

les graphes chenilles. Pourtant, depuis cinquante ans, personne n'a jamais proposé une preuve du résultat attendu pour les arbres, qui reste l'une des conjectures les plus troublantes des mathématiques.

Les calculs réalisés en 1998 à l'ordinateur par Robert Aldred, de l'université d'Otago en Nouvelle-Zélande, et Brendan McKay, de l'université nationale australienne à Canberra, ont montré que tous les arbres ayant au plus 26 nœuds sont gracieux (il existe 279 793 450 arbres à 26 nœuds). Depuis, d'autres programmes ont confirmé la conjecture pour les 14 830 871 802 arbres à 30 nœuds, les 2 262 366 343 746 arbres à 35 nœuds et les 363 990 257 783 343 arbres à 40 nœuds.

Les graphes disgracieux

De nombreux graphes sont gracieux, mais ils ne le sont pas tous. Les graphes non gracieux ou « disgracieux » les plus petits sont donnés en bas de l'encadré page 80.

Démontrer qu'un graphe est disgracieux est intéressant et parfois difficile. Nous allons détailler deux petits résultats permettant de prouver que de nombreux graphes sont disgracieux.

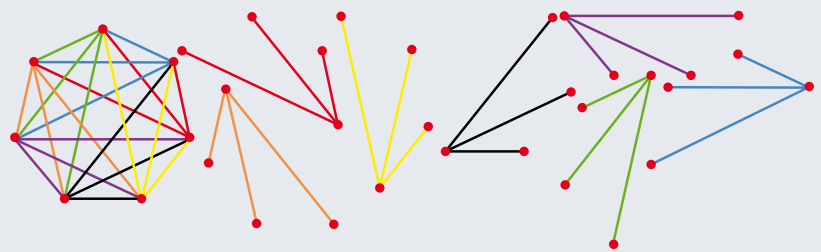
Le premier résultat affirme : « Si un graphe G à n arcs est gracieux, alors l'ensemble de ses nœuds peut être séparé en deux sous-ensembles disjoints P et I , tels que le nombre d'arcs reliant un nœud de P à un nœud de I est exactement $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. » La notation $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière : $\lfloor 1,22 \rfloor = 1$, $\lfloor 4,5 \rfloor = 4$, etc. Par exemple, si G comporte 6 arcs et s'il est gracieux, alors il existe une séparation des nœuds en deux sous-ensembles disjoints P et I qui sont liés par exactement 3 arcs.

La démonstration est assez simple. Si G est gracieux, on peut numérotiser ses nœuds avec des entiers compris entre 0 et n de telle façon que les arcs soient numérotés 1, 2, ..., n . Notons P l'ensemble des nœuds numérotés par des entiers pairs, et I celui des nœuds numérotés par des entiers impairs. Chaque arc numéroté par un entier impair établit un lien entre un nœud de P et un nœud de I , car la différence des numéros des extrémités d'un arc ne peut être impaire

Décomposition d'un graphe complet

Dans un graphe dit complet, chaque nœud est relié à tous les autres. Le graphe complet à 7 nœuds comporte 21 arcs. Il peut se décomposer en 7 graphes élémentaires tous identiques à une étoile à trois branches (un arbre, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle, à 4 nœuds).

Plus généralement, on conjecture qu'un graphe complet à $2n+1$ nœuds se décompose en $2n+1$ copies de l'arbre A , quel que soit l'arbre A à n nœuds. Cette conjecture sera démontrée si l'on réussit à démontrer la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa qui affirme que tout arbre est gracieux. Depuis cinquante ans, les mathématiciens cherchent à démontrer ces deux conjectures.



que si l'une des extrémités est paire et l'autre impaire. Seuls ces arcs impairs établissent de tels liens. Or parmi les entiers 1, 2, ..., n , il y a exactement $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ entiers impairs, ce qui prouve l'énoncé.

Le second résultat concerne les graphes eulériens, autrement dit les graphes connexes dont chaque nœud a un nombre pair d'arcs incidents. Ces graphes ont la propriété qu'on peut en parcourir tous les arcs par un chemin revenant à son point de départ et empruntant chaque arc une fois exactement. Dans le premier article sur le sujet, Alexander Rosa a démontré que si le nombre d'arcs d'un graphe eulérien est de la forme $n=4k+1$ ou $n=4k+2$, alors il est disgracieux.

La démonstration se fonde sur le premier résultat. Supposons qu'un tel graphe G soit gracieux et montrons que cela conduit à une contradiction. En parcourant un chemin eulérien de G qui revient à son point de départ, on passe d'un nœud pair P à un nœud impair I à chaque fois qu'on passe par un arc numéroté par un nombre impair, c'est-à-dire exactement $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ fois. Or si $n=4k+1$, on a $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lfloor (4k+2)/2 \rfloor = \lfloor 2k+1 \rfloor = 2k+1$; et si $n=4k+2$, on a $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lfloor (4k+3)/2 \rfloor = \lfloor 2k+1+1/2 \rfloor = 2k+1$. À chaque fois, le résultat est un

nombre impair, ce qui est impossible puisque le chemin eulérien revient à son point de départ et donc relie un nombre pair de fois un nœud pair P à un nœud impair I .

Ce résultat s'applique aux deux premiers et deux derniers graphes de la figure f dans l'encadré page 80. Il montre plus généralement que les graphes en anneaux (des arcs $a_1, a_2, \dots, a_n$ liés pour former un cercle $a_1-a_2, a_2-a_3, \dots, a_{n-1}-a_n, a_n-a_1$) ne sont jamais gracieux si $n=4k+1$ ou $n=4k+2$, car, bien sûr, de tels graphes sont eulériens. Le résultat s'applique aussi à ces mêmes anneaux ayant au départ $n=4k+1$ ou $4k+2$ arcs dont on fusionne deux nœuds une ou plusieurs fois, comme par exemple le graphe obtenu en prenant trois triangles qu'on colle les uns aux autres en fusionnant des sommets (figure $f6$ dans l'encadré page 80).

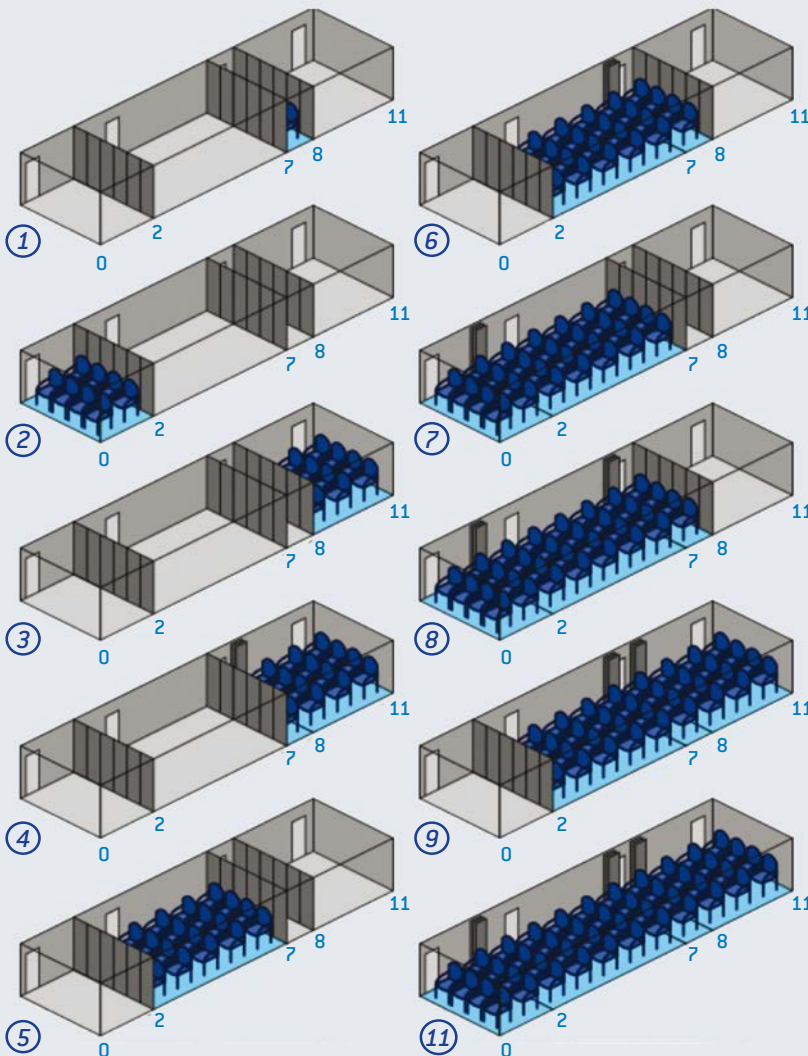
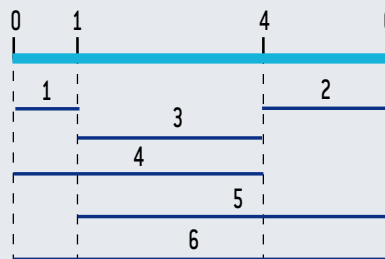
Une modestie d'Erdős ?

Chez les graphes, être disgracieux est en réalité le triste lot de presque tous. Le mathématicien hongrois Paul Erdős a en effet démontré que la proportion de graphes disgracieux parmi les graphes à n nœuds augmente quand n tend vers l'infini, et que cette proportion tend vers 100 %. En construi-

Les règles de Golomb

La règle considérée par Solomon Golomb ne comporte que 4 graduations et permet cependant de mesurer les longueurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 (voir le schéma ci-dessous). Il n'existe pas de règles équivalentes comportant 5 graduations et permettant de mesurer toutes les longueurs entières de 1 à 10.

Les règles « optimales » de Golomb sont celles qui, pour un entier n donné, sont les plus courtes et telles que les distances entre deux marques sont toutes différentes. Elles sont utiles dans diverses applications. Par exemple, avec seulement 3 murs escamotables, une salle de spectacle est modulable en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 11 rangées de fauteuils (nombres entourés, ci-dessous).



https://en.wikipedia.org/wiki/Golomb_ruler

sant au hasard un graphe ayant un grand nombre de nœuds, il est donc très probable qu'il soit disgracieux. Assez curieusement, Erdős n'a pas publié sa démonstration, bien qu'il fût pourtant très attaché à la publication de ses résultats (il a signé ou cosigné plus de 1 500 articles de mathématiques). D'autres l'ont refaite un peu plus tard.

La conjecture des arbres gracieux est importante non seulement parce qu'il est rageant d'être face à un énoncé aussi simple qui résiste, mais également parce que sa démonstration conduirait à prouver une autre jolie conjecture, qui attend elle aussi depuis cinquante ans.

Alexander Rosa a démontré que si A est un arbre gracieux quelconque à n nœuds, alors le graphe complet K_{2n-1} ($2n-1$ nœuds dont chacun est lié à tous les autres) se décompose en $2n-1$ copies de A (voir l'encadré page 81).

La conjecture « Pour tout arbre A à n nœuds, le graphe complet K_{2n-1} se décompose en $2n-1$ copies de A », dénommée conjecture de Ringel, serait donc prouvée si l'on démontrait la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa affirmant que tout arbre est gracieux. Ce n'est pour l'instant pas le cas.

Notons que si la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa entraîne la conjecture de décomposition, l'inverse n'est pas vrai : certains arbres A à n nœuds pourraient ne pas être gracieux bien que K_{2n-1} se décompose en copies de A .

On imagine mal à quel point le travail des mathématiciens confrontés à des problèmes de ce type est intense, déterminé et consciencieux. Dans le cas des conjectures qui nous intéressent, la possibilité d'obtenir des résultats partiels (par exemple en établissant qu'une certaine classe de graphes est gracieuse ou non) a conduit à une multiplication des travaux. Plus de 2 000 articles de recherche sur le sujet des numérotations et décompositions de graphes ont été publiés depuis celui d'Alexander Rosa paru en 1967.

Un résumé des résultats est régulièrement mis à jour. Ce document recense les références des publications et énonce sans démonstration les résultats principaux du domaine. La dernière version de ce résumé, proposée par l'Américain Joseph Gallian

en 2015, s'étend sur 389 pages et donne les références de 2012 articles !

Poursuivons nos questions à propos des graphes complets à n nœuds, notés K_n . Le nombre d'arcs du graphe K_n est égal à $n(n-1)/2$: chaque nœud est lié à $n-1$ autres (rappelons qu'on interdit les arcs liant un nœud à lui-même), ce qui fait un total de $n(n-1)$ liens, qu'il faut diviser par 2 puisque l'arc AB est considéré identique à l'arc BA. On démontre que K_n n'est gracieux que si $n = 1, 2, 3$ ou 4.

Les graphes complets et les règles de Golomb

C'est bien dommage, car cela aurait permis de fabriquer d'élégantes règles de mesure comportant peu de graduations. Considérons par exemple la numérotation qui rend gracieux le graphe K_4 . Ses nœuds sont numérotés 0, 1, 4, 6. Les arcs, eux, sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6. En plaçant les nœuds sur une règle et les disposant de façon que les nœuds soient à distance 0, 1, 4 et 6 d'un repère initial, on obtient une règle n'ayant que 4 graduations et qui peut toutefois mesurer les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6 (voir l'encadré page ci-contre).

Si le graphe K_5 , qui comporte 10 arcs, avait été gracieux, on aurait pu construire une règle à 5 graduations permettant de mesurer les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Une telle règle n'existe pas. On peut chercher à s'en approcher en essayant de placer n marques sur une règle en des positions entières, de telle façon que les distances entre deux marques soient toujours différentes. Bien sûr, le système de n marques conduisant à la règle la plus courte (celle dont les deux graduations extrêmes sont les plus rapprochées) donne la règle la plus intéressante. C'est ce qu'on dénomme la « règle optimale de Golomb d'ordre n ». Elle porte le nom du mathématicien américain Solomon Golomb, qui s'est intéressé à tous ces problèmes et à bien d'autres, et qui est décédé tout récemment, le 1^{er} mai 2016.

Pour 5 marques, il y a en fait deux graduations optimales : celle où on place les marques en 0, 1, 4, 9, 11 et celle où elles sont en 0, 2, 7, 8, 11. On peut grâce à elle

fabriquer une règle à 5 graduations qui mesure toutes les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 (il manque 10). Cela permet alors de concevoir une salle de réunion ayant trois murs escamotables et qui pourra recevoir $k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 7k, 8k, 9k$ ou $11k$ personnes selon les murs utilisés, où k est le nombre de chaises de chaque rangée (voir l'encadré page ci-contre).

La recherche des règles optimales de Golomb est particulièrement difficile et de nombreuses heures d'ordinateur y ont été consacrées. Des tableaux de records sont établis. Démontrer que les règles figurant dans ces tableaux de records ne peuvent être améliorées exige un travail supplémentaire, qui n'a pas pu être mené très loin faute d'une théorie puissante de ces structures combinatoires.

Aujourd'hui, on connaît avec certitude les règles optimales de Golomb pour 1 à 27 graduations. Leur longueur est donnée en bleu, entre parenthèses :

1 [0], 2 [1], 3 [3], 4 [6], 5 [11], 6 [17], 7 [25], 8 [34], 9 [44], 10 [55], 11 [72], 12 [85], 13 [106], 14 [127], 15 [151], 16 [177], 17 [199], 18 [216], 19 [246], 20 [283], 21 [333], 22 [356], 23 [372], 24 [425], 25 [480], 26 [492], 27 [553].

Le dernier progrès est daté du 19 février 2014. Il a permis de prouver que pour 27 graduations, les positions suivantes donnent la règle optimale :

0-3-15-41-66-95-97-106-142-152-220-221-225-242-295-330-338-354-382-388-402-415-486-504-523-546-553.

La théorie des graphes, dont l'essentiel des développements a moins d'un siècle, rencontre comme l'arithmétique d'étranges problèmes aux énoncés simples dont les démonstrations sont soit très longues, comme le « Théorème des mineurs » (voir cette rubrique dans *Pour la Science* d'avril 2008), soit introuvables, comme les deux conjectures que nous venons d'évoquer. Pourquoi ? C'est assez mystérieux, mais cela montre que les formalismes que nous utilisons (des axiomes et des règles pour les manipuler) et qui nous semblent puissants et généraux, sont en réalité faibles et n'accèdent efficacement qu'à la surface du monde mathématique.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

Wikipédia, Règles de Golomb
(consulté en mai 2016) :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Règle_de_Golomb

D. Anick, Counting graceful
labelings of trees : A theoretical
and empirical study, *Discrete
Applied Mathematics*, vol. 198,
pp. 65-81, 2016.

J. Gallian, A Dynamic Survey
of Graph Labeling, 2015 :
[www.combinatorics.org/ojs/index.
php/eljc/article/view/DS6/pdf](http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS6/pdf)

M. M. Al Aziz et al., Graceful
labeling of trees : Methods and
applications, 17th International
Conference on Computer and
Information Technology (ICCIIT),
2014 (<http://bit.ly/2a8ewoG>).

K. Drakakis, A review of the
available construction methods
for Golomb rulers, *Advances in
Mathematics of Communications*,
vol. 3(3), pp. 235-250, 2009.



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

L'imaginaire à la carte

Les cartes de mondes fictifs rivalisent parfois de réalisme avec celles de régions terrestres bien réelles. Elles fourmillent de détails et racontent, à leur façon, une part de l'histoire de leur univers.

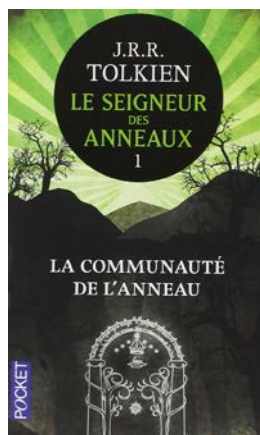
Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Illustration : Marc BOULAY

Dans la version française de l'encyclopédie Wikipédia, la description géographique du continent de Westeros est plus longue et détaillée (plus de 6 000 mots) que celle du Danemark (3 724 mots seulement), où vivent également des monarques ou des princesses. La différence est que Westeros est un lieu imaginaire tiré des romans de George R. R. Martin, adaptés à la télévision avec la série *Game of Thrones*. La carte de ce monde, minutieusement décrite dans le générique de chaque épisode, plante le décor où se déroule l'action et renforce la crédibilité de cette fiction. C'est un procédé classique dans les histoires médiévales-fantastiques : déjà en 1937, dans son premier roman *Bilbo le Hobbit*, John R. R. Tolkien avait lui-même dessiné la carte de la Terre du Milieu. Ce continent devenu mythique est aussi le siège de l'action du *Seigneur des Anneaux* (1954-1955).

Les cartes, ces « outils géographiques par excellence », pour reprendre l'expression du géographe Jean-Benoît Bouron, définissent des lieux, qu'ils soient réels ou imaginaires. Outre les informations souvent multiples qu'elles délivrent – topographiques mais aussi climatiques, écologiques, géologiques, géopolitiques, etc. – les cartes racontent leurs propres histoires.

En 1992, William Sarjeant, professeur de géologie à l'université du Saskatchewan, au Canada, s'est appuyé sur la carte et les écrits de Tolkien pour reconstruire l'histoire géolo-



© Pocket, un département d'Univers Poché, pour la présente édition.

JOHN R. R. TOLKIEN a lui-même dessiné la carte du monde où évoluent les personnages du *Seigneur des Anneaux* et de *Bilbo le Hobbit*. Cette carte, avec ses nombreux détails, rappelle celles dressées par les grands explorateurs du XV^e et du XVI^e siècles.

gique de la Terre du Milieu ! Avec ses monstres et ses sirènes soigneusement dessinés dans les mers, sa rose des vents très élaborée ainsi que son style graphique tiré des mappemondes des siècles des grandes découvertes, cette carte témoigne des inspirations tantôt médiévale, tantôt art nouveau ou même folklorique de l'auteur, qui était professeur de philologie à l'université de Leeds. Les toponymes utilisés – tel The Shire (le Comté, où vivent les Hobbits) – trahissent aussi l'affiliation britannique de Tolkien (les mêmes Hobbits sont d'ailleurs souvent vus comme des caricatures de la bourgeoisie anglaise).

La carte de l'île mystérieuse du roman éponyme de Jules Verne (1875) présente des toponymes très évocateurs : promontoire du Reptile, golfe du Requin, caverne des Jaguars. Les figurés sont conventionnels pour l'époque : les reliefs y sont symbolisés par des tirets (dont la densité est proportionnelle à la pente), des ondes de vagues s'étirent le long des côtes, les plages et les dunes sont représentées par des pointillés et les forêts par des figurés moutonneux. Cette représentation imaginaire semble directement inspirée de la carte des îles Auckland, un archipel bien réel situé au sud de la Nouvelle-Zélande, et dont l'exploration des terres désolées n'était pas inconnue de Jules Verne.

Mais alors comment démêler le vrai du faux ? Il n'est parfois pas évident de reconnaître une géographie imaginaire : leurs auteurs prennent soin d'utiliser des codes graphiques bien adaptés pour brouiller les