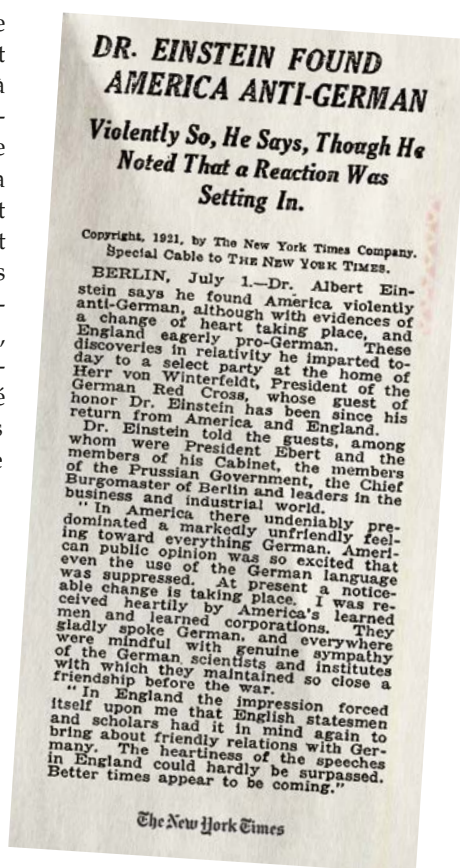


jour après jour, les différents épisodes de cette volte-face. La série commence début janvier 1931, lorsque Einstein se rendit à l'institut de technologie de Californie (Caltech) dans le but de tester son hypothèse cosmologique, fondée sur sa théorie de la relativité générale et dont le postulat était que l'Univers est homogène, courbe et statique. Les observations des astronomes américains Edwin Hubble et Milton Humason au mont Wilson, deux ans auparavant, avaient en effet mis en cause l'Univers statique. Les deux physiciens avaient observé que la lumière provenant des nébuleuses distantes subit un décalage vers le rouge proportionnel à leur distance par rapport à la Terre, ce qui avait conduit à la loi de Hubble, énoncée ainsi dans le *New York Times* du 31 décembre 1930 : « Les nébuleuses sont toutes en train de s'éloigner de nous, et plus elles sont loin, plus elles s'éloignent rapidement. » Dès le 3 janvier, première annonce d'Einstein dans une interview au *New York Times* : « Les nouvelles observations faites par Hubble et Humason [...] laissent supposer que la structure générale de l'Univers n'est pas statique. »

Et le 6 février, le physicien Leigh Page confiait au quotidien que « les travaux effectués sur la côte Ouest et les observations du mont Wilson ont convaincu le Dr Einstein que le concept d'un univers statique n'est pas défendable ». Deux jours plus tard, le journal annonçait que la vision cosmologique d'Einstein avait complètement changé : « Après avoir visité l'observatoire et après qu'un vétéran de 42 ans de l'American Expeditionary Forces [Hubble] lui a montré des photographies d'objets se trouvant à une distance de la Terre encore plus incompréhensibles que ses formules mathématiques, le professeur Einstein a annoncé mercredi dernier qu'il avait abandonné son concept initial de l'Univers. »

Faisant fi des traditions académiques, ce n'est que le 11 février qu'Einstein exposa son revirement devant un groupe d'astronomes et de physiciens et discuta avec eux des conséquences du décalage vers le rouge des nébuleuses lointaines sur la conception de l'Univers. Puis, le 26 juin, après son retour à Berlin, il présenta sa nouvelle conception cosmologique lors d'une conférence universitaire : un univers dynamique en expansion, qui se contractera au-delà d'une certaine limite.



« EINSTEIN trouve l'Amérique antiallemande », lit-on dans le *New York Times* du 2 juillet 1921. Dans la suite de l'article, le physicien précise qu'« à l'heure actuelle, un changement notable est en cours » et qu'il fut « reçu chaleureusement par les savants Américains », mais il mit quand même l'Amérique en émoi.

■ BIBLIOGRAPHIE

J.-M. Ginoux, *Albert Einstein : une biographie à travers le temps*, Hermann, 2016.

S. Bergia, *Einstein, le père du temps moderne*, Belin, 2004.

J. Eisenstaedt, *Einstein et la relativité générale*, CNRS Éditions, 2002.

A. Pais, *Subtle is the Lord, The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, 1982 (rééd. 2005).

R. W. Clark, *Einstein, the Life and Times*, Hodder and Stoughton, 1973.

Pourquoi Einstein exposa-t-il sa démarche scientifique à la presse ? Est-ce pour rechercher un quelconque retentissement médiatique ou simplement dans une volonté de transparence sur ce qu'il considérait comme une vérité scientifique ? Difficile de répondre, mais une chose est sûre : Einstein voulait être le maître du jeu, comme le montre sa réaction outragée à la fuite orchestrée de la publication du paradoxe EPR, trois ans plus tard.

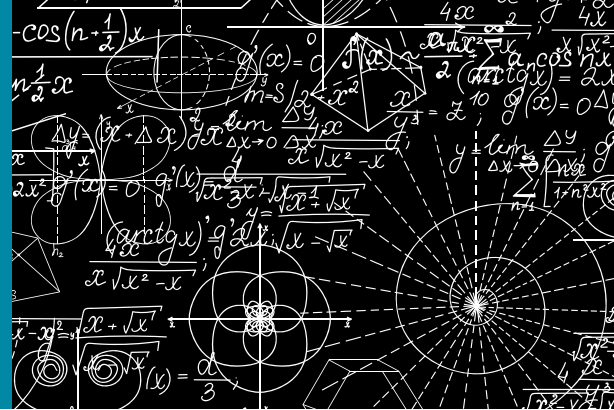
Podolsky n'aurait pas dû

Bien qu'il ait été à l'origine du développement de la mécanique quantique au début du XX^e siècle, Einstein chercha tout au long de sa vie à prouver, au moyen de ses célèbres expériences de pensée, l'incomplétude de cette théorie, refusant son caractère probabiliste qui impliquait de renoncer au déterminisme sur lequel toute la physique avait été construite jusqu'alors. Aussi, avec deux collègues, Boris Podolsky et Nathan Rosen, il publia le 15 mai 1935, dans une revue spécialisée, un article intitulé *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* (La description de la réalité physique grâce à la mécanique quantique peut-elle être considérée comme complète ?) qui fit couler beaucoup d'encre sous le nom de paradoxe EPR. Mais deux semaines avant la publication officielle de cet article, Podolsky révéla son contenu au *New York Times*, qui le présenta ainsi : « Einstein attaque la théorie des quanta. »

Einstein, pris de court, fut très contrarié par l'attitude de Podolsky et adressa aussitôt une lettre de désapprobation au *New York Times*, que le quotidien rapporta en ces mots : « Einstein fait une déclaration. Il affirme ne pas avoir autorisé le rapport sur la théorie des quanta. » Dans sa déclaration, le physicien, qui ne manquait pas de culot en l'occurrence, précisait qu'il avait l'habitude de ne discuter de sujets scientifiques que dans les lieux appropriés et qu'il désapprouvait les annonces de prépublications dans la presse généraliste !

Cet épisode houleux des rapports entre le *New York Times* et le père de la relativité ne mit pas un point final à leur relation, comme on l'a vu. Car le quotidien, qui contribua grandement à faire d'Einstein une légende, sut toujours user et abuser de la figure emblématique ainsi créée pour entretenir, année après année, l'intérêt de ses lecteurs. ■

INDISPENSABLES MATHÉMATIQUES



Quinze pour cent du PIB et neuf pour cent des emplois sont impactés directement par les mathématiques. C'est dire l'importance de cette discipline pour l'économie française comme l'a mesuré pour la première fois l'Étude sur l'Impact Socio-Économique des Mathématiques en France (EISEM), publiée au printemps 2015. De fait, rendues incontournables par l'avènement de l'ère numérique, les mathématiques irriguent tous les secteurs de l'économie, se nichent au cœur de révolutions telles que l'intelligence artificielle, interviennent dans la compréhension de problèmes majeurs de notre époque, comme ceux liés au développement durable, au climat, à la santé. Et transforment désormais notre quotidien... Aujourd'hui, il n'y a pas de véritable innovation sans mathématiques en arrière-plan. Un enjeu de développement dont doivent s'emparer étudiants, entrepreneurs et décideurs.

Un colloque pour débattre des mathématiques et du monde de demain

MATHÉMATIQUES, oxygène du numérique

20 et 21 octobre 2016
campus de l'UPMC SORBONNE
UNIVERSITÉS (Jussieu), Paris 5^e



Programme : www.mathoxynum.fr

 : mathoxynum

La science s'écrit en langage mathématique : informatique, physique, biologie, économie, sciences sociales... les applications se multiplient, les frontières s'estompent, l'interdisciplinarité prospère. Les mathématiques s'invitent partout, rendues d'autant plus incontournables avec l'avènement de l'ère numérique et le fameux « Big Data ». Quant aux mathématiciens, ils sont sollicités dans des domaines de plus en plus variés et voient leurs carrières évoluer entre le monde académique et le secteur privé.

Comment les mathématiques repoussent-elles ces frontières ?
Comment dessinent-elles le monde de demain ?
Quels sont les domaines à défricher ?
Quels sont les enjeux éthiques et sociétaux à débattre ?

Ce colloque est organisé par l'institut Henri Poincaré (IHP), la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP), l'Agence pour les Mathématiques en Interaction avec les Entreprises et la Société (AMIES), accompagnés de leurs partenaires.



Des événements à retenir

- Les Rendez-Vous Carnot 2016, les 5 et 6 octobre, au Double Mixte à Villeurbanne : tous les laboratoires adhérant à la charte Carnot, qui facilite les relations entre laboratoires de recherche publique et entreprises, y seront, dont l'Agence Maths-Entreprises AMIES.
- Le PhD Talent Fair, le 21 octobre 2016, au Centquatre, Paris 19^e : « The PhD Market place for all disciplines ». AMIES y sera.
- Le Forum Emploi-Maths 2016, l'événement référent pour les relations Entreprises-Mathématiciens, le 15 décembre 2016 à la Cité des Sciences de La Villette. Les entreprises y recrutent, les étudiants et PhD en maths y pullulent.



Des Laboratoires d'Excellence

Les mathématiques disposent sur l'ensemble du territoire d'un important réseau de structures les reliant aux entreprises et à la société. Leurs actions sont nationales et internationales. Parmi celles-ci, les LabEx préfigurent les nouvelles passerelles entre recherche, formation et monde économique, telles que voulues par les Investissements d'Avenir. Deux exemples pour mieux comprendre l'importance de ces laboratoires.

Le LabEx CEMPI

Englobant recherche, formation et transfert technologique, le LabEx CEMPI – Centre Européen pour les Mathématiques, la Physique et leurs Interactions – est porté par deux laboratoires de l'université de Lille 1 : le PhLAM (Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules) et le laboratoire Paul Painlevé. Fort de 120 chercheurs et enseignants-chercheurs, il réunit un large spectre de compétences en mathématiques pures et appliquées, physique théorique et expérimentale ainsi qu'en transfert technologique dans les fibres optiques. Il travaille en étroite collaboration avec l'Equipe FLUX, qui exploite la centrale de fabrication de fibre optique la plus complète de France.

Le haut débit en lumière

La recherche au CEMPI est centrée sur des thématiques à l'intersection entre les mathématiques, la physique, la biologie et l'informatique. À titre d'exemple, nos chercheurs étudient la propagation de la lumière dans les fibres optiques et font varier le diamètre de la fibre pour engendrer des effets physiques nouveaux et inventer de nouvelles manières de transmettre de l'information dans une fibre.

Dans le domaine des sciences du vivant, les chercheurs du CEMPI collaborent avec l'institut Pasteur de Lille afin de mieux comprendre et contrôler les dysfonctionnements induits par les problèmes de coordination entre l'horloge biologique et le métabolisme.

Le CEMPI se distingue également en recherche fondamentale : en témoignent ses succès dans la théorie des nombres et la géométrie, ses distinctions ERC, sa médaille de bronze du CNRS et son prix Leconte de l'Académie des sciences. Et, en ce qui concerne la formation, le CEMPI accueille et finance également des étudiants stagiaires en master, des doctorants et post-doctorants.

Des vocations industrielles et internationales

Le CEMPI a noué de nombreuses collaborations industrielles, à l'instar du laboratoire commun avec Draka (Prysmian), le premier fabricant mondial de câbles optiques et d'un laboratoire de recherche conventionnée avec le CEA CESTA. Il met également l'accent sur les collaborations de recherche et de formation avec des centres de recherche et des universités de premier plan à l'étranger.



Le LabEx Archimède

Archimède fait partie depuis 2012 de l'IDEX A*MIDEX d'Aix-Marseille Université. Il dynamise les activités de recherche, de formation à la recherche et de valorisation en mathématiques et en informatique. Il s'appuie sur 4 laboratoires d'environ 300 chercheurs permanents et sur le CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques). Outil majeur de la communauté française qui n'a que deux équivalents dans le monde, ce dernier accueille une rencontre internationale par semaine.

L'interdisciplinarité maths-info

Le LabEx Archimède finance des conférences, écoles et programmes de recherche en résidence permettant d'inviter des chercheurs internationaux sur des périodes de plusieurs mois. Il offre des bourses (master 2, doctorat et post-doctorat) attirant des étudiants de tous les continents sur le critère de l'excellence académique. Il favorise l'interdisciplinarité grâce à des bourses à l'interface entre l'informatique et les mathématiques. Il représente un excellent levier et nombre d'étudiants d'Archimède ont obtenu des emplois permanents dans le monde entier.

Une valorisation industrielle et grand public

Le LabEx Archimède développe un programme innovant de valorisation, transmission des compétences et transfert de technologie. Il offre des formations professionnelles pour des chercheurs d'autres domaines ou du monde extra-académique. Il est le point d'entrée privilégié de la SATT Sud-Est. Archimède a organisé avec AMIES deux Semaines d'Études entre étudiants et industriels, certains sujets ayant débouché sur un projet R&D et une mission doctorale d'expertise. Archimède soutient activement l'organisation par des étudiants et jeunes chercheurs de manifestations pour la diffusion des connaissances vers le grand public, comme les Treize Minutes de Marseille, les Journées Pi de l'association marseillaise Π -day, récompensée en 2016 par le prix D'Alembert de la SMF, ou encore en 2017 le congrès Math.en.Jeans de l'association marseillaise Maths pour Tous, lauréate du prix D'Alembert en 2014.

Ainsi, le LabEx Archimède est reconnu pour ses compétences et initiatives. Les mathématiques marseillaises sont régulièrement fort bien positionnées dans les classements internationaux et de nombreux chercheurs d'Archimède ont été récompensés par des bourses européennes ou des distinctions et prix internationaux.

LOGIQUE & CALCUL

Des indécidables à portée de main

Les énoncés dont on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais ni qu'ils sont faux semblent moins rares qu'on ne l'imaginait : de tels « indécidables », redoutés par les mathématiciens, ont été trouvés avec des problèmes portant sur de petites machines de Turing.

Jean-Paul DELAHAYE

Si un problème mathématique paraît assez simple, comme « Est-ce que, pour tout entier positif n , $4n^4 + 1$ est un nombre premier ? », le mathématicien ne doute pas qu'il saura le résoudre. Bien sûr, d'un mathématicien à l'autre, cette perception de ce qui est facile et de ce qui ne l'est pas change, et plus un mathématicien est compétent, plus nombreux sont les problèmes qu'il est capable de classer en « facile » ou « probablement difficile ».

Il se trouve cependant que même les meilleurs des mathématiciens sont impuissants à évaluer la difficulté de questions à l'apparence élémentaire. Fermat n'avait certainement pas imaginé combien il était difficile de démontrer qu'il n'y a pas de solution à l'équation $n^q + m^q = p^q$, où n , m , p désignent des entiers positifs et q un entier supérieur à 2. De graves obstacles sont dissimulés dans des énoncés d'allure innocente. Les problèmes les plus difficiles sont ceux qualifiés d'« indécidables ». Un jeu utile et délicat est de repérer les indécidables les plus simples dans le but de mieux comprendre où cette apparition d'obstacles graves risque de se produire. Identifier où se niche leur absolue difficulté fait progresser les mathématiques aussi bien que la résolution de problèmes.

Qu'est-ce que l'indécidabilité ? Un énoncé est indécidable dans une théorie donnée si celle-ci ne peut ni démontrer l'énoncé, ni démontrer sa négation. Bien sûr, pour établir que des énoncés sont

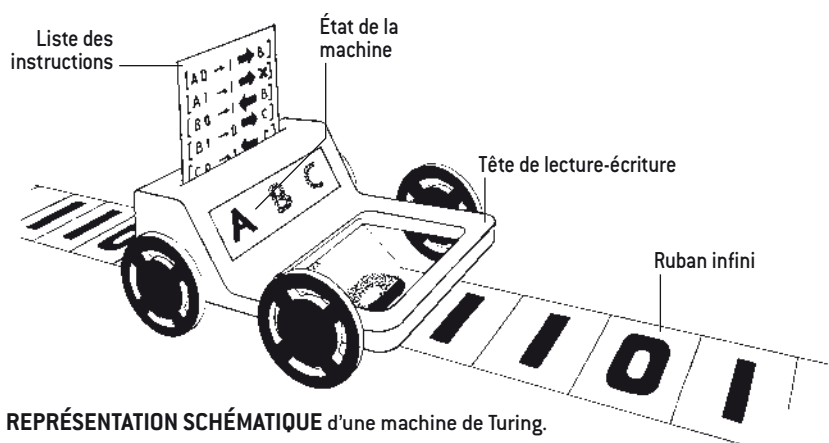
indécidables dans une théorie mathématique donnée T , il faut avoir très précisément défini cette théorie. Il faut aussi avoir acquis une maîtrise de ce qui s'y passe et, en particulier, il faut pouvoir prouver des théorèmes à propos des démonstrations !

C'est la tâche de la logique mathématique, parfois nommée métamathématique, puisqu'elle fournit une compréhension mathématique des mathématiques. Son développement aux XIX^e et XX^e siècles nous a permis de comprendre et de mesurer avec finesse le pouvoir déductif des théories.

Démontrer l'axiome des parallèles (par un point extérieur à une droite donnée D , il ne passe qu'une droite D' ne rencontrant pas D) ou sa négation à partir des autres axiomes de la géométrie du plan n'est pas possible. L'axiome des parallèles est un indécidable de la géométrie « de base », aussi

dénommée géométrie absolue, ou géométrie neutre. De même, démontrer l'« axiome du choix » et l'« hypothèse du continu » ou leur négation à partir des axiomes habituels de la théorie des ensembles est impossible. C'est un résultat obtenu en deux temps par l'Autrichien Kurt Gödel en 1938 et l'Américain Paul Cohen en 1963.

Mieux et beaucoup plus général : selon le premier théorème d'incomplétude de Gödel démontré en 1931, dès qu'une théorie mathématique T non contradictoire est capable de mener suffisamment de raisonnements arithmétiques (et c'est le cas de toutes les théories intéressantes), alors il existe des énoncés E qui ont un sens dans cette théorie et qui sont indécidables. Autrement dit, ni l'énoncé E lui-même, ni sa négation (non- E) ne sont démontrables dans T : la théorie est lacunaire, incomplète.



REPRÉSENTATION SCHÉMATIQUE d'une machine de Turing.

© P.L.S. Cassandra Vion

Plus précis, le second théorème d'incomplétude de Gödel établit que l'énoncé affirmant que la théorie T est non contradictoire est l'un des indécidables de T : une théorie n'a pas le pouvoir de démontrer d'elle-même qu'elle est non contradictoire... sauf si elle est contradictoire, auquel cas elle n'a aucun intérêt.

Ces formidables résultats de Gödel établissent que l'indécidabilité est toute proche des questions que l'on considère comme fondamentales, car la non-contradiction d'une théorie T est bien sûr la première des questions qu'on doit se poser quand on envisage cette théorie.

Cependant, ces énoncés ne sont simples que par leur sens : la non-contradiction d'une théorie est toujours assez complexe. On l'exprime souvent sous la forme : « Jamais une suite de formules obtenues en suivant les règles de raisonnement de la théorie ne conduira à la formule $0 = 1$. » Or traduire une telle affirmation en un énoncé arithmétique exige qu'on traduise d'abord les

règles de raisonnement de T , ce qui demande un travail délicat et long dénommé arithmétisation de la syntaxe et dont l'invention est due à Gödel.

Indécidabilité avec des énoncés simples ?

Pour évaluer la proximité de l'indécidabilité, les logiciens ont donc recherché des énoncés simples dont on puisse prouver l'indécidabilité. Récemment, de nouveaux résultats permettent d'évaluer le risque d'une rencontre avec un indécidable que certains mathématiciens considéraient comme improbable. Nous allons voir plus loin que l'énoncé concernant la fonction $s(n)$ de Radó, qui permettrait d'en connaître la valeur pour l'entier 1 919, est indécidable dans la puissante théorie classique des ensembles : $s(1\,919)$ est définitivement inconnaisable pour le mathématicien qui voudrait mener tout son travail avec la théorie classique des ensembles.

Pour expliquer ces nouveaux résultats, nous utiliserons les machines introduites par Alan Turing en 1936. Une machine de Turing est un automate qui peut se trouver dans un nombre fini d'états, par exemple l'état A, B ou C si ce nombre est 3. L'automate dispose d'un ruban découpé en cases. Sur le ruban, la tête de lecture-écriture de la machine lit et écrit des symboles qui viennent éventuellement effacer des symboles déjà inscrits. La machine n'a accès qu'à une seule case à la fois et déplace sa tête de lecture-écriture d'une case dans un sens ou dans l'autre. Elle parcourt ainsi le ruban pour y opérer un calcul.

Le programme de la machine est une liste finie d'instructions. Chacune est du type $[A \ 0 \rightarrow 1 \text{ droite } B]$ qui signifie : « Quand je suis dans l'état A, que je lis 0 dans la case que je suis en train d'examiner, alors j'écris 1 dans cette case, je déplace la tête de lecture-écriture d'une case vers la droite et je passe dans l'état B. »

Le castor affairé à 3 états

Un castor affairé à n états est une machine de Turing à n états qui fonctionne le plus longtemps possible (pour une machine à n états) et qui s'arrête.

Le programme du castor affairé à 3 états comporte 6 instructions. Il a été trouvé par Tibor Radó. Il écrit cinq « 1 » successifs et fonctionne 21 fois avant de s'arrêter.

Aucune machine de Turing à 3 états ne fonctionne plus de 21 fois avant de s'arrêter, sauf si elle ne s'arrête jamais.

Les 6 instructions du programme du castor affairé à 3 états sont les suivantes :

- [A $0 \rightarrow 1$ droite B],
- [A $1 \rightarrow 1$ droite ARRÊT],
- [B $0 \rightarrow 1$ gauche B],
- [B $1 \rightarrow 0$ droite C],
- [C $0 \rightarrow 1$ gauche C]
- [C $1 \rightarrow 1$ gauche A].

Voici comment il faut lire ce programme et le faire fonctionner. La machine (comme celle schématisée page ci-contre) est posée sur un ruban recouvert de 0 doublement infini (vers la droite et vers la gauche).

Supposons-la dans l'état A, et que sa tête de lecture-écriture lit un 0. L'instruction à appliquer est donc la première instruction [A $0 \rightarrow 1$ droite B] de son programme,

qui indique que le 0 lu doit être remplacé par un 1, que la tête de lecture-écriture doit se déplacer d'une case vers la droite, et que le nouvel état de la machine doit être B. On a ainsi, en supposant que la machine débute sa lecture à la quatrième case et en marquant en rouge la position de la tête de lecture-écriture :

État initial

A - 00000000000000000000000000000000...

État atteint

B - 00010000000000000000000000000000...

La machine est maintenant dans l'état B et lit un 0. Elle applique donc la 3^e instruction [B $0 \rightarrow 1$ gauche B], ce qui conduit à la situation :

B - 00011000000000000000000000000000...

Le calcul se poursuit alors. Voici l'ensemble du calcul jusqu'à l'arrêt :

```
A - 00000000000000000000000000000000...
B - 00010000000000000000000000000000...
B - 00011000000000000000000000000000...
C - 00001000000000000000000000000000...
A - 00001000000000000000000000000000...
B - 00011000000000000000000000000000...
C - 00010000000000000000000000000000...
C - 00010100000000000000000000000000...
C - 00011000000000000000000000000000...
A - 00011000000000000000000000000000...
B - 00111000000000000000000000000000...
C - 00101000000000000000000000000000...
A - 00101000000000000000000000000000...
B - 00111000000000000000000000000000...
C - 00110100000000000000000000000000...
A - 00110100000000000000000000000000...
B - 00111000000000000000000000000000...
C - 00110100000000000000000000000000...
A - 00110100000000000000000000000000...
B - 00111000000000000000000000000000...
C - 00111000000000000000000000000000...
C - 00111010000000000000000000000000...
C - 00111100000000000000000000000000...
A - 00111100000000000000000000000000...
ARRÊT - 00111110000000000000000000000000...
```