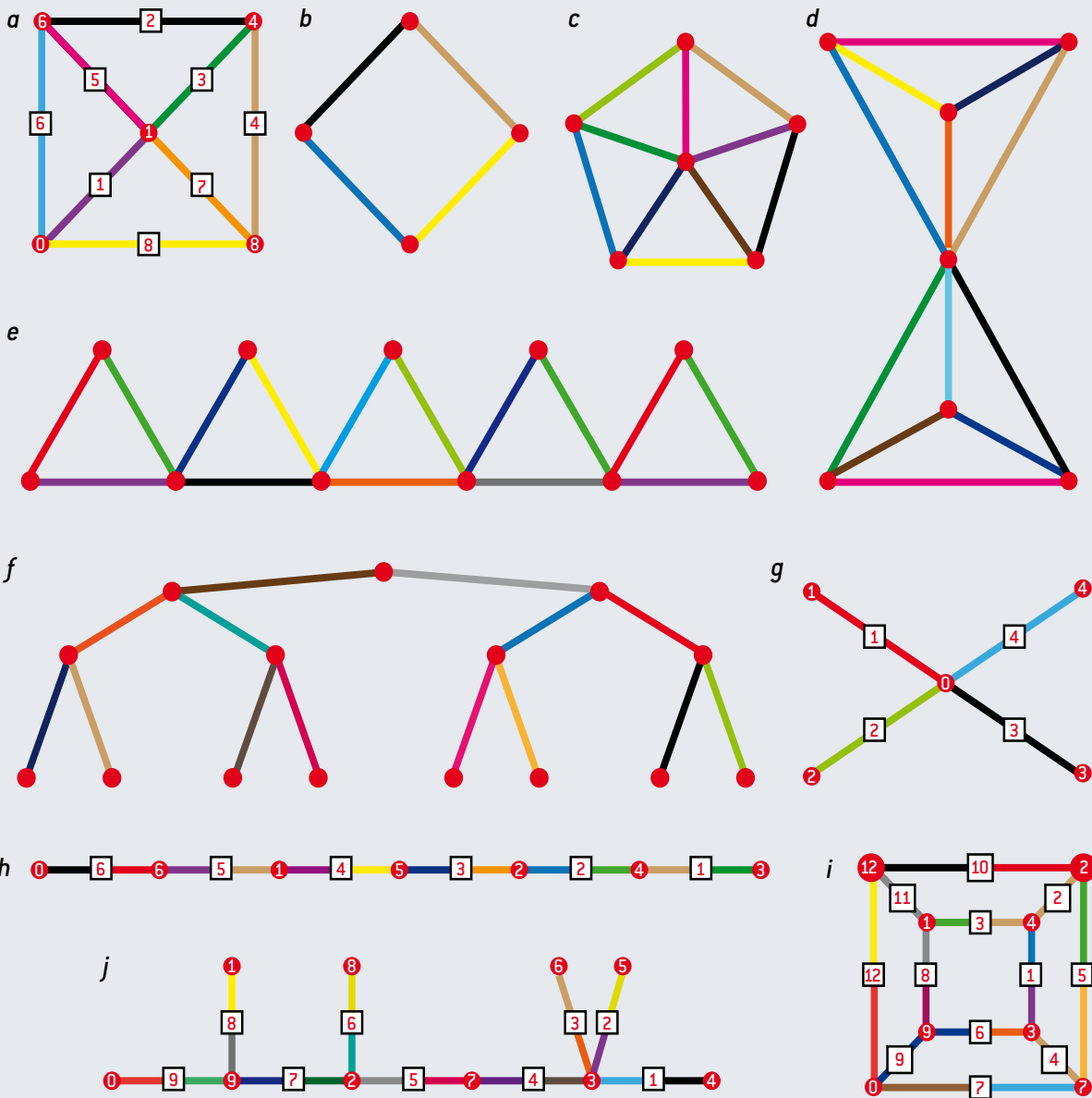
Depuis qu'on s'intéresse à cette propriété des graphes, une multitude de classes de graphes ont été prouvées gracieuses. Citons-en quelques-unes.

Neuf exemples de graphes gracieux et un intrus

Ci-dessous figure un exemple de graphe gracieux doté de 8 arcs (a). Pour prouver que ce graphe est gracieux, on numérote ses nœuds par des entiers pris entre 0 et 8, de telle façon qu'en associant à chaque arc l'entier correspondant à la différence entre les numéros de ses extrémités, on obtienne tous les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On vérifie aisément que la numérotation indiquée convient.

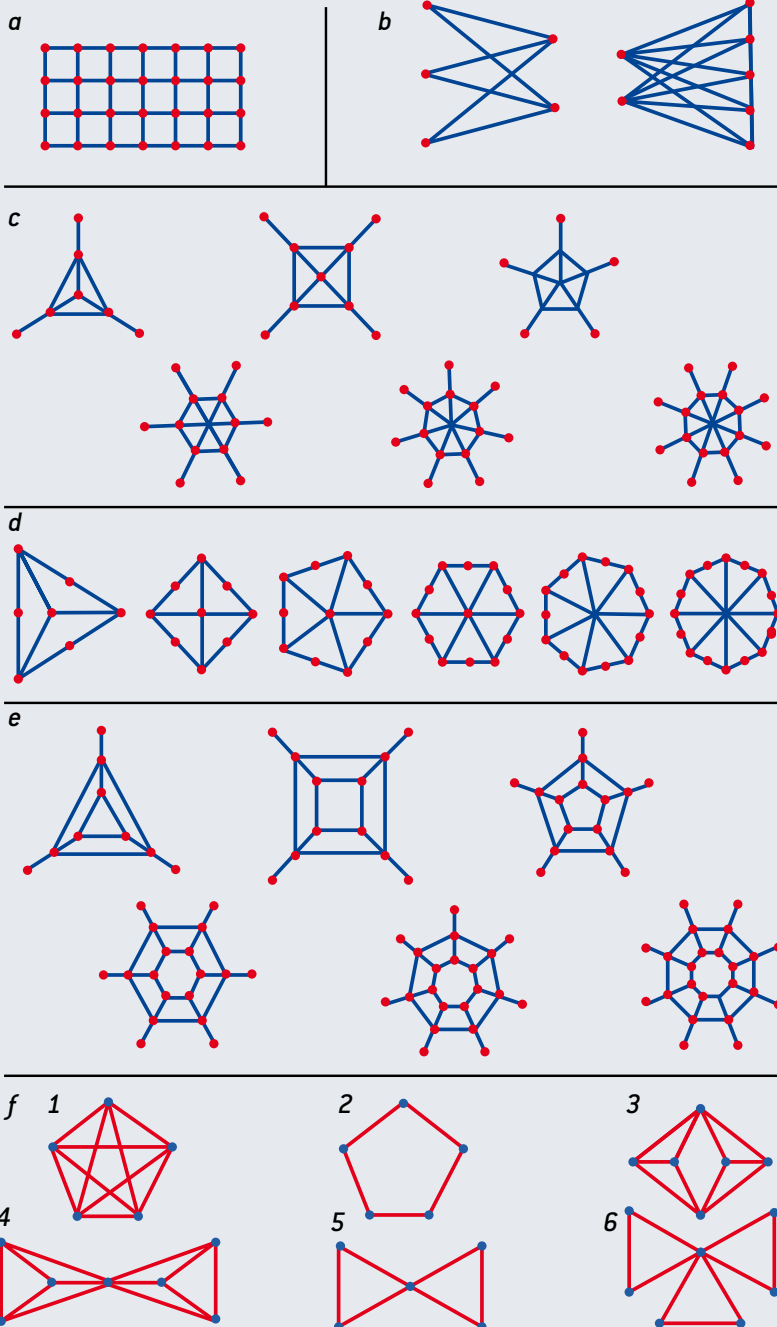
Numérotez les nœuds d'un graphe pour prouver qu'il est gracieux ressemble un peu à un jeu de sudoku. C'est possible pour 4 des 5 graphes b, c, d, e, f ci-dessous. Trouvez comment, et repérez le seul graphe disgracieux (les solutions sont sur <http://bit.ly/pls467-delahaye>).

Tous les graphes en étoile (g) ou linéaires (h) sont gracieux. Les procédés utilisés pour les deux exemples se généralisent. En i et j sont montrés deux graphes gracieux (chenille et hypercube) avec les numérotations qui prouvent leur gracieusité.



Zoologie de graphes gracieux et disgracieux

Un grand nombre de familles de graphes ont été démontrées gracieuses, par exemple les graphes en grille rectangulaire (a), les graphes biparti-complets (b), les graphes gouvernails (c), les graphes engrenages (d), les graphes en toile d'araignée (e). Les graphes de la série f sont, eux, disgracieux.



- Tous les graphes «roue» sont gracieux. Un graphe roue (figure c, page 79) est constitué d'un nœud central relié à n nœuds $a_1, a_2, \dots, a_n$ disposés autour de lui, ces nœuds étant eux-mêmes liés pour former un cercle d'arcs $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n - a_1$.

- Tous les graphes «chenille» sont gracieux. Les graphes chenille (figure j, page 79) sont les graphes qui donnent un graphe linéaire lorsqu'on enlève tous les nœuds attachés par un seul arc ainsi que tous les arcs associés à de tels nœuds.

- Tous les graphes représentant des «hypercubes» [carré, cube, etc.] sont gracieux (figure i, page 79).

Ajoutons que tous les graphes « grille rectangulaire », tous les graphes « biparti-complets », tous les graphes « engrenage », tous les graphes « gouvernail », tous les graphes « toile d'araignée » sont gracieux [voir l'encadré ci-contre]. Nous n'avons pas indiqué comment numéroter les nœuds de ces graphes pour établir que ces derniers sont gracieux : ce sera pour vous une occupation mathématique intéressante dans un train ou un avion...

Une conjecture cinquantenaire

Les graphes gracieux sont nombreux, et l'on connaît un procédé qui permet d'énumérer tous les graphes gracieux à n arcs. Leur nombre est exactement $n!$ [c'est-à-dire $n(n-1)(n-2) \dots 1$], ce qui est étonnant. Hélas, ce procédé n'aide guère à connaître mathématiquement les graphes gracieux. Par ailleurs, les procédés proposés pour montrer qu'une classe de graphes est composée uniquement de graphes gracieux, tel celui que nous avons décrit pour les graphes linéaires, ne sont pas généraux.

En particulier, alors que l'on ne connaît aucun contre-exemple, on n'a pour l'instant pas réussi à démontrer que tout arbre – c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle – est gracieux. Cette « conjecture des arbres gracieux » a été énoncée par Gerhard Ringel, Anton Kotzig et Alexander Rosa en 1967.

La simplicité de l'énoncé a attiré nombre de mathématiciens, lesquels ont démontré des résultats partiels, tel celui concernant

les graphes chenilles. Pourtant, depuis cinquante ans, personne n'a jamais proposé une preuve du résultat attendu pour les arbres, qui reste l'une des conjectures les plus troublantes des mathématiques.

Les calculs réalisés en 1998 à l'ordinateur par Robert Aldred, de l'université d'Otago en Nouvelle-Zélande, et Brendan McKay, de l'université nationale australienne à Canberra, ont montré que tous les arbres ayant au plus 26 nœuds sont gracieux (il existe 279 793 450 arbres à 26 nœuds). Depuis, d'autres programmes ont confirmé la conjecture pour les 14 830 871 802 arbres à 30 nœuds, les 2 262 366 343 746 arbres à 35 nœuds et les 363 990 257 783 343 arbres à 40 nœuds.

Les graphes disgracieux

De nombreux graphes sont gracieux, mais ils ne le sont pas tous. Les graphes non gracieux ou « disgracieux » les plus petits sont donnés en bas de l'encadré page 80.

Démontrer qu'un graphe est disgracieux est intéressant et parfois difficile. Nous allons détailler deux petits résultats permettant de prouver que de nombreux graphes sont disgracieux.

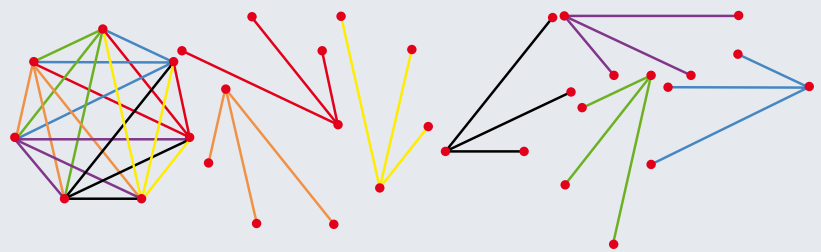
Le premier résultat affirme : « Si un graphe G à n arcs est gracieux, alors l'ensemble de ses nœuds peut être séparé en deux sous-ensembles disjoints P et I , tels que le nombre d'arcs reliant un nœud de P à un nœud de I est exactement $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. » La notation $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière : $\lfloor 1,22 \rfloor = 1$, $\lfloor 4,5 \rfloor = 4$, etc. Par exemple, si G comporte 6 arcs et s'il est gracieux, alors il existe une séparation des nœuds en deux sous-ensembles disjoints P et I qui sont liés par exactement 3 arcs.

La démonstration est assez simple. Si G est gracieux, on peut numérotiser ses nœuds avec des entiers compris entre 0 et n de telle façon que les arcs soient numérotés 1, 2, ..., n . Notons P l'ensemble des nœuds numérotés par des entiers pairs, et I celui des nœuds numérotés par des entiers impairs. Chaque arc numéroté par un entier impair établit un lien entre un nœud de P et un nœud de I , car la différence des numéros des extrémités d'un arc ne peut être impaire

Décomposition d'un graphe complet

Dans un graphe dit complet, chaque nœud est relié à tous les autres. Le graphe complet à 7 nœuds comporte 21 arcs. Il peut se décomposer en 7 graphes élémentaires tous identiques à une étoile à trois branches (un arbre, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle, à 4 nœuds).

Plus généralement, on conjecture qu'un graphe complet à $2n+1$ nœuds se décompose en $2n+1$ copies de l'arbre A , quel que soit l'arbre A à n nœuds. Cette conjecture sera démontrée si l'on réussit à démontrer la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa qui affirme que tout arbre est gracieux. Depuis cinquante ans, les mathématiciens cherchent à démontrer ces deux conjectures.



que si l'une des extrémités est paire et l'autre impaire. Seuls ces arcs impairs établissent de tels liens. Or parmi les entiers 1, 2, ..., n , il y a exactement $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ entiers impairs, ce qui prouve l'énoncé.

Le second résultat concerne les graphes eulériens, autrement dit les graphes connexes dont chaque nœud a un nombre pair d'arcs incidents. Ces graphes ont la propriété qu'on peut en parcourir tous les arcs par un chemin revenant à son point de départ et empruntant chaque arc une fois exactement. Dans le premier article sur le sujet, Alexander Rosa a démontré que si le nombre d'arcs d'un graphe eulérien est de la forme $n=4k+1$ ou $n=4k+2$, alors il est disgracieux.

La démonstration se fonde sur le premier résultat. Supposons qu'un tel graphe G soit gracieux et montrons que cela conduit à une contradiction. En parcourant un chemin eulérien de G qui revient à son point de départ, on passe d'un nœud pair P à un nœud impair I à chaque fois qu'on passe par un arc numéroté par un nombre impair, c'est-à-dire exactement $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ fois. Or si $n=4k+1$, on a $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lfloor (4k+2)/2 \rfloor = \lfloor 2k+1 \rfloor = 2k+1$; et si $n=4k+2$, on a $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lfloor (4k+3)/2 \rfloor = \lfloor 2k+1 + 1/2 \rfloor = 2k+1$. À chaque fois, le résultat est un

nombre impair, ce qui est impossible puisque le chemin eulérien revient à son point de départ et donc relie un nombre pair de fois un nœud pair P à un nœud impair I .

Ce résultat s'applique aux deux premiers et deux derniers graphes de la figure f dans l'encadré page 80. Il montre plus généralement que les graphes en anneaux (des arcs $a_1, a_2, \dots, a_n$ liés pour former un cercle $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n - a_1$) ne sont jamais gracieux si $n=4k+1$ ou $n=4k+2$, car, bien sûr, de tels graphes sont eulériens. Le résultat s'applique aussi à ces mêmes anneaux ayant au départ $n=4k+1$ ou $4k+2$ arcs dont on fusionne deux nœuds une ou plusieurs fois, comme par exemple le graphe obtenu en prenant trois triangles qu'on colle les uns aux autres en fusionnant des sommets (figure $f6$ dans l'encadré page 80).

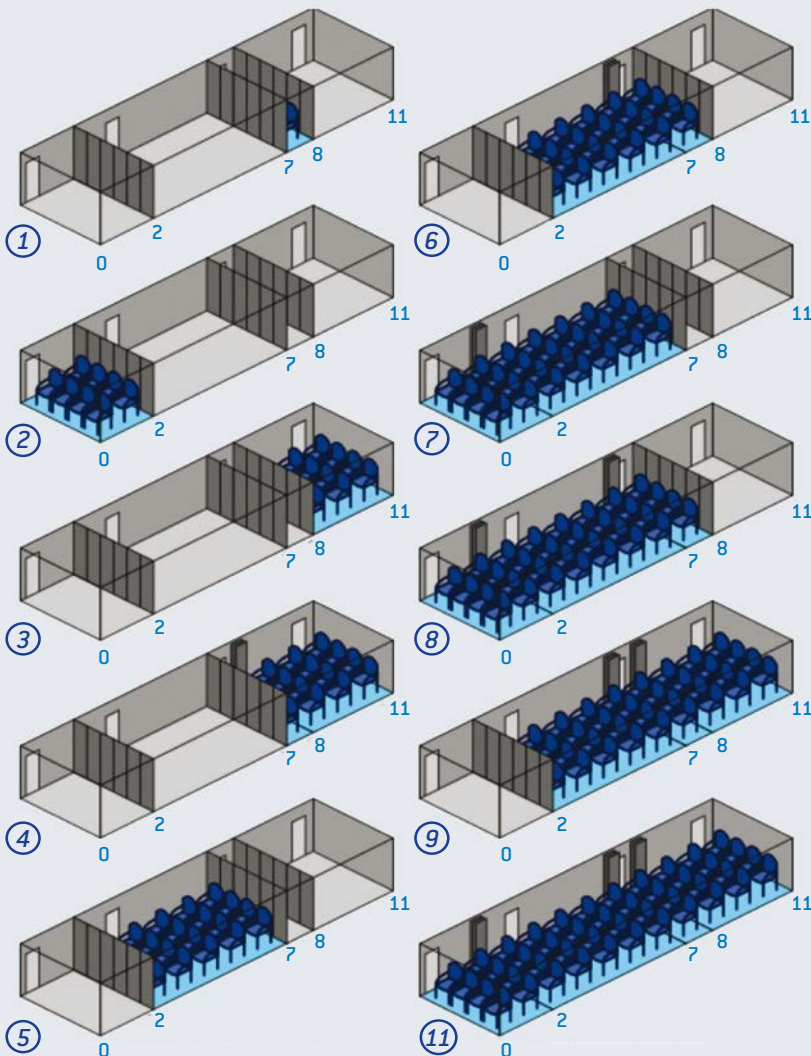
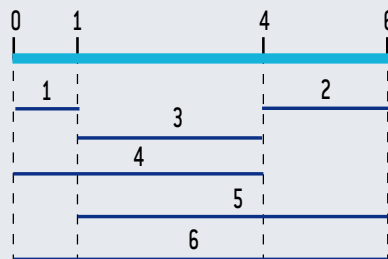
Une modestie d'Erdős ?

Chez les graphes, être disgracieux est en réalité le triste lot de presque tous. Le mathématicien hongrois Paul Erdős a en effet démontré que la proportion de graphes disgracieux parmi les graphes à n nœuds augmente quand n tend vers l'infini, et que cette proportion tend vers 100 %. En construi-

Les règles de Golomb

La règle considérée par Solomon Golomb ne comporte que 4 graduations et permet cependant de mesurer les longueurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 (voir le schéma ci-dessous). Il n'existe pas de règles équivalentes comportant 5 graduations et permettant de mesurer toutes les longueurs entières de 1 à 10.

Les règles « optimales » de Golomb sont celles qui, pour un entier n donné, sont les plus courtes et telles que les distances entre deux marques sont toutes différentes. Elles sont utiles dans diverses applications. Par exemple, avec seulement 3 murs escamotables, une salle de spectacle est modulable en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 11 rangées de fauteuils (nombres entourés, ci-dessous).



https://en.wikipedia.org/wiki/Golomb_ruler

sant au hasard un graphe ayant un grand nombre de nœuds, il est donc très probable qu'il soit disgracieux. Assez curieusement, Erdős n'a pas publié sa démonstration, bien qu'il fût pourtant très attaché à la publication de ses résultats (il a signé ou cosigné plus de 1 500 articles de mathématiques). D'autres l'ont refaite un peu plus tard.

La conjecture des arbres gracieux est importante non seulement parce qu'il est rageant d'être face à un énoncé aussi simple qui résiste, mais également parce que sa démonstration conduirait à prouver une autre jolie conjecture, qui attend elle aussi depuis cinquante ans.

Alexander Rosa a démontré que si A est un arbre gracieux quelconque à n nœuds, alors le graphe complet K_{2n-1} ($2n-1$ nœuds dont chacun est lié à tous les autres) se décompose en $2n-1$ copies de A (voir l'encadré page 81).

La conjecture « Pour tout arbre A à n nœuds, le graphe complet K_{2n-1} se décompose en $2n-1$ copies de A », dénommée conjecture de Ringel, serait donc prouvée si l'on démontrait la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa affirmant que tout arbre est gracieux. Ce n'est pour l'instant pas le cas.

Notons que si la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa entraîne la conjecture de décomposition, l'inverse n'est pas vrai : certains arbres A à n nœuds pourraient ne pas être gracieux bien que K_{2n-1} se décompose en copies de A .

On imagine mal à quel point le travail des mathématiciens confrontés à des problèmes de ce type est intense, déterminé et consciencieux. Dans le cas des conjectures qui nous intéressent, la possibilité d'obtenir des résultats partiels (par exemple en établissant qu'une certaine classe de graphes est gracieuse ou non) a conduit à une multiplication des travaux. Plus de 2 000 articles de recherche sur le sujet des numérotations et décompositions de graphes ont été publiés depuis celui d'Alexander Rosa paru en 1967.

Un résumé des résultats est régulièrement mis à jour. Ce document recense les références des publications et énonce sans démonstration les résultats principaux du domaine. La dernière version de ce résumé, proposée par l'Américain Joseph Gallian