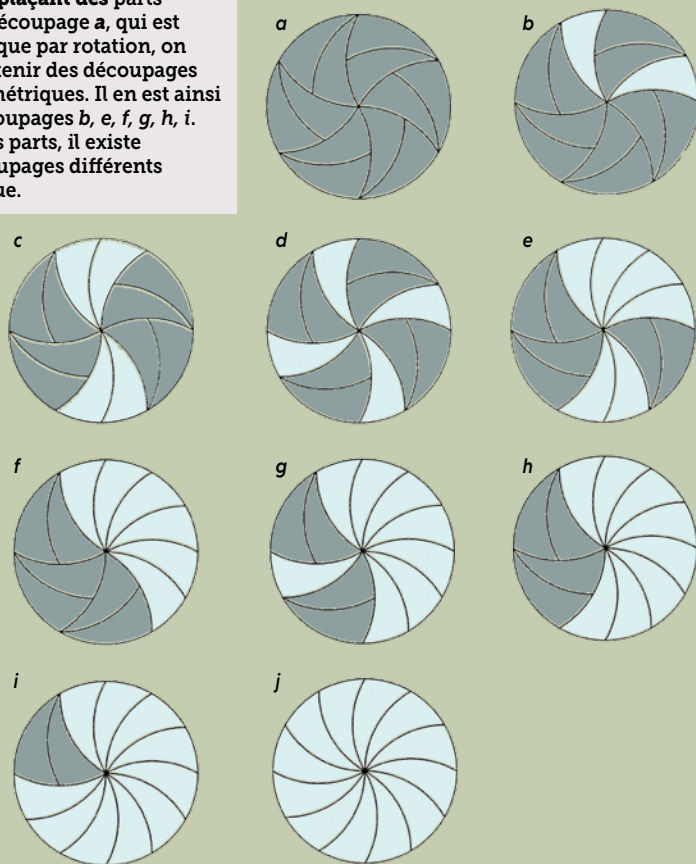


5

DÉCOUPAGES SANS SYMÉTRIE DE ROTATION

En déplaçant des parts du découpage *a*, qui est symétrique par rotation, on peut obtenir des découpages non symétriques. Il en est ainsi des découpages *b*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*. Avec ces parts, il existe 62 découpages différents du disque.



points). Cette part découpée en 2 par le milieu donne le plus élémentaire des découpages non radiaux, en 12 parts superposables.

Les dessins *b* et *c* correspondent encore à des situations où, dans la figure C1, on s'est arrangé pour avoir une part radiale symétrique à double position découpant le disque en 6, qu'on a ensuite séparée en 2, d'où un découpage non radial du disque en 12 parts superposables.

Les dessins *d*, *e* et *f* correspondent à des parts du type représenté à la figure C2: une part radiale symétrique à double position avec un périmètre composé de 5 morceaux superposables, qu'on coupe en 2, d'où un découpage non radial en 20 parts superposables.

Ces constructions répondent aux questions

Q1, Q2 et Q4 en proposant une infinité de découpages non radiaux en parts superposables, dont certaines parts ne contiennent pas le centre du disque.

PAS DE RETOURNEMENT, MAIS DES TRANCHES FINES

Les découpages obtenus sont tels que les parts recouvrant le disque sont superposables, mais la moitié d'entre elles doivent être retournées pour remplir le disque. Est-il possible d'éviter ces retournements? La réponse est donnée par un autre principe de découpage surprenant du disque en parts superposables: le découpage en tranches.

Pour se persuader que le principe fonctionne et donc que les découpages qu'on obtient sont géométriquement parfaits, pas besoin de connaissances expertes: un examen attentif des figures découvertes par les deux chercheurs de l'université de Liverpool assure qu'elles sont correctes.

On prend des parts à double position radiale (ayant un axe de symétrie ou non) et, à la condition que les courbes utilisées pour remplacer les segments ne soient pas trop éloignées des segments qu'elles remplacent, on découvre qu'un découpage en 2, parfois 3 ou plus, parties superposables est possible (voir les encadrés 3 et 4).

Nous allons maintenant pouvoir répondre à la question Q6 sur les découpages en parts superposables n'ayant pas de symétrie de rotation. Le découpage *a* de l'encadré 3 autorise des déplacements de parts qui rompent la symétrie de rotation (voir l'encadré 5).

De tels jeux sont possibles pour tous les découpages en parts superposables provenant d'une part radiale symétrique à double position. On a donc une infinité de découpages du disque dépourvus de symétrie de rotation. Un décompte précis du nombre de façons dont on peut placer les 12 parts de la figure 3a dans le disque indique qu'il y en a 62.

On le voit, non seulement les deux géomètres britanniques ont proposé plusieurs nouvelles familles infinies de découpages du disque en parts superposables, mais ces familles donnent aussi une grande variété de dispositions pour les parts.

Restent trois questions irrésolues: Q3, Q5 et Q7. Les auteurs de l'article conjecturent que les constructions trouvées avec les découpages radiaux sont les seules possibles qui découpent le disque en parts superposables. Si cette conjecture est vraie, alors leur travail donne la réponse à la question Q7, et les questions Q3 et Q5 ont des réponses négatives. Qui saura démontrer ou infirmer la conjecture proposée, si possible à l'aide d'une démonstration accessible à tous? ■

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

LA 3D COMME VOUS NE L'AVEZ JAMAIS VUE

Dans les espaces tridimensionnels, la géométrie euclidienne, celle qui nous est familière, n'est qu'une géométrie parmi huit possibles. À quoi ressemblent les autres? Une exposition vous invite à les visualiser, la plupart étant représentées pour la première fois.

La légende raconte qu'à 16 ans, en 1895, Albert Einstein s'est imaginé à califourchon sur un rayon de lumière pour mieux en comprendre le comportement. Cette expérience de pensée l'aurait conduit sur le chemin de la théorie de la relativité. Qu'a-t-il vu? Qu'a-t-il perçu? Qu'a-t-il ressenti? On l'ignore, mais cette anecdote montre que l'on a beaucoup à apprendre en se mettant dans des conditions réputées hors d'atteinte. Dans un autre registre, c'est ce que propose aujourd'hui le mathématicien Pierre Berger, de l'université

Paris 13, dans l'exposition *Esthétopies* qu'il organise à l'institut Henri-Poincaré (IHP), à Paris, avec sa consœur Jimena Royo-Letelier et les artistes Pierre-Yves Fave, Sergio Krakowski, Vincent Martial.

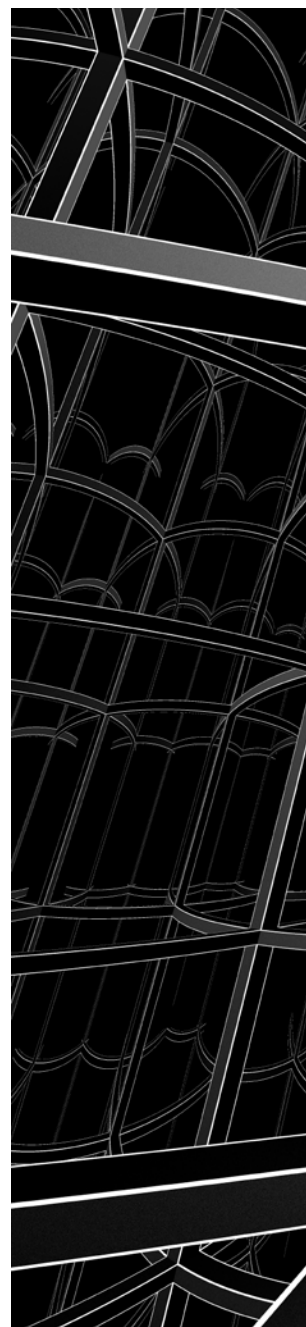
Comment? En invitant à explorer des espaces mathématiques imaginaires encore mal compris à travers un ensemble d'installations sonores et visuelles. Attardons-nous sur les « Paysages des géométries de Thurston ». De quoi s'agit-il? Formulé en 1907, le théorème de Klein, Poincaré et Koebe stipule que toute surface (les mathématiciens parlent de variété de dimension 2) peut être munie de l'une des trois géométries suivantes: euclidienne, sphérique ou hyperbolique.

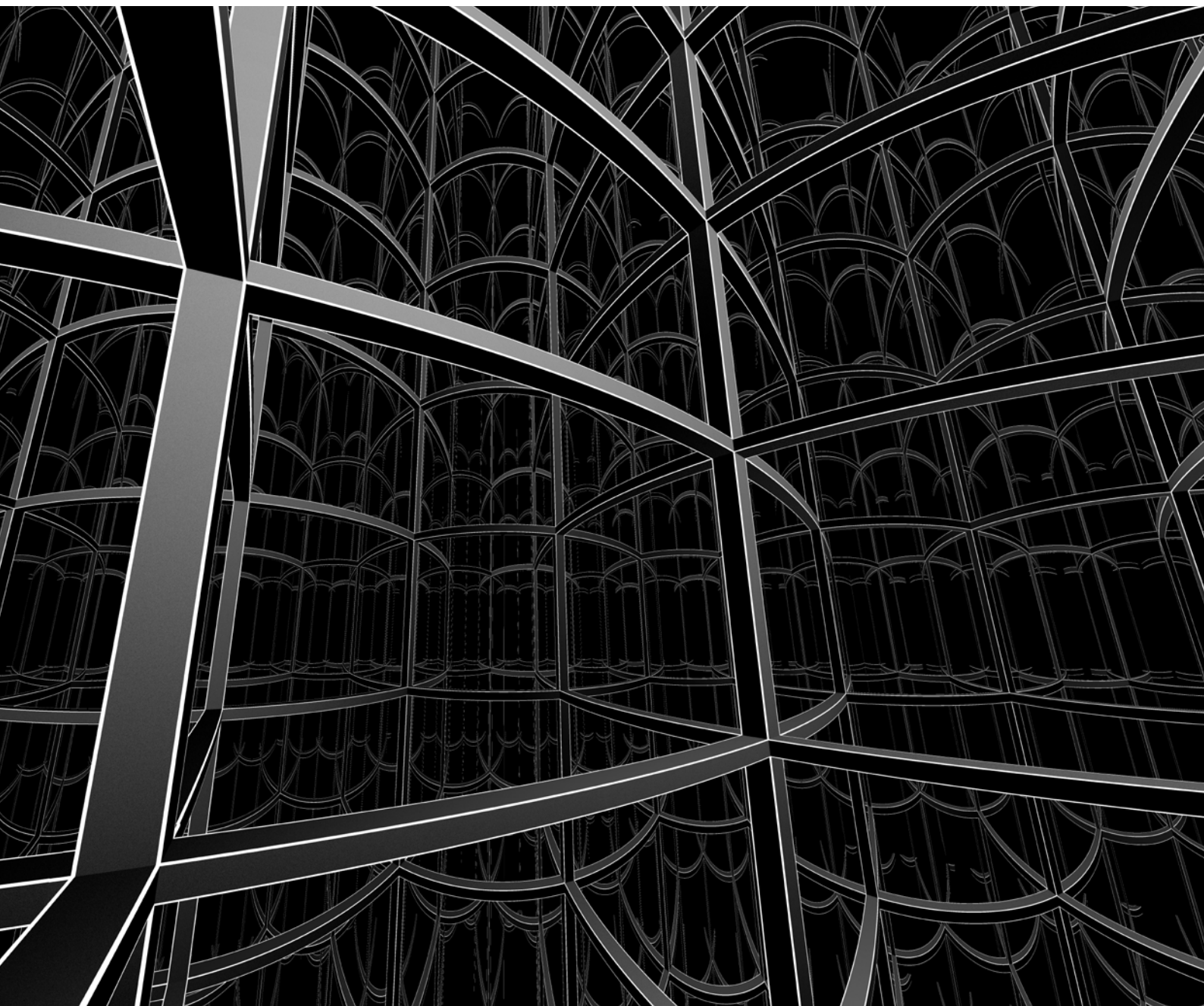
L'affaire se complique quand on s'intéresse aux variétés de dimension 3. En 2003, le Russe Grigori Perelman démontrait une conjecture émise par l'Américain William Thurston selon laquelle il est possible de découper toute variété de dimension 3 en

La géométrie H^2E^1 telle que vous ne l'avez jamais vue! Elle est une des huit géométries qui permettent de décrire des variétés tridimensionnelles.

fragments que l'on peut décrire à l'aide d'une géométrie parmi huit. Aux trois précédentes, notées (en trois dimensions) respectivement E^3 , S^3 et H^3 , s'ajoutent S^2E^1 , H^2E^1 , SOL , NIL et SL_2 .

Ces géométries décrivent ainsi huit espaces fondamentaux qui s'offrent aux explorations des mathématiciens. Dans les années 1990, l'école de William Thurston, au Geometry Center, à l'université du Minnesota, aux États-Unis, avait proposé de représenter ces géométries en dessinant les paysages que verrait un visiteur à l'intérieur de ces espaces. Cette école était parvenue à simuler numériquement trois des géométries (sphérique S^3 , euclidienne





E^3 et hyperbolique H^3). Les cinq autres géométries sont restées durant plus de vingt ans des problèmes ouverts, jusqu'aux travaux récents de Pierre Berger, à l'interface des mathématiques fondamentales et numériques. Dans cette exposition sont présentés des paysages dans les huit géométries de Thurston, sept d'entre elles étant traitées rigoureusement par un logiciel créé à cet effet. À l'instar d'Einstein sur son rayon, on comprend mieux les espaces en se plaçant à l'intérieur.

Cette visualisation d'espaces totalement abstraits nécessite d'y insérer des objets élémentaires, en l'occurrence une série de polyèdres identiques. On peut aussi

suivre le trajet d'un rayon lumineux qui respecte la géométrie de l'espace: rectiligne dans E^3 , la lumière est déviée dans les autres géométries et peut, selon la courbure, s'enrouler. Devant chaque photographie, qui est plus qu'une simple simulation numérique, le public est confronté à une architecture intrigante qui le conduit à s'interroger sur son propre espace.

Une autre installation propose une démarche similaire, mais avec du son. Au centre d'un cube dont des tableaux noirs constituent certaines faces, l'auditeur perçoit les sons captés par 60 micros répartis dans l'institut, puis traités mathématiquement et informatiquement pour simuler le

plongement du bâtiment dans l'espace mathématique noté $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Une sélection de modèles mathématiques de l'institut, de courtes vidéos définissant les variétés d'espaces et d'autres installations encore complètent l'exposition. En fin de compte, elle vous offre l'occasion de confronter votre imagination à celle des mathématiciens. Laquelle des deux est la plus illimitée? ■

*Esthétopies, à l'institut Henri-Poincaré,
Paris, du 8 mars au 8 juillet 2017.
<http://esthetopies.ihp.fr>*



Retrouvez la rubrique
Art & science sur
www.pourlascience.fr

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY
professeur de physique
à l'université
Pierre-et-Marie-Curie, à Paris



ÉDOUARD KIERLIK
également professeur
de physique à l'université
Pierre-et-Marie-Curie

UNE VISION PROGRESSIVE... PAS SI NETTE

Les verres progressifs sont pour les presbytes une grande invention. Mais quelle que soit leur qualité, il leur est impossible de corriger complètement les défauts de la vision.

Dès le Moyen Âge, on savait corriger, à l'aide de lunettes constituées de verres grossièrement polis, la myopie ou l'hypermétropie – pour lesquelles l'œil voit flou respectivement de loin ou de près. Mais que faire face à la presbytie, qui vient avec l'âge et qui est due à la perte progressive de la capacité de « mise au point » de l'œil, l'accommodation ? Depuis une cinquantaine d'années, on réalise des verres dits progressifs – et plus récemment encore des lentilles de contact multifocales – qui améliorent beaucoup le confort de vision des personnes atteintes de ces troubles. Mais de tels dispositifs sont difficiles à concevoir. De plus, ils ne sauraient nous rendre une vue parfaite. Pourquoi ?

CORRIGER LA MISE AU POINT

Idéalement, lorsque l'œil est au repos, l'effet combiné de l'interface courbe air-cornée et de la lentille que constitue le cristallin focalise l'image d'un objet lointain (nous dirons « à l'infini ») sur la rétine.

En déformant son cristallin, l'œil fait varier sa puissance optique (les fameuses « dioptries ») et peut ainsi former l'image d'objets plus proches. C'est l'accommodation. Pour un œil jeune, le point le plus distant de vision nette, ou *punctum remotum*, se situe à l'infini, tandis que le point de netteté le plus proche, ou *punctum proximum*, est à environ 7 centimètres.

Chez les myopes, l'œil focalise trop : ils voient trouble au-delà d'une certaine distance, mais voient net de plus près. On corrige facilement ce défaut en ajoutant une lentille divergente devant l'œil.

Inversement, les hypermétropes ont des yeux qui ne focalisent pas assez. Même pour voir à l'infini, leurs yeux doivent travailler et ils voient mal de près. La correction consiste alors à ajouter une lentille

