

Des Laboratoires d'EXcellence

Les mathématiques disposent sur l'ensemble du territoire d'un important réseau de structures les reliant aux entreprises et à la société. Leurs actions sont nationales et internationales. Parmi celles-ci, les Labex préfigurent les nouvelles passerelles entre recherche, formation et monde économique, telles que voulues par les Investissements d'Avenir. Deux nouveaux exemples pour mieux comprendre l'importance de ces laboratoires.

Le LabEx LMH

Quand, de Paris, on s'aventure vers le sud, on passe au large du plateau de Saclay. Bien que la dénomination évoque des immensités désertiques, le périmètre de Paris-Saclay compte plus de 400 mathématiciens permanents, rassemblés au sein de la Fondation Mathématique Jacques Hadamard (FMJH) et du LabEx Mathématique Hadamard.

Attirer des talents

Le plateau de Saclay est en chantier, une ville est en construction, autour d'un nouveau type d'université. À la pointe de ce mouvement, la FMJH a bâti une unique mention de master et une unique école doctorale de mathématiques, à partir de la nuée de formations dispersées dans 18 établissements. Ce regroupement facilite le recrutement d'étudiants à l'étranger. Ces derniers bénéficient d'un système de bourses auquel la FMJH et son LabEx LMH consacrent la quasi-totalité de leurs ressources, et d'un accueil personnalisé. Les réseaux internationaux (Brésil, Chine), en facilitant les déplacements de chercheurs, renforcent les collaborations et consolident les flux d'étudiants venus des pays émergents.



Irriguer les entreprises

L'insertion professionnelle des étudiants, notamment dans le privé, est au cœur des préoccupations. Aux côtés de nombreux partenaires, la FMJH s'investit dans le Forum de l'Emploi Mathématique, le 15 décembre.

La même intention anime la FMJH dans ses relations avec les entreprises. Le Programme Gaspard Monge pour l'Optimisation et la Recherche Opérationnelle (PGMO) est un dispositif de mécénat orienté proposé aux entreprises. Il est né en 2012 à l'initiative d'EDF. Il a un caractère novateur : en acceptant de rendre publics des problèmes mathématiques identifiés par ses équipes de recherche comme des verrous, et avec un apport financier, EDF a pu féconder une vaste communauté académique internationale et la rapprocher de ses préoccupations, dans un climat d'ouverture et d'échange. C'est pourquoi le jury du prix AEF 2016 des meilleures initiatives partagées universités-entreprises a décerné au PGMO le prix de la catégorie recherche-innovation. En s'élargissant à la science des données, il s'ouvre aujourd'hui à d'autres entreprises, qui seront autant de portes d'entrée vers des carrières dans le privé pour les étudiants de Paris-Saclay.

Le LabEx AMIES

AMIES est le trait d'union entre les entreprises et les mathématiciens. L'Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société est une structure nationale, portée par le CNRS en partenariat avec Inria et UGA (l'université Grenoble-Alpes).

Sa mission principale est d'inviter les entreprises françaises et les mathématiciens à travailler ensemble, au travers d'initiatives incitatrices (voir ci-dessous).

Un réseau national

AMIES est aussi un Labex d'exception, n'étant pas un laboratoire, mais le réseau des laboratoires de recherche publique en maths. AMIES incite les entreprises à mieux utiliser les mathématiques, qui sont devenues une technologie clé pour la croissance.

Avec un vivier de plus de 6 000 mathématiciens, les entreprises françaises disposent d'une ressource inédite pour booster leur innovation. Les compétences proposées embrassent de nombreux thèmes stratégiques pour l'industrie : *big data*, modélisation, optimisation, traitement du signal et des images, etc.

Les programmes de collaboration mis en place par AMIES sont à la fois souples et rapides. Un appel à projet permanent nous a permis de financer plus de cent projets depuis 2011.

Des initiatives incitatrices

- Les PEPS sont des projets exploratoires financés en partie par AMIES, à l'initiative d'entreprises ayant un problème à résoudre où les maths ont un rôle à jouer.
- Les SEME sont des semaines d'étude organisées par AMIES : des problèmes industriels sont présentés le lundi, expertisés par des groupes de doctorants (en thèse de maths), avec une restitution le vendredi de la même semaine. Il est demandé aux doctorants d'explorer des stratégies de réponse inédites pour l'industriel.
- Les Forums Emploi-Maths, offrent un lieu annuel d'échange entre entreprises, étudiants et centres universitaires de formation.

Des résultats qui indiquent la voie

Depuis la création d'AMIES, plus de 70 PEPS ont été alloués, la 19^e SEME se déroulera fin janvier 2017 à Lyon. Ce sont plus de 90 entreprises et 400 étudiants qui ont ainsi bénéficié directement de ces initiatives.

LOGIQUE & CALCUL

Formes et ensembles autopavables

Un miracle géométrique : avec des copies de chaque forme d'un ensemble autopavable, on reconstitue chacune des formes en plus grand.

Jean-Paul DELAHAYE

En mai 1963, Martin Gardner présentait dans le magazine *Scientific American* les figures autopavables (*rep-tiles* en anglais) : des formes géométriques F qui se découpent en plusieurs morceaux, chacun identique à F en plus petit ; ou, ce qui revient au même, des formes géométriques qui, quand on en assemble plusieurs copies, reconstituent la forme initiale en plus grand (voir l'encadré page ci-contre).

Une question a intéressé les amateurs de géométrie combinatoire : quels polyominoes (des réunions de carrés de même taille collés côté contre côté) sont de telles figures autopavables ? Pour prouver qu'un polyomino est autopavable, il suffit de réussir à paver un rectangle avec le polyomino. En effet, si on pave un rectangle, on pave aussi un carré car les longueurs des côtés du rectangle sont des multiples entiers de la longueur du carré de base (la longueur du côté du plus petit carré faisable ainsi avec un rectangle de côtés a et b est le plus petit commun multiple de a et b), et donc on reconstitue avec plusieurs de ces carrés le polyomino lui-même en plus grand.

Quelques exemples tirés du merveilleux livre *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings* de Solomon Golomb (voir la bibliographie) sont indiqués dans l'encadré page 78. Le dernier d'entre eux utilise 50 exemplaires du polyomino pour remplir le rectangle ; il a été découvert

en 1990 par William Marshall, de Dunedin en Nouvelle-Zélande.

Le plus petit entier n tel que n copies du polyomino donnent un rectangle est l'« ordre » du polyomino. L'encadré page 79 indique la liste complète des polyominoes avec leur ordre quand le polyomino est composé de 3, 4, 5 ou 6 carrés (on trouvera une liste plus complète avec les rectangles pavés sur <http://www2.stetson.edu/~efriedma/order/>).

Chaque élément du tableau de cet encadré est un petit puzzle : lorsque le n indiqué à côté du polyomino est petit, trouver le pavage du rectangle est aisé ; le puzzle est facile. Lorsque n est grand, le puzzle devient difficile. Nous avons donné la solution extraordinaire, découverte par Tom Marlow en 1985, pour le dernier polyomino représenté, car la disposition des 92 pièces composant un rectangle est quasiment impossible à trouver à la main.

Généralisation des formes autopavables

Lee Sallows, dont nous avons déjà présenté les carrés géomagiques (« Les carrés magiques géométriques », *Pour la Science* de juin 2013) est un ingénieur informaticien britannique. Il a conçu une généralisation des formes autopavables et a mené sur ce sujet de mathématiques récréatives une double étude publiée en 2012 et 2014. Il a d'une part utilisé la force brute de l'ordinateur

pour découvrir des exemples remarquables de formes satisfaisant sa délicate définition ; d'autre part, il a conçu une méthode mathématique produisant des constructions que l'ordinateur était incapable de lui fournir.

Lee Sallows définit les « ensembles autopavables » (en anglais *self-tiling tile sets* qui donne l'abrégié *setiset*) comme des ensembles E de plusieurs formes planaires F tels que chaque forme F de l'ensemble E s'obtient en plus grand par un assemblage n'utilisant chaque forme de E qu'une fois exactement (pour un exemple, voir l'encadré page 80, en haut).

En fait, la définition que donne Lee Sallows avait déjà été envisagée, sans la nommer, par le mathématicien écossais Charles Dudley Langford dans les années 1950. Ce dernier avait cherché, sans en trouver, de telles combinaisons géométriques. Dans sa rubrique de *Scientific American*, Martin Gardner avait soumis la question à ses lecteurs. Dans son livre *Mathematical Magic Show* publié en 1977, Gardner indique trois solutions.

Lee Sallows exige dans sa définition que le rapport de taille des formes en petit et des formes en grand obtenues par composition soit le même pour chaque forme de l'ensemble autopavable. Il s'ensuit que toutes les formes d'un ensemble autopavable ont la même aire.

La définition n'impose pas aux formes d'un ensemble autopavable E d'être toutes différentes. Lorsqu'elles sont identiques, on

retombe sur la définition des formes autopavables ; lorsqu'elles sont différentes, on parle d'ensemble autopavable régulier. Les exemples proposés sont tous réguliers. Lorsque les côtés des formes sont des multiples entiers d'une même longueur (c'est le cas des polyominos) et qu'il y a n formes dans l'ensemble autopavable E , l'aire des grandes formes est n fois celle des petites ; par conséquent, le facteur d'agrandissement entre les petites et les grandes formes, qui est $\sqrt{n}$, doit être un entier. Il en résulte qu'il existe des ensembles autopavables composés de n formes seulement si n est un nombre carré tel que 4, 9, 16, etc.

Comme les formes autopavables, les ensembles autopavables engendrent des pavages complets du plan. Pour ce faire, on part d'une des formes de l'ensemble, dont les éléments seront dits de niveau 0. On l'entoure par d'autres formes de niveau 0 pour obtenir une forme plus grande, dite de niveau 1. On entoure celle-ci par d'autres de niveau 1 pour en obtenir une plus grande encore, dite de niveau 2 ; ces formes de niveau 1 se découpent en formes de niveau 0 et donc tout se ramène à un pavage d'une plus grande surface par des pièces de niveau 0. Puis on recommence et, petit à petit, on recouvre ainsi des parties de plus en plus grandes du plan par un pavage n'utilisant que des formes de niveau 0. À l'infini, on a recouvert le plan uniquement par des formes de niveau 0. Les pavages obtenus ainsi sont le plus souvent non périodiques, mais les mêmes formes pavent aussi périodiquement le plan lorsqu'on s'y prend autrement.

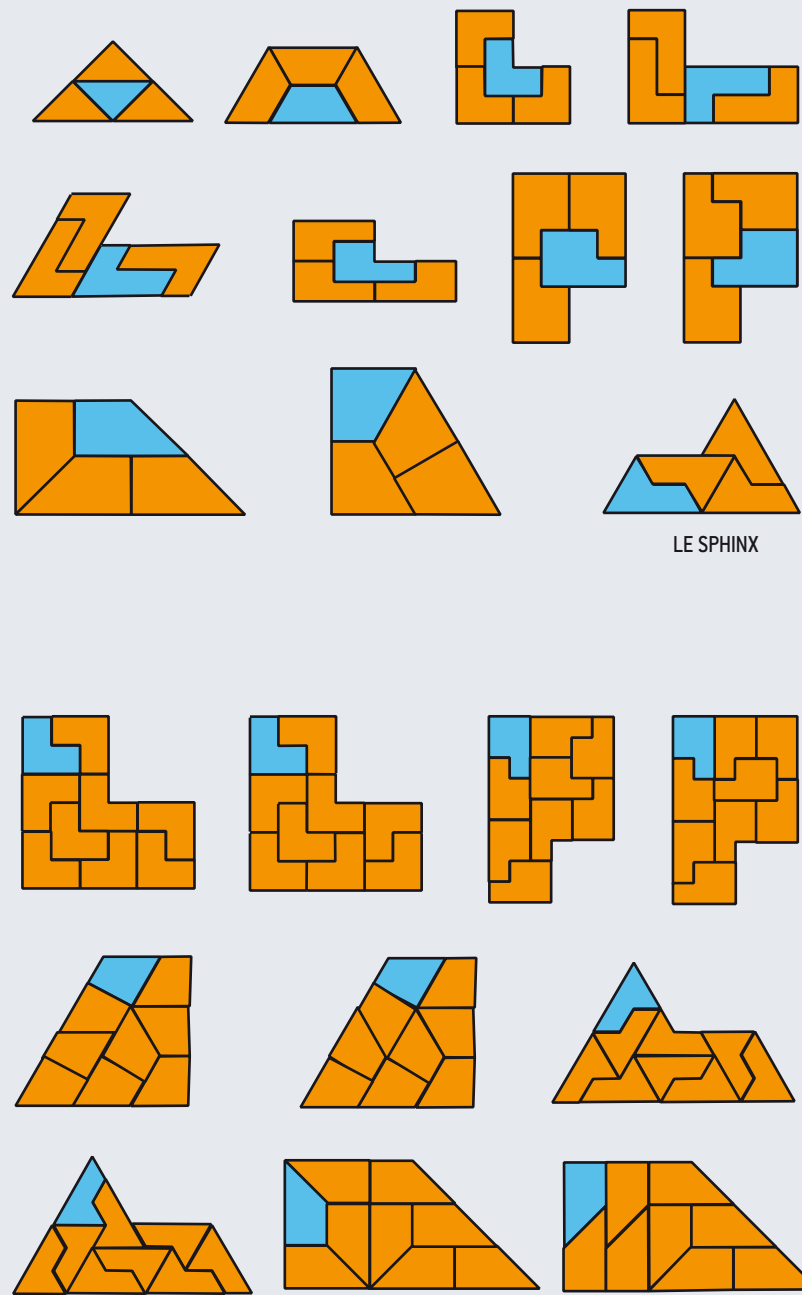
Trouvailles de l'ordinateur

Lee Sallows a mené une série de recherches systématiques par ordinateur pour trouver des ensembles autopavables. Il s'est concentré sur les polyominos en n'envisageant que des polyominos de taille raisonnable (6, 7 ou 8 carrés) et en ne recherchant que des ensembles autopavables de 4 polyominos. Si l'on envisage des recherches au-delà de ces limites, on est confronté à une explosion combinatoire qu'on ne pourrait éventuellement maîtriser qu'avec de gros moyens informatiques.

Formes autopavables

En prenant plusieurs copies d'une forme autopavable, on la reconstitue en plus grand, ou, ce qui revient au même : une forme autopavable se découpe en plusieurs morceaux identiques à elle-même et plus petits.

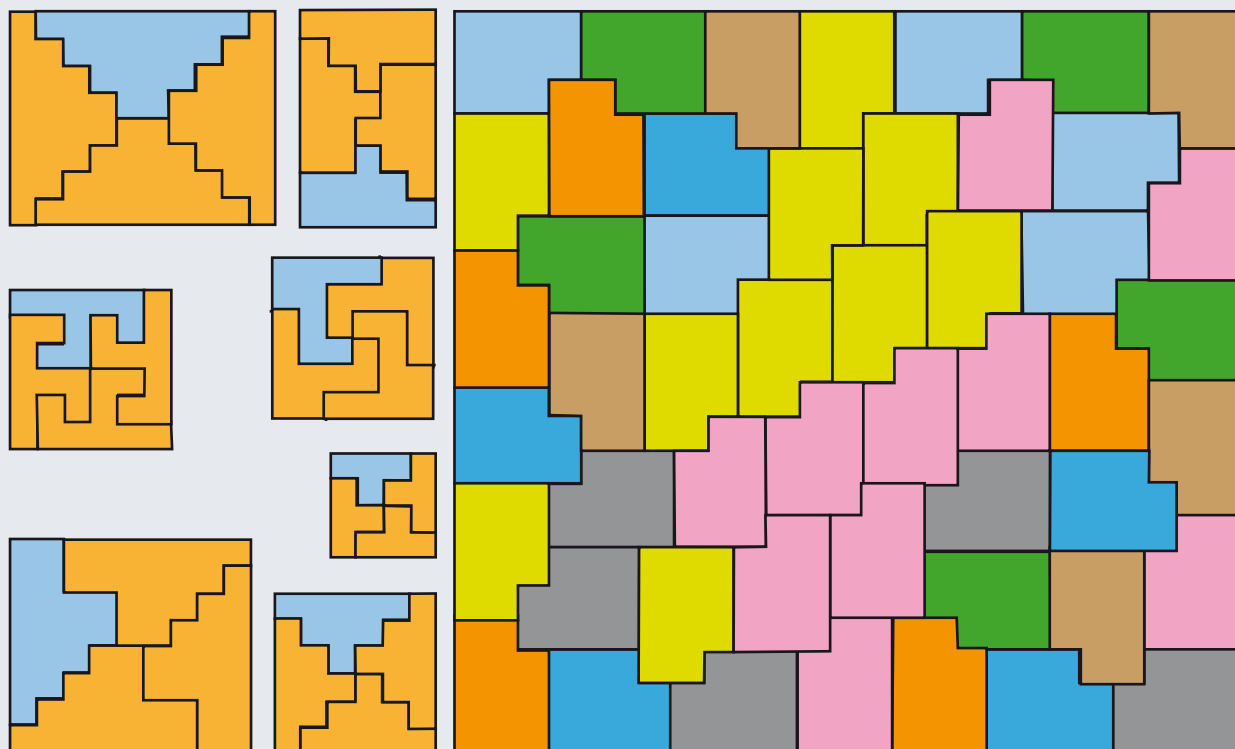
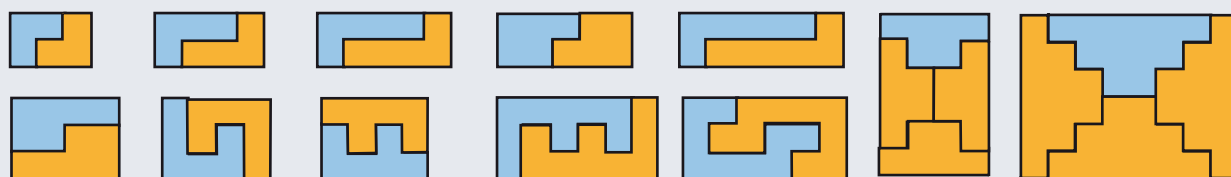
Les exemples donnés sont des formes autopavables par 4 copies (en haut) et des formes autopavables par 9 copies (en bas). On voit que certaines de ces formes sont autopavables de plusieurs façons différentes. (La symétrie miroir est autorisée.)



Polyominos

Les polyominos sont les formes géométriques obtenues en collant des carrés de même taille, côté contre côté. Pour démontrer qu'un polyomino de K carrés est autopavable, il suffit de réussir à assembler plusieurs copies du polyomino, disons P copies, pour former un rectangle de côtés L et M (on a alors $L \times M = K \times P$).

En effet, en assemblant L lignes de M exemplaires de ce rectangle, on fabrique un carré de côté $L \times M$. Ce carré contient $P \times L \times M = K \times P^2$ polyominos de départ et son aire est $K^2 \times P^2 = L^2 \times M^2$. Ce carré lui-même utilisé K fois donne le polyomino de départ en plus grand. Le grand polyomino reconstitué comportera $K^2 \times P^2 = L^2 \times M^2$ polyominos plus petits et son aire sera $K^3 \times P^2 = K \times L^2 \times M^2$.



Entre autres découvertes, Lee Sallows a ainsi montré qu'il existe 7 ensembles autopavables réguliers, composés chacun de 4 octominos (voir l'encadré page 80, en bas). Les cinq ensembles dessinés en étoiles ont l'extraordinaire propriété que chacun peut paver non seulement ses propres octominos, mais aussi tous les octominos des autres. Une flèche liant deux quadruplets d'octominos A et B signifie que les octominos de A pavent, en les utilisant chacun une fois exactement, les octominos de B.

La complexité combinatoire du problème ne doit pas être sous-estimée : il est vraiment difficile pour un ordinateur d'explorer toutes les combinaisons possibles, même dans le cas des quadruplets d'octominos, et il semblait quasiment impossible d'envisager des ensembles autopavables comportant 9 polyominos. C'était sans compter sur la détermination et le subtil esprit géométrique de Lee Sallows. Menant un raisonnement que nous allons détailler, il a réussi à concevoir une puissante et astucieuse méthode de création d'ensembles autopavables qui a produit de nombreuses configurations hors de portée de l'ordinateur.

Une simple astuce ?

La méthode est fondée sur les formes autopavables simples, les *rep-tiles* dont parlait l'article de Martin Gardner de 1963. Pour qui ouvre les yeux, ces formes recèlent les composants des nouvelles constructions.

- On part donc d'une figure unique autopavable. Prenons l'exemple du sphinx montré dans l'encadré page 77.

- On regroupe dans le découpage les petites formes de sphinx deux par deux, ce qui donne trois schémas différents et six formes nouvelles A, B, C, D, E et F, dont deux ne sont pas d'un seul tenant, D et F (voir l'encadré page 82, en haut).

- Par construction, en ne considérant que les pièces A, B, C et D, on peut paver deux grands sphinx. Mais ces deux grands sphinx, une fois correctement repositionnés, sont exactement ce qu'il faut pour reconstituer A, B, C et D en grand puisque, justement, A, B, C et D sont chacun la réunion de deux

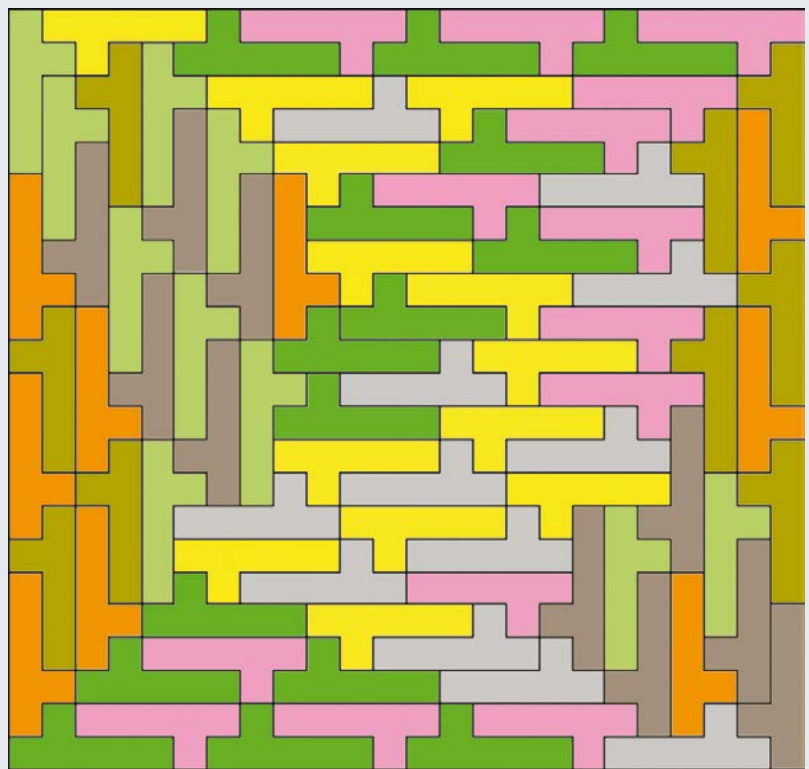
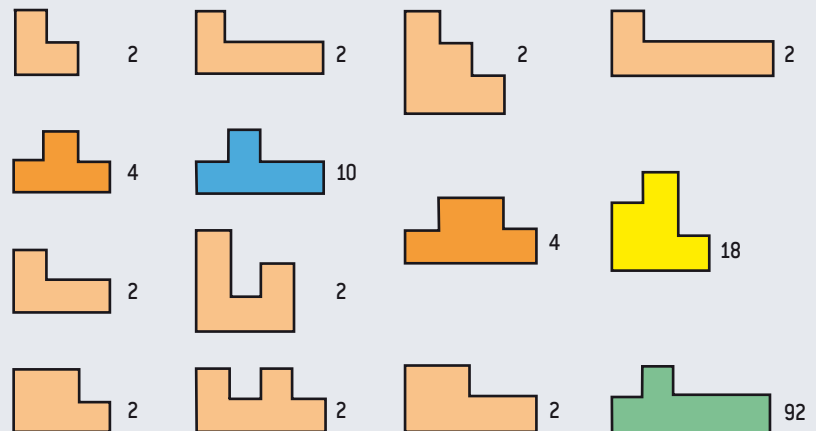
De petits puzzles

A côté de chaque polyomino (non rectangulaire) comportant 3, 4, 5 ou 6 carrés de base et pouvant paver un rectangle, on a indiqué combien d'exemplaires au minimum il fallait pour obtenir un rectangle. C'est un jeu

pour vous

de trouver l'assemblage solution. Pour le dernier polyomino, la difficile construction est dessinée. Si vous ne trouvez pas les solutions, voir :

<http://www2.stetson.edu/~efriedma/order/>



L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal et
automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

T. Tao, The Erdős discrepancy
problem, 2015 : [http://arxiv.org/
pdf/1509.05363.pdf](http://arxiv.org/pdf/1509.05363.pdf)

L. Sallows, More on self-tiling tile
sets, *Mathematics Magazine*,
vol. 87(2), pp. 100-112, 2014.

J.-P. Delahaye, Les carrés
magiques géométriques,
Pour la Science, n° 428, juin 2013.

L. Sallows, On self-tiling tile
sets, *Mathematics Magazine*,
vol. 85(5), pp. 323-333, 2012.

S. W. Golomb, *Polyominoes :
Puzzles, Patterns, Problems and
Packings*, Princeton University
Press (2e édition), 1996.

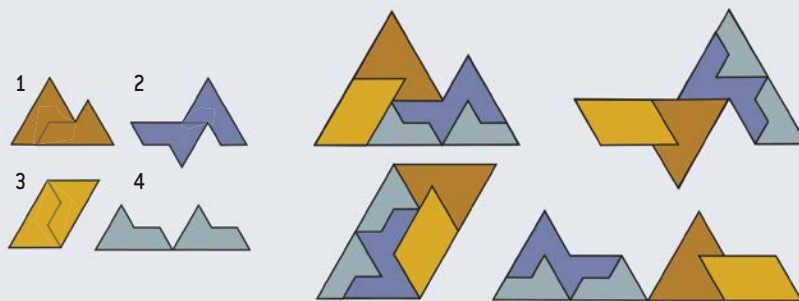
M. Gardner, *Mathematical magic
show : More puzzles, games,
diversions, illusions & other
mathematical sleight-of-mind
from Scientific American*,
Random House Inc., 1977.



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

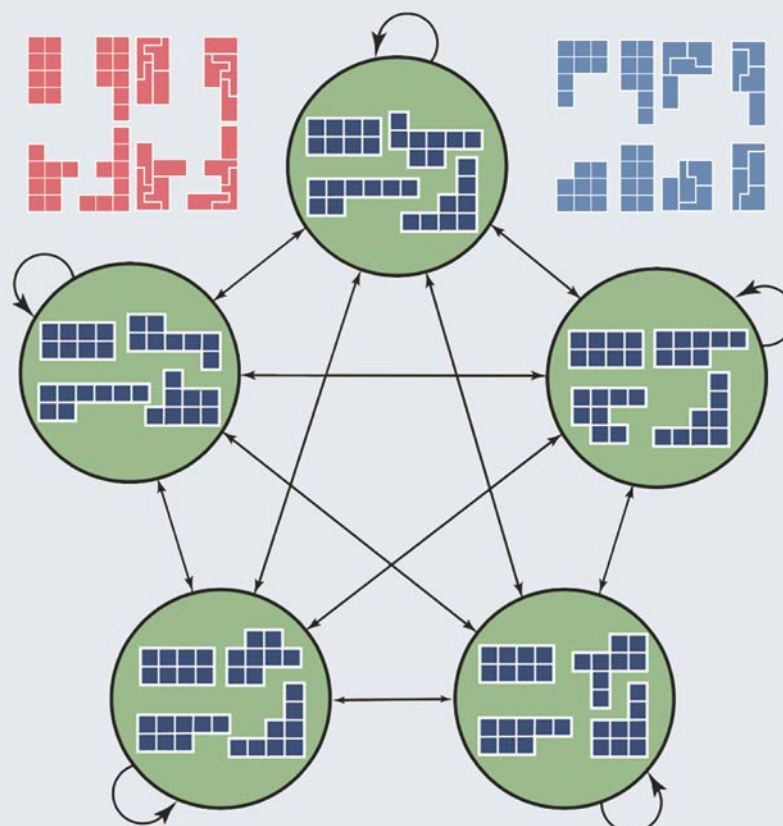
Un ensemble autopavable

En prenant un exemplaire de chaque forme d'un ensemble autopavable E (ici à 4 formes), on reconstitue en plus grand chacune des formes de E (la forme 4 est en 2 morceaux se touchant juste par un point, ce que l'on autorise).



Sept ensembles autopavables de 4 octominos

En menant une recherche exhaustive par ordinateur, Lee Sallows a trouvé qu'il existait exactement 7 ensembles autopavables réguliers (sans répétition) de 4 octominos, un rouge, un bleu et 5 qui forment une étoile remarquable car chacun est composé d'octominos qui pavent exactement les octominos des autres.

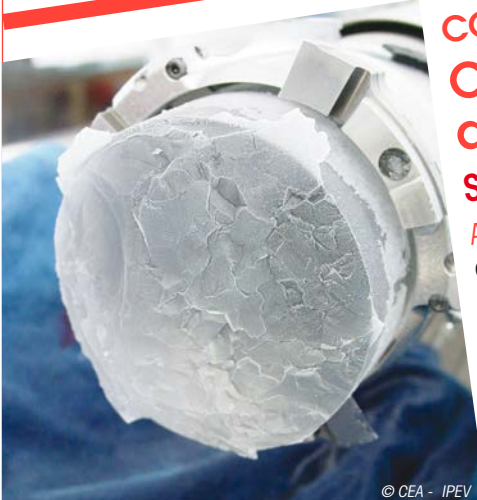


les conférences

Palais DÉCOUVERTE

au Palais de la découverte

Entrée libre dans la limite des places disponibles



CONFÉRENCE
Climat: quels enjeux après l'Accord de Paris?
Samedi 3 décembre à 17h

Avec Valérie Masson-Delmotte, Laboratoire des sciences du climat et de l'environnement (CEA), à l'occasion de la remise de son Prix Jean Perrin 2015, décerné par la Société française de physique.

© CEA - IPEV

En partenariat avec

programme complet sur palais-decouverte.fr

SF
Société Française de Physique

Avec le soutien de

SCIENCE **culture plus**

les conférences

cité
des sciences et de l'industrie

à la Cité des sciences et de l'industrie

Entrée libre dans la limite des places disponibles



Cérémonie de clôture du 10^e festival
Les chercheurs font leur cinéma
Samedi 26 novembre à 14h30

Embarquez au cœur de la science ! De jeunes chercheurs vous font découvrir leur sujet de recherche au moyen de courts métrages de cinq minutes.

→ Projection des films, débat avec les réalisateurs, vote et remise des prix du public, des lycéens et du jury.

© Les chercheurs font leur cinéma

En partenariat avec

programme complet sur cite-sciences.fr

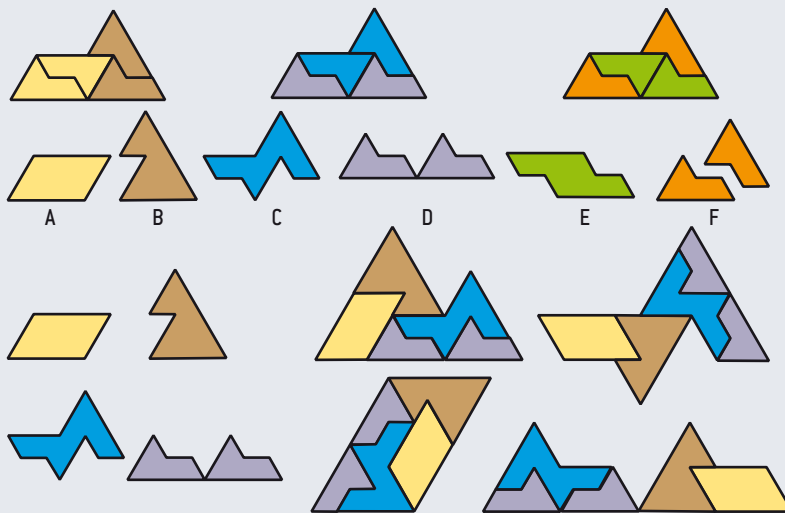
doc

Avec le soutien de

SCIENCE **culture plus**

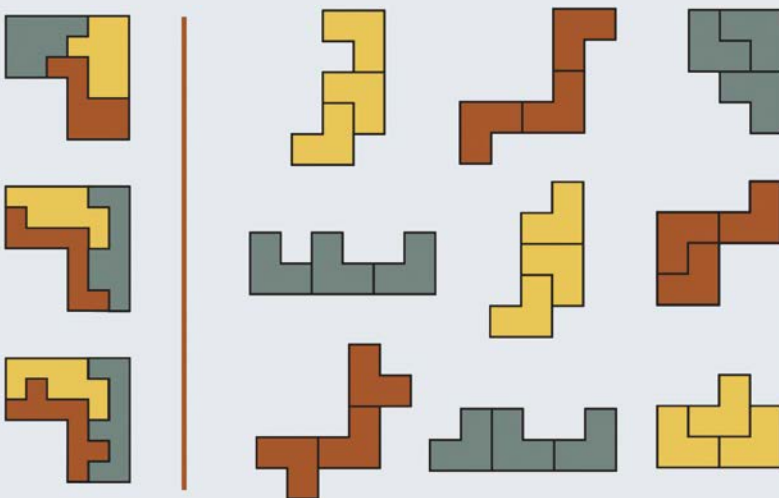
Construction à la main

Partant du sphinx qui se découpe en 4 sphinx, Lee Sallows regroupe les petits sphinx deux par deux de 3 façons différentes, obtenant 6 formes qui sont donc des « doubles sphinx ». Par construction, ces doubles sphinx peuvent être recouverts par 4 des 6 pièces A, B, C, D, E, F. En retenant A, B, C et D, on obtient l'ensemble de 4 formes autopavables illustré dans l'encadré page 80.



Un ensemble autopavable de 9 formes

La méthode de l'encadré ci-dessus se généralise en regroupant non plus 2, mais 3 formes à la fois. Elle a permis à Lee Sallows de découvrir des ensembles autopavables constitués de 9 formes différentes.



sphinx. $\{A, B, C, D\}$ est donc un ensemble autopavable à quatre éléments.

Le procédé est très efficace même si, dans l'exemple considéré, il ne donne pas quatre pièces d'un seul tenant. Le procédé permet d'obtenir des ensembles autopavables à 9 éléments (voir l'encadré ci-dessous).

Ordinateurs à la peine, humains glorieux

L'ordinateur donne accès à des vérités qu'on ne verrait pas sans lui. Par exemple, on ne connaît pas aujourd'hui de preuve autre que celle de l'ordinateur qu'il n'existe pas d'ensemble autopavable régulier composé de 4 heptominoes. Cependant, l'intelligence humaine ouvre souvent des voies qui se révèlent plus belles et fécondes que celles de la machine un peu trop tâche-ronne. L'exemple de Lee Sallows est remarquable et remet en mémoire une situation similaire récente.

En 2015, une équipe de l'université de Liverpool démontrait, à l'aide d'un calcul colossal réalisé par ordinateur, l'exactitude de la conjecture de la « discrépance » de Paul Erdős dans le cas $C=2$. Nous ne la rappelons pas, car c'est un peu compliqué, mais vous la trouverez détaillée sur Wikipedia ou dans l'article *Comment vérifier les longues démonstrations ?* de cette rubrique de juin 2015. La démonstration de l'ordinateur écrite explicitement était la plus longue démonstration mathématique jamais produite sur Terre. L'ordinateur triomphait !

Le mathématicien Terence Tao a cependant démontré quelques mois plus tard, sans ordinateur cette fois, la conjecture de la discrépance. Il ne s'est d'ailleurs pas contenté du cas $C=2$, mais a traité tous les cas à la fois, ce que les méthodes utilisées par l'ordinateur étaient très loin de pouvoir réaliser. La preuve humaine était plus courte, donc compréhensible par un humain, et plus générale !

L'intelligence artificielle (et la démonstration automatique) réalise des exploits remarquables. Elle fait des progrès réguliers, mais ne jetons pas trop vite l'éponge : l'humain a encore quelques beaux restes ! ■

OFFRE DÉCOUVERTE

ABONNEZ-VOUS À POUR LA SCIENCE



1 AN - 12 N^{OS}

59€

24%
d'économie

2 ANS - 24 N^{OS}

110€

29%
d'économie

3 ANS - 36 N^{OS}

159€

32%
d'économie

BULLETIN D'ABONNEMENT

POUR LA SCIENCE

À renvoyer accompagné de votre règlement à : Pour la Science - Service abonnements - 19 rue de l'Industrie - BP 90 053 - 67 402 Illkirch cedex

☐ **OUI, je m'abonne à Pour la Science en formule Découverte :**

- ☐ 1 an • 12 numéros • 59€ au lieu de 78,50€ (D1A59E)
- ☐ 2 ans • 24 numéros • 110€ au lieu de 157€ (D2A110E)
- ☐ 3 ans • 36 numéros • 159€ au lieu de 235,50€ (D3A159E)

MES COORDONNÉES

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

Code postal : _____

Ville : _____

Tél. : _____

Pour le suivi client (facultatif)

MON MODE DE RÈGLEMENT

☐ Par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ Par carte bancaire

N° _____

Date d'expiration _____ Clé _____

Signature obligatoire

Mon e-mail pour recevoir la newsletter Pour la Science (à remplir en majuscule). _____

@

Grâce à votre email nous pourrions vous contacter si besoin pour le suivi de votre abonnement. À réception de votre bulletin, comptez 5 semaines pour recevoir votre n° d'abonné. Passé ce délai, merci d'en faire la demande à pourlascience@abopress.fr

J'accepte de recevoir les informations de Pour la Science ☐ OUI ☐ NON et de ses partenaires ☐ OUI ☐ NON

Délai de livraison: dans le mois suivant l'enregistrement de votre règlement. Offre réservée aux nouveaux abonnés, valable jusqu'au 31/12/16 en France métropolitaine uniquement. Pour un abonnement à l'étranger, merci de consulter notre site www.pourlascience.fr. Conformément à la loi "Informatique et libertés" du 6 janvier 1978, vous disposez d'un droit d'accès et de rectification aux données vous concernant en adressant un courrier à Pour la Science.

PAS470B

