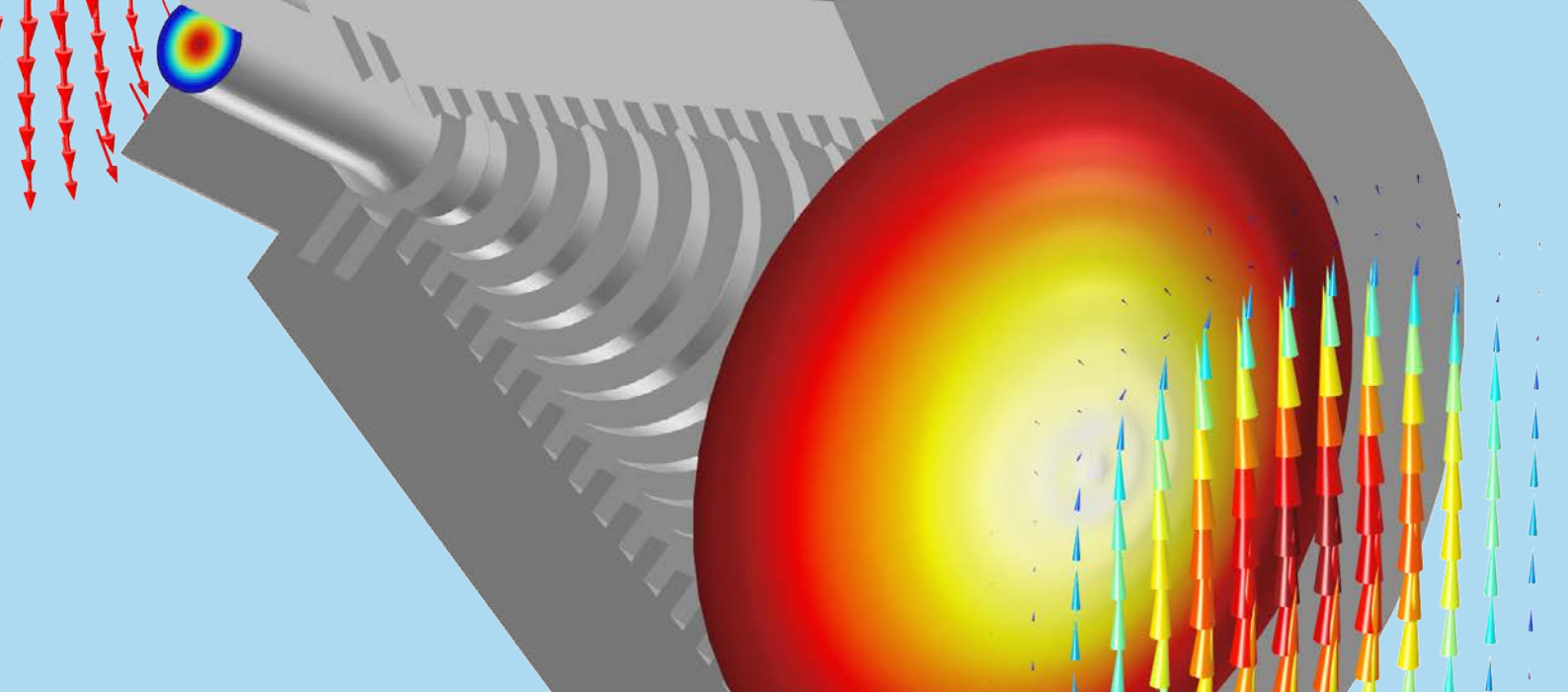




LA MULTIPHYSIQUE POUR TOUS

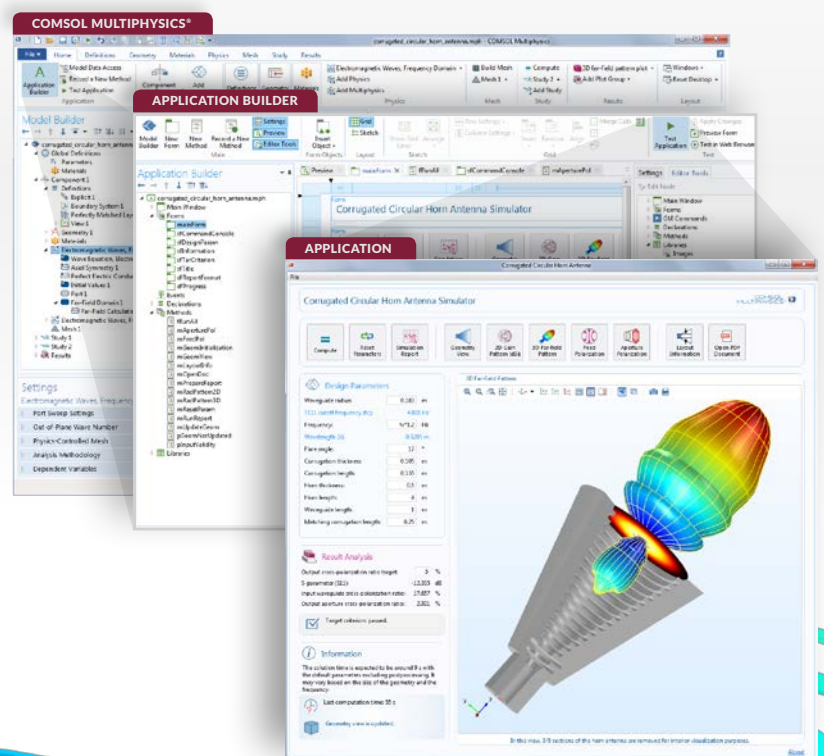
L'évolution des outils de simulation numérique vient de franchir un cap majeur.

Des applis spécialisées sont désormais développées par les spécialistes en simulation avec l'application Builder de COMSOL Multiphysics®.

Une installation locale de COMSOL Server™, permet de diffuser les applis dans votre organisme et dans le monde entier.

Faites bénéficier à plein votre organisme de la puissance de l'outil numérique.

comsol.fr/application-builder



LOGIQUE & CALCUL

Je le vois, je le démontre, mais est-ce que je le comprends ?

L'un des côtés fascinants des mathématiques est qu'elles recèlent d'innombrables vérités à la fois assez simples et très inattendues. Illustration avec huit exemples étonnants.

Jean-Paul DELAHAYE

Le raisonnement mathématique n'est pas un simple calcul dont on prévoit ce qu'il va donner et dont on connaît à l'avance toutes les limites ; il engendre parfois des miracles. Nous allons présenter huit petites énigmes et leurs solutions qui vous sembleront inattendues, absurdes ou invraisemblables.

Elles nous font toutes découvrir une propriété assez simple qui réalise une sorte d'exploit *a priori* impossible, ou qui nous place devant une affirmation très éloignée de tout ce qu'on pouvait imaginer.

Miracle 1 - Connaissez-vous la racine de 2 ?

Uniquement de tête, donc sans utiliser ni ordinateur, ni crayon, ni papier... ni smartphone, trouvez le 200^e chiffre décimal après la virgule du nombre $(1 + \sqrt{2})^{1000}$. Oui, c'est possible !

Réponse

$(1 + \sqrt{2})^{1000} + (1 - \sqrt{2})^{1000}$ est un entier, car quand on développe, tous les termes comportant $\sqrt{2}$ s'annulent, comme avec $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6$.

Or $(1 - \sqrt{2})^{1000}$ est très petit puisque c'est un nombre inférieur à $1/2$ élevé à la puissance 1 000. Sachant que $2^{10} = 1 024$, on voit qu'il est inférieur à $1/2^{1000} = 1/1 024^{100} < 1/(10^3)^{100} = 1/10^{300}$.

Le nombre de l'énoncé est donc la différence entre un entier et un nombre plus petit que 0,000...0001 avec 300 zéros. Tous ses chiffres entre la virgule et le 300^e chiffre après la virgule sont donc des 9.

Cette énigme provient d'une rubrique de problèmes d'Elwyn Berlekamp et Joe Buhler parue dans le numéro d'automne 1999 du bulletin *Emissary*, une publication du MSRI, l'Institut de recherche en sciences mathématiques de l'université de Californie à Berkeley.

Miracle 2 - La somme des chiffres

La magicienne des nombres vous dit : « Prenez un nombre entier quelconque composé de chiffres croissants au sens large, et dont les deux derniers chiffres sont différents (par exemple 1 333 456 778). Multipliez-le par 9. » Elle ajoute : « Je connais la somme des chiffres du résultat. » Pourquoi ?

Réponse

Parce que la somme des chiffres est toujours 9. Avec notre exemple : $9 \times 1 333 456 778 = 12 001 111 002$. La somme des chiffres est bien 9. C'est inattendu, car le nombre de départ peut être très long, et donc celui obtenu en multipliant par 9 aussi.

La démonstration de cet étrange et étonnant résultat se fonde sur la méthode de soustraction apprise à l'école. Partons d'un entier N de 6 chiffres (la méthode s'étend

à un nombre quelconque de chiffres) : $N = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 < a_6$.

Le nombre $9 \times N$ est égal à $10 \times N - N$. C'est donc le résultat de la soustraction suivante :

$$\begin{array}{r} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 0 \qquad 10 \times N \\ - \quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \qquad - N \\ \hline b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 \qquad 9 \times N \end{array}$$

Le chiffre b_7 vaut $10 - a_6$, car il y a une retenue.

Le chiffre b_6 vaut $a_6 + 1 - a_5$, car la retenue précédente a été reportée. L'hypothèse $a_6 > a_5$ assure qu'il n'y a pas de nouvelle retenue à introduire et à prendre en compte pour la colonne suivante.

Le chiffre b_5 vaut $a_5 - a_4$, car $a_5 \geq a_4$ assure qu'il n'y a pas de nouvelle retenue à introduire. De même, b_4 vaut $a_4 - a_3$, b_3 vaut $a_3 - a_2$, b_2 vaut $a_2 - a_1$, et b_1 vaut a_1 . La somme des chiffres de $9N$ est donc : $(10 - a_6) + (a_6 - a_5 - 1) + (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 = 10 - 1 = 9$.

La découverte de ce beau petit résultat semble due à Felix Lazebnik, de l'université du Delaware (*Mathematics Magazine*, vol. 87(3), pp. 212-221, 2014).

Miracle 3 - Un nombre exceptionnel ?

La magicienne des nombres souhaite vous étonner une seconde fois. Elle pose sur la

Le théorème universel des cordes

Pour une courbe donnée, une corde est un segment reliant deux points de la courbe. Entre $x=0$ et $x=1$, la fonction continue $f(x) = \sin(\pi x)$ a des cordes horizontales de toutes les longueurs L possibles, pour L compris entre 0 et 1. On a ainsi dessiné, sur le schéma (1), la corde de longueur 0,6.

Ce n'est pas le cas de la fonction continue $f(x) = \sin(2\pi x)$: on voit clairement sur le schéma (2) qu'elle n'a aucune corde horizontale de longueur L pour $1/2 < L < 1$.

Le théorème universel des cordes stipule que pour toute fonction continue f de l'intervalle $[0, 1]$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels telle que $f(0) = f(1)$, et pour tout entier positif n , il existe une corde horizontale de longueur $L = 1/n$ sur le graphe de f . De plus, pour tout nombre réel L qui n'est pas l'inverse d'un entier positif, il existe des fonctions continues de $[0, 1]$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et telles que $f(0) = f(1)$ dont le graphe ne comporte aucune corde horizontale de longueur L . En résumé : *Les longueurs de cordes horizontales inévitables, et les seules inévitables, sont les inverses des entiers positifs.*

La démonstration de la partie affirmative est donnée dans le texte de l'article. La partie négative, démontrée par Paul Lévy, consiste à étudier la fonction $g_L(x) = \sin^2(\pi x/L) - x \sin^2(\pi/L)$, qui n'a pas de corde de longueur L si L n'est pas l'inverse d'un entier.

Sans détailler l'étude de $g_L(x)$, on peut observer le résultat sur les deux dessins suivants. Pour $L = 3/8$, puis pour $L = 3/17$, on a dessiné le graphe de $g_L(x)$ ainsi que la même courbe décalée horizontalement de L vers la droite. Le fait que la courbe et sa version décalée ne se coupent pas, ce que l'on observe, signifie qu'il n'existe pas de corde de longueur L .

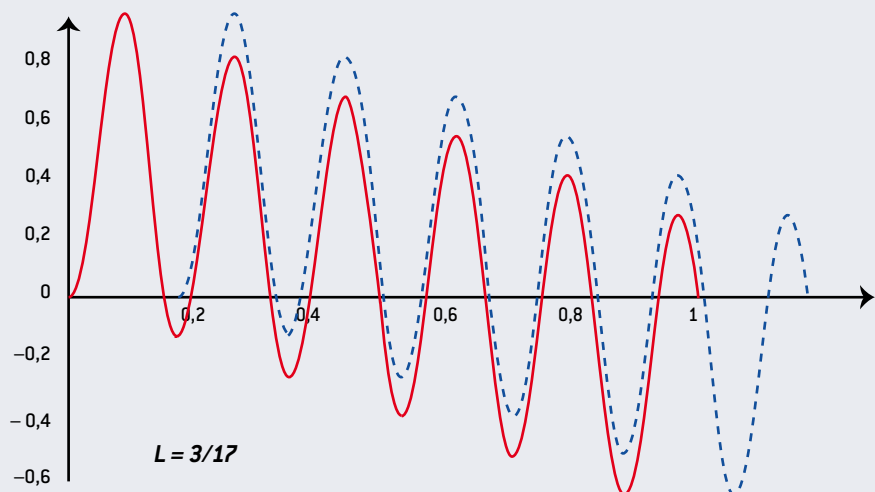
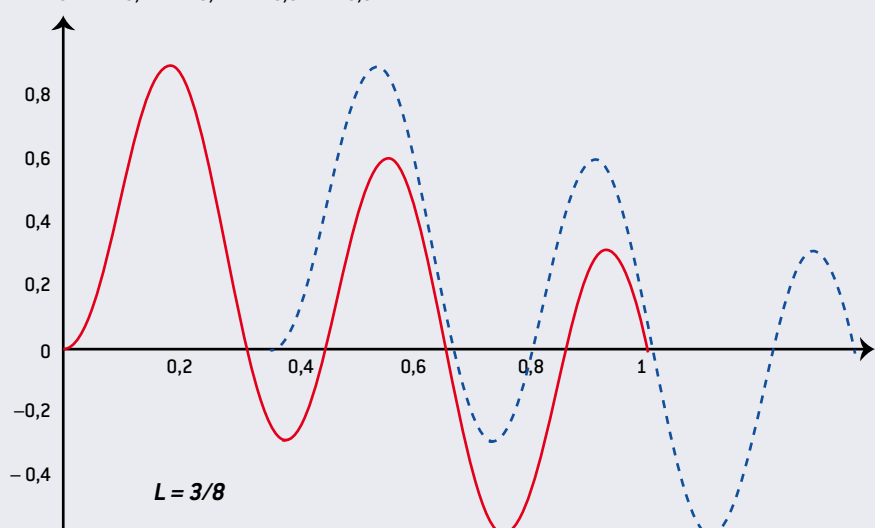
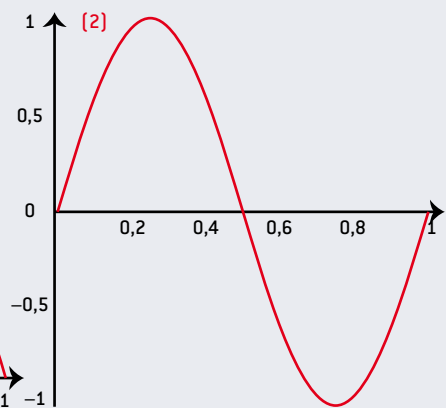
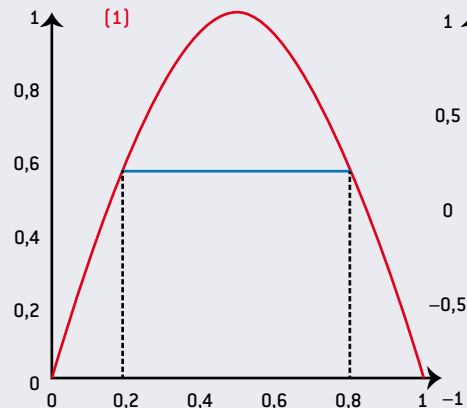


table un verre transparent dans lequel un foulard froissé a été enfoncé. Elle vous donne un papier et un crayon et vous invite à choisir un nombre N de quatre chiffres non tous égaux (par exemple, le nombre 3 333 n'est pas autorisé). Elle demande :

« Classez les chiffres de N par ordre croissant, cela vous donne un nombre X à quatre chiffres ; classez les chiffres de N par ordre décroissant, cela vous donne un nombre Y à quatre chiffres. Calculez $Z = Y - X$. Recommencez à partir de Z les mêmes opérations. Faites-le jusqu'à ce que cela devienne inutile, le Z obtenu redonnant Z . »

En quelques secondes, vous faites ce qui a été demandé et vous disposez donc d'un résultat Z à quatre chiffres. La magicienne tire alors le foulard du verre et le déploie. Il y est écrit 6 174. C'est effectivement le Z que vous avez trouvé. Pourquoi ?

Réponse

Quel que soit le nombre initial N , on finit toujours par tomber sur 6 174 ! Je ne connais aucune preuve par le raisonnement de ce résultat, mais comme c'est une propriété vérifiable par un calcul fini consistant à essayer tous les N possibles, j'ai écrit un petit programme et me suis assuré qu'on obtient effectivement toujours $Z = 6\,174$.

Cette preuve par l'ordinateur est un peu décevante, mais ne laisse aucun doute.

Voici quelques informations supplémentaires sur cette bizarrerie des nombres à quatre chiffres qui, aujourd'hui, n'a aucune explication profonde ou générale. Cette propriété exceptionnelle du nombre 6 174 pourrait être le simple fruit du hasard.

- Aucun autre nombre que 6 174 ne retombe sur lui-même quand on mène le calcul demandé.

- Le nombre maximal d'étapes de calcul pour arriver à 6 174 est 7. C'est par exemple ce qui se passe pour 1 400, qui donne successivement 4 086, 8 172, 7 443, 3 996, 6 264, 4 176, 6 174.

- Le nombre moyen d'étapes de calcul avant d'arriver à 6 174 est 4,7. Ce nombre d'étapes prend toutes les valeurs possibles entre 0 (pour 6 174) et 7. Le nombre X_N d'entiers à quatre chiffres exigeant N étapes de calcul est donné par la liste suivante : $X_0 = 1$, $X_1 = 356$, $X_2 = 519$, $X_3 = 2\,124$, $X_4 = 1\,124$, $X_5 = 1\,379$, $X_6 = 1\,508$, $X_7 = 1\,980$.

Le même miracle se produit quand on part d'un nombre de trois chiffres non tous égaux. Cela conduit invariablement à 495, là encore sans qu'on puisse faire autre chose que le constater. Nous sommes dans une situation où l'on connaît un résultat inattendu,

qu'on prouve par la force du calcul, mais qu'au fond on ne comprend pas.

Le mystère est d'autant plus profond que, si l'on essaye la même chose en partant de nombres de cinq chiffres, ça ne marche plus : tous les nombres conduisent à des cycles (il ne peut pas en être autrement), mais pas nécessairement le même.

Cette formidable propriété de 6 174 et de 495 a été découverte par le mathématicien indien Dattatreya Kaprekar (*Scripta Mathematica*, vol. 15, pp. 244-245, 1949). On trouvera des précisions sur <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>.

Miracle 4 - La puissance 2^{29} de Lenstra

Comme pour le premier miracle, vous devez répondre juste en raisonnant, sans utiliser d'ordinateur, ni de papier, ni de crayon... ni de smartphone : sachant que 2^{29} comporte 9 chiffres tous différents, quel est le chiffre qui manque ?

Pas besoin d'être un calculateur prodige qui calculerait vraiment 2^{29} . Même si cela semble impossible, les informations de l'énoncé permettent de trouver la réponse.

Réponse

Pour n variant de 1 à l'infini, le nombre 2^n modulo 9 (c'est-à-dire en comptant comme quand on fait une « preuve par 9 », voir l'encadré ci-contre) vaut successivement 2, 4, 8, 7 (car 16 donne $1 + 6 = 7$), 5 (car 32 donne $3 + 2 = 5$), 1 (car 64 donne 10, qui donne 1), puis de nouveau 2, 4, 8, 7, 5, 1 cycliquement. Puisque $29 = 6 \times 5 - 1$, on en déduit que 2^{29} modulo 9 vaut 5. On sait de plus que tous les chiffres, sauf l'un d'eux, sont présents. S'ils étaient tous présents, la valeur de 2^{29} modulo 9 serait celle de la somme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, soit 0 modulo 9. Seule la suppression du 4 conduit à un total qui vaut 5 modulo 9. C'est donc le chiffre 4 qui manque. Ce que l'on vérifie sans peine, cette fois avec une machine, puisque $2^{29} = 536\,870\,912$.

Le problème est dû au célèbre mathématicien néerlandais Hendrik Lenstra, spécialiste des algorithmes de factorisation des entiers.

La preuve par neuf

Le reste de la division par 9 d'un entier positif n , que l'on note « n modulo 9 », est très utile. Il se calcule simplement en faisant la somme des chiffres de n , puis en recommençant si ce que l'on a obtenu demeure supérieur à 9. Et ainsi de suite.

Pour 35 581 929, par exemple, on calcule $3 + 5 + 5 + 8 + 1 + 9 + 2 + 9 = 42$, puis $4 + 2 = 6$; donc 35 581 929 modulo 9 est égal à 6. Pour le justifier, on remarque que 10^n est égal à $99...9 + 1$, c'est-à-dire à 1 modulo 9.

La « preuve par 9 » d'une multiplication

consiste à vérifier que la valeur modulo 9 du résultat qu'on a calculé est le produit des valeurs modulo 9 des facteurs. La méthode fonctionne avec les additions, les soustractions et les divisions.

Supposons que l'on veuille vérifier l'opération $2537 \times 823 = 2\,087\,951$. On

calcule les valeurs modulo 9 des facteurs : 2537 donne $2 + 5 + 3 + 7 = 17$ qui donne 8, et 823 donne $8 + 2 + 3 = 13$ qui donne 4. Le produit de ces valeurs est 32, qui vaut 5 modulo 9. On doit donc trouver 5 modulo 9 pour le résultat 2 087 951. Et en effet, on a $2 + 0 + 8 + 7 + 9 + 5 + 1 = 32$, qui est égal à 5 modulo 9.

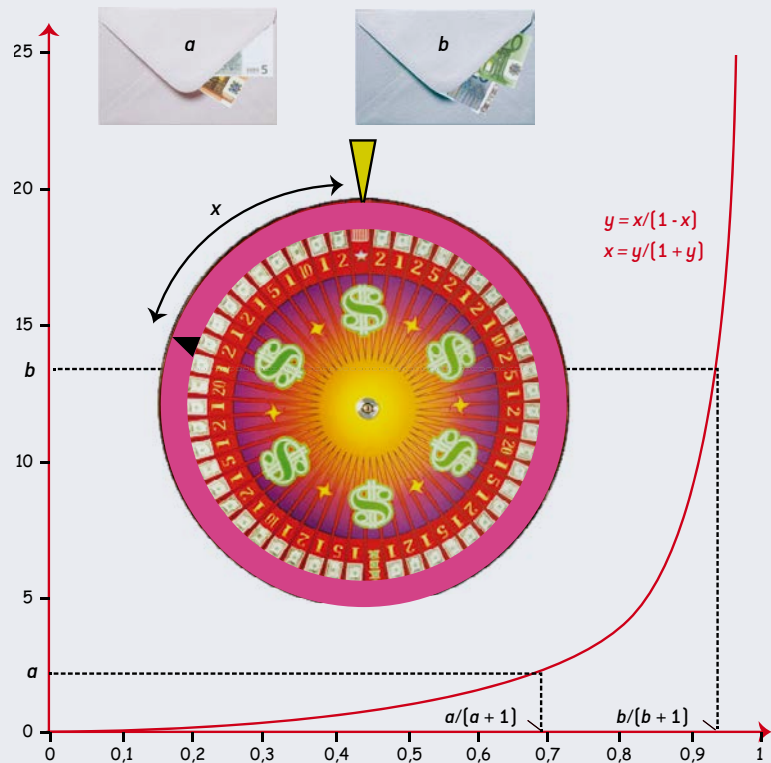
L'opération est donc probablement juste. La certitude n'est pas de 100 %, car on peut faire une erreur qui conduise quand même à la valeur attendue.

Le choix de l'enveloppe

Vous devez choisir entre deux enveloppes contenant des sommes a et b différentes et inconnues. Vous ouvrez la première et trouvez une somme S . Si on vous le permet, avez-vous intérêt à changer d'enveloppe ?

Il est possible de gagner (obtenir le maximum) dans plus de la moitié des cas par la stratégie décrite dans le texte. Elle utilise la fonction $x \rightarrow x/(1-x)$ qui associe bijectivement à tout nombre réel x compris entre 0 et 1 un nombre réel compris entre 0 et l'infini (voir le graphe de la fonction, ci-contre). Une autre fonction continue ayant la même propriété définirait une autre procédure qui marcherait aussi (mais en conduisant à d'autres probabilités de gain).

L'idée de la stratégie est que, en choisissant x au hasard (par exemple à l'aide d'une roulette), on se fixe un seuil $y = x/(1-x)$ à atteindre ; si y n'est pas atteint, on change d'enveloppe, et ce choix sera le bon dans tous les cas où les contenus des enveloppes sont de part et d'autre de y . Globalement, cela donne une probabilité de gagner supérieure à 1/2. Ainsi, si les enveloppes contiennent les sommes $a = 10$ et $b = 100$, la probabilité de faire le bon choix est égale à 54,01 % (voir le texte).



Miracle 5 - Une incroyable stratégie

Vous avez devant vous deux enveloppes contenant deux sommes d'argent différentes. Vous en ouvrez une et regardez son contenu. Maintenant, vous devez choisir soit de garder le contenu de l'enveloppe que vous avez ouverte, soit de prendre l'autre enveloppe sans en connaître le contenu. Il existe une stratégie qui vous permet de faire le bon choix, c'est-à-dire de partir avec l'enveloppe contenant le plus, dans plus de 50 % des cas.

Cela semble absurde puisque vous n'ouvrirez qu'une enveloppe et ne connaîtrez rien de l'autre. L'étonnant est qu'une telle stratégie existe pourtant !

Réponse

Une façon de procéder consiste à :

1) Choisir au hasard uniformément un nombre réel x entre 0 et 1. On fait par exemple

tourner une roue de loterie dont le périmètre est de 1 mètre et qui a une marque sur ce périmètre ; une fois la roue arrêtée, on mesure sur le périmètre la distance x entre la marque et le point d'arrêt de la roue.

2) Calculer $y = x/(1-x)$, qui sera un nombre compris entre 0 et l'infini (voir l'encadré ci-dessus).

3) Si l'enveloppe ouverte contient plus de y euros, la garder ; sinon, prendre l'autre.

Pour démontrer que cette méthode donne plus de 50 % de chances de faire le bon choix, supposons que les enveloppes contiennent respectivement les sommes a et b , avec $a < b$, et calculons la probabilité de prendre la bonne enveloppe [celle qui contient b]. Considérons deux cas.

Cas 1. Le nombre y est compris entre a et b . On sera certain de faire le bon choix, car si on a pris la bonne enveloppe, on n'en changera pas, et si on a pris la mauvaise, on en changera.

En utilisant l'équivalence des relations $y = x/(1-x)$ et $x = y/(1+y)$, on sait que le nombre y est compris entre a et b si et seulement si x est compris entre $a/(a+1)$ et $b/(b+1)$. Puisque x est tiré avec une probabilité uniforme entre 0 et 1, la probabilité c que x soit compris entre $a/(a+1)$ et $b/(b+1)$ est la longueur de l'intervalle $[a/(a+1), b/(b+1)]$. Autrement dit, $c = b/(b+1) - a/(a+1)$.

Cas 2. Le nombre y n'est pas compris entre a et b .

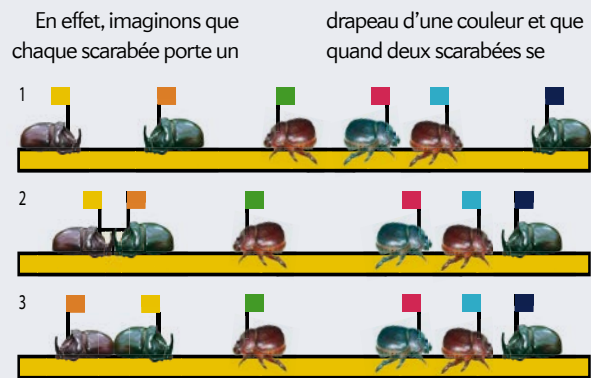
La probabilité d'avoir fait le bon choix est alors égale à 1/2. En effet :

– si a et b sont tous deux inférieurs à y , alors on aura choisi au hasard une enveloppe et on en changera, ce qui conduira à une enveloppe choisie au hasard, qui sera donc la meilleure avec une probabilité égale à 1/2.

– si a et b sont tous les deux supérieurs à y , alors on aura choisi une enveloppe au

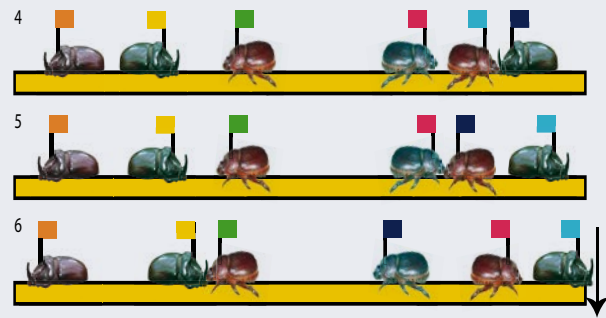
Les scarabées tomberont tous !

Des scarabées placés et orientés au hasard sur une règle de 1 mètre avancent de 1 centimètre par seconde. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font demi-tour. Tous les scarabées tomberont par terre en 100 secondes ou moins.



rencontrent, ils échangent leurs drapeaux. Chaque drapeau avancera dans une direction fixe et tombera donc par terre en moins de 100 secondes avec le scarabée qui le porte. Tous les drapeaux seront donc par terre en 100 secondes ou moins et donc

tous les scarabées qui les portent aussi. On montre sans peine que, dans certains cas, 100 secondes sont nécessaires. Ce problème est cité par Peter Winkler dans son merveilleux livre *Mathematical Mind-Benders* (A. K. Peters, 2007).



hasard et on ne la changera pas. Comme précédemment, on aura encore fait le bon choix avec une probabilité égale à $1/2$.

La probabilité de faire le bon choix quand y n'est pas compris entre a et b est donc de $1/2$. Comme la probabilité pour y de ne pas être dans l'intervalle $[a, b]$ est égale à $1 - c$, en regroupant les deux cas on trouve que la probabilité de faire le bon choix est $c + (1 - c)/2 = 1/2 + c/2 = 1/2 + (b/(b+1) - a/(a+1))/2$, ce qui est strictement supérieur à $1/2$.

Pour $a = 10$ et $b = 100$, par exemple, la probabilité de garder la meilleure enveloppe est égale à :

$$1/2 + 1/2 \times (100/101 - 10/11) = 54,05 \%$$

Ce troublant miracle semble avoir été découvert plusieurs fois sous des formes variées. On le trouve mentionné, par exemple, par le mathématicien américain David Blackwell (1919-2010) et par le théoricien américain de l'information et spécialiste des probabilités Thomas Cover (1938-2012).

Miracle 6 - Les scarabées vont-ils tomber ?

Une famille de 20 scarabées se trouve sur une règle en bois en position horizontale dont

la longueur est de 1 mètre exactement. Ils sont placés au hasard sur la règle, chacun tourné vers la droite ou vers la gauche, au hasard. Chaque scarabée avance de 1 centimètre par seconde. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font tous les deux demi-tour. On suppose que le demi-tour est instantané et que les scarabées sont de longueur négligeable. Quand un scarabée arrive à une extrémité de la règle, il tombe par terre.

Sans connaître aucune donnée plus précise, et c'est là le miracle, on peut être certain que tous les scarabées seront par terre en moins d'une heure, et que c'est encore vrai si, au lieu de 20 scarabées, il y en a 30 ou 100. Pourquoi ? La réponse est donnée dans l'encadré ci-dessus.

Miracle 7 - Le théorème universel des cordes

Certains résultats mathématiques sont totalement déconcertants et semblent presque absurdes. C'est le cas du « théorème universel des cordes » dont j'avoue que, même après en avoir lu la démonstration, je n'arrive pas à en comprendre vraiment la raison. Nous le présentons sous la forme d'une énigme.

On considère une fonction continue f de l'intervalle $[0, 1]$ dans l'ensemble des nombres réels, telle que $f(0) = f(1)$. Par exemple $f(x) = x(1-x)$. On nomme corde horizontale de f de longueur L , tout segment horizontal de longueur L reliant deux points du graphe de f . Les abscisses de ces deux points sont x et $x+L$ et l'on a $f(x) = f(x+L)$ [voir l'encadré page 79].

Selon les fonctions, certaines longueurs de cordes horizontales sont possibles et d'autres non. Ainsi, pour $f(x) = x(1-x)$ ou $\sin(\pi x)$, toutes les longueurs L comprises entre 0 et 1 sont possibles (bien sûr, pour les fonctions f telles que définies plus haut, on est certain qu'elles ont une corde de longueur 1 car, par hypothèse, $f(0) = f(1)$). Mais pour la fonction $h(x) = \sin(2\pi x)$ (dessinée dans l'encadré page 79), il n'existe aucune corde horizontale de longueur strictement comprise entre $1/2$ et 1. D'autres longueurs L que la longueur 1 sont toujours possibles quelle que soit la fonction continue f satisfaisant $f(0) = f(1)$. Lesquelles ?

Réponse

Le résultat est sidérant : pour tout entier positif n , et quelle que soit la fonction f vérifiant les hypothèses, il y aura une corde horizontale de longueur $L = 1/n$. De plus,

pour les nombres L qui ne sont pas des inverses de nombres entiers, il existe des fonctions satisfaisant les hypothèses et n'ayant aucune corde de longueur L .

La partie positive du théorème a été découverte en 1806 par le physicien André-Marie Ampère. Pour la partie négative, il a fallu attendre le mathématicien français Paul Lévy [1886-1971], qui la démontra en 1934.

Démontrons la partie positive. On considère, quel que soit l'entier $n > 1$, la fonction $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$, qui est définie pour tout x compris entre 0 et $1 - 1/n$. On a : $g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \dots + g(1 - 1/n) = f(0) - f(1) = 0$. On en déduit que la fonction g ne peut pas être partout strictement positive. Elle ne peut pas non plus être partout strictement négative. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (selon lequel une fonction continue qui vaut y en un point et z en un autre passe par toutes les valeurs comprises entre y et z), g prend donc la valeur 0. Autrement dit, il existe au moins une valeur x_0 tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = f(x_0 + 1/n)$, et il existe donc une corde horizontale de longueur $1/n$.

La fonction de Paul Lévy, qui montre que ce sont les seules longueurs de corde obligées, est $g_L(x) = \sin^2(\pi x/L) - x \sin^2(\pi/L)$, qui n'a pas de corde de longueur L si L n'est pas l'inverse d'un entier. L'étude qui le montre n'est pas très facile, mais en faisant dessiner par votre ordinateur la fonction $g_L(x) - g_L(x+L)$ pour x compris entre 1 et $1-L$, vous verrez qu'elle n'est jamais nulle (voir l'encadré page 79).

On trouvera une présentation de ce théorème peu connu dans le livre *A Primer of Real Functions*, de Ralf Boas (4^e édition, The Mathematical Association of America, 1996).

Miracle 8 - La période 3 implique le chaos

Terminons, cette fois sans donner de démonstrations car elles sont trop compliquées, par un incroyable résultat sur les cycles des fonctions continues.

On considère une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Pour tout x entre 0 et 1, on considère la suite numérique suivante : $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots, f(f(\dots(x)\dots))$.

Si cette suite retombe sur le nombre x initial, on dit que l'on a un cycle. Le plus petit entier pour lequel cela se produit est l'« ordre » du cycle. Par exemple, la fonction $f(x) = 1 - x$ est telle que tout $x \neq 1/2$ engendre un cycle d'ordre 2 : en partant de $x = 1/3$, on a le cycle $1/3 \rightarrow 2/3 \rightarrow 1/3$.

On a la stupéfiante propriété suivante, découverte plusieurs fois, en particulier par Tien-Yien Li et James Yorke (« Period three implies chaos », *The American Mathematical Monthly*, vol. 82 [10], pp. 985-992, 1975) : si f a un cycle d'ordre 3, alors elle a des cycles de tout ordre. Mais l'inverse est faux : pour tout $k \neq 3$, il existe des fonctions ayant un cycle d'ordre k et n'ayant pas de cycle d'ordre 3.

Le théorème a été rendu plus précis en 1964 par le mathématicien ukrainien Oleksandr Charkovski, qui a découvert une relation de nécessité très subtile et totalement inattendue entre les ordres des cycles. L'ordre 3 implique l'ordre 5 qui implique le 7, qui implique le 9, etc. Mais aussi,

$$\begin{aligned} 3 &\rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^0 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow 3.2 \rightarrow 5.2 \rightarrow 7.2 \rightarrow 9.2 \rightarrow 11.2 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^1 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow 3.2^2 \rightarrow 5.2^2 \rightarrow 7.2^2 \rightarrow 9.2^2 \rightarrow 11.2^2 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^2 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow 3.2^3 \rightarrow 5.2^3 \rightarrow 7.2^3 \rightarrow 9.2^3 \rightarrow 11.2^3 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^3 \rightarrow \dots \\ &\vdots \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 2^n \rightarrow \dots \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

le 6 implique le 10, qui implique le 14, etc. Ce système d'implication est défini par le tableau ci-dessus qu'on doit lire ligne par ligne, du haut vers le bas.

Ce tableau ne peut pas être simplifié, car il existe par exemple des fonctions ayant des cycles d'ordre 10 (donc 14, 18, etc.), mais aucun cycle d'ordre 6, 3, 5, 7, ... Pour des détails, voir Chung-Wu Ho et Charles Morris, « A graph-theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions », *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 96 [2], pp. 361-370, 1981 (<http://bit.ly/2haC9LH>) et l'article *Sharkovskii's theorem* sur Wikipedia.

Qui aurait imaginé que le seul fait d'être une fonction continue d'un intervalle dans lui-même cachait ce tableau mystérieux ? ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Les crocodiliens, divinités ou acteurs de séries B

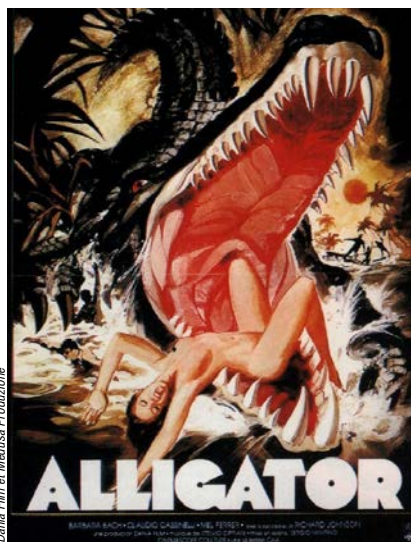
De l'Égypte antique jusqu'à Hollywood, les crocodiliens inspirent la peur par leur taille, leurs crocs et leur goût pour la chair humaine.

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ – Illustration : Marc BOULAY

Les bestiaires fantastiques sont souvent inspirés de la biodiversité réelle, actuelle ou fossile : dinosaures, tortues, primates, insectes, céphalopodes ou encore suidés, de nombreux groupes zoologiques sont repris et magnifiés dans les œuvres de fiction. Ces animaux nous inspirent parce qu'ils présentent des morphologies, des tailles ou encore des modes de vie extravagants selon les normes humaines. Parmi eux, les crocodiliens, tantôt dieux mythologiques, prédateurs sanguinaires, ennemis jurés du Capitaine Crochet ou supervillains, méritent une mention spéciale.

Les crocodiliens (ou *Crocodylia* dans le jargon des zoologistes) rassemblent aujourd'hui 23 espèces de reptiles ovipares plutôt amphibies, tropicaux et carnivores – bien que le gaviau du Gange, *Gavialis gangeticus* au long museau fin, soit piscivore. Le genre *Crocodylus* regroupe à lui seul 13 espèces et demeure le plus répandu dans la bande intertropicale, d'Amérique centrale jusqu'en Indonésie, en passant par l'Afrique avec le célèbre et dangereux crocodile du Nil (*Crocodylus niloticus*).

Dans l'Égypte antique, le dieu Sobek, représenté par un humain à tête de crocodile, était associé à l'eau et à la fertilité. Être dévoré par un crocodile vous élevait au rang d'« enfant chéri du dieu » et la présence de nombreux individus dans le Nil annonçait des crues favorables aux récoltes. Des temples ainsi qu'une célèbre



LE GRAND ALLIGATOR, sorti en 1979, illustre parfaitement le genre de film de série B où un crocodilien terrorise la population. Ce film s'inspire fortement des *Dents de la mer* mais aussi de *King Kong*, où le sacrifice d'une jeune femme pourrait apaiser le monstre.

grotte renfermant des momies de crocodiles sont dédiés à Sobek dans la ville de Médinet el-Fayoum, autrefois nommée Crocodilopolis par les Grecs. D'autres espèces de crocodiliens figurent également dans les mythes de différents peuples : ainsi, chez les Mayas, Zipacna, sorte de démon violent et arrogant, créateur des montagnes, est représenté par un grand caïman, tandis qu'une légende papoue raconte que Kabakmeli, crocodile divin, a créé le monde et ses habitants.

Le comportement parfois très agressif des crocodiliens et leur taille souvent impressionnante (avec un record de 6,17 mètres détenu par un crocodile marin, *C. porosus*, qui vivait en captivité aux Philippines jusqu'en 2011) inspirent les auteurs et réalisateurs qui en font alors de terribles monstres mangeurs d'hommes. Au cinéma, les crocodiles sont devenus en eau douce ce que les requins étaient en mer : une gueule affamée garnie de dents aiguisées surgies des profondeurs. Ainsi, après l'énorme succès des *Dents de la mer* (Steven Spielberg, 1975), de nombreuses productions ont tenté d'exploiter le filon avec des crocodiliens plus ou moins réalistes, comme avec *Les Dents de la mort* (Arch Nicholson, 1987) et de nombreux films de série B dont les titres en disent long sur la qualité des scénarios.

Outre une morphologie souvent exagérée avec une surenchère de crêtes, d'écaillures et de dents débordant des mâchoires, le dénominateur commun des