

en 1668 que les insectes ne naissent pas par génération spontanée à partir de matières en décomposition à l'aide de ce que nous appelons aujourd'hui des expériences témoins.

Or les intentions et modalités que suivent les savants dans leurs approches expérimentales sont souvent bien différentes de celles qui nous sont familières aujourd'hui. Tout est sujet à études expérimentales, surtout l'histoire naturelle des Anciens. En 1658, par exemple, le père Huet, grande figure de la République des Lettres, jette dans le feu des salamandres d'une espèce normande pour vérifier si cette espèce diffère ou non de celle décrite par Plin et Dioscoride. Et comme les salamandres ne résistent pas à l'épreuve, il en conclut qu'il s'agit bien de deux espèces distinctes.

Par ailleurs, l'expérimentation en tant que telle suscite des débats au XVII^e siècle, car certains déplorent la dimension coercitive qu'y attache Bacon. Pour beaucoup d'auteurs, bousculer la nature, lui extorquer ses secrets par la contrainte, donne des résultats artificiels, bien inférieurs à ceux obtenus par la seule observation d'une nature laissée à son libre cours.

Autre argument clé du discours des Modernes, qui pourrait laisser croire à une rupture par rapport au passé: le recours à la raison. L'expérience est aveugle si elle n'est éclairée par la raison, répète-t-on volontiers. L'expérience et la raison, voilà le leitmotiv des Modernes qui font du recours à cette dernière la principale caractéristique de leur démarche. Or cette idée n'a rien de nouveau. Galien, au I^{er} siècle de notre ère, comme Aristote six siècles avant lui, considère déjà que raison et expérience doivent être les deux piliers de la médecine et des arts. Et pour les scolastiques du Moyen Âge, la nature humaine se distingue de l'animalité par sa rationalité. Il ne faut donc pas croire les Modernes modernes, par exemple Charles Perrault dans son *Parallèle des Anciens et des Modernes* (1688-1697), quand ils ramènent leur querelle avec les partisans des Anciens à celle de la raison contre l'autorité.

UNE ÉMANCIPATION TIMIDE

On le voit, les savants Hippocrate et Aristote (Anciens), Harvey (Moderne ancien) et Descartes (Moderne moderne) occupent toute leur place dans la querelle des Anciens et des Modernes, au même titre qu'Homère et Virgile (Anciens), Boileau (Moderne ancien) et C. Perrault (Moderne moderne) dans la sphère littéraire et artistique. Souvent, les historiens de la littérature voient dans cette confrontation le triomphe des Modernes. Lesquels opposent la liberté intellectuelle de tout un chacun au poids de traditions séculaires mis en avant par leurs adversaires. Or l'histoire des sciences au XVII^e siècle montre que les Modernes, qui mettent beaucoup de temps à croire en eux, peinent à gagner la partie.

SCIENCE CLASSIQUE OU SCIENCE MODERNE?

Au XVII^e siècle, la notion de « science » n'a pas la même signification qu'aujourd'hui. Il faut en effet y inclure des pratiques comme l'astrologie, la chiromancie, la magie, l'alchimie et des objets d'étude tels que la licorne, le centaure ou l'Enfer, qui ne relèvent plus du champ scientifique aujourd'hui. Mieux vaudrait, d'ailleurs, parler de « philosophie naturelle » ou de « physique », comme on le fait volontiers jusqu'au XVIII^e siècle. Si l'on continue à parler de « science » à

l'âge classique, c'est donc uniquement par commodité, mais avec le risque de commettre des anachronismes. Par ailleurs, doit-on parler de science classique ou de science moderne ? Il n'est pas possible de trancher, et les deux dénominations, qui désignent le même objet, se font concurrence dans les écrits des historiens des sciences. Tout au plus pourrait-on dire que le qualificatif « classique » renvoie davantage à la science du XVII^e siècle et qu'il est moins porteur d'enjeux idéologiques que celui de « moderne », qu'on peut opposer à « ancien », comme dans la querelle des Anciens et des Modernes.

La bataille avec les partisans des Anciens, qui voient dans leurs héros des précurseurs en tout des Modernes, est féroce partout en Europe, ainsi qu'en témoignent par exemple *La guerre des auteurs Anciens et Modernes* (1671), de l'avocat Gabriel Guéret, *l'Histoire poétique de la guerre nouvellement déclarée entre les Anciens et les Modernes* (1688), du diplomate François de Callières ou le *Récit véritable, & exact, d'une bataille Entre les Livres anciens & modernes, Donnée Vendredi passé dans la bibliothèque de St. James* (1704), de l'essayiste irlandais Jonathan Swift (voir l'encadré page ci-contre).

À aucun moment, au XVII^e siècle, la science moderne ne semble vraiment s'émanciper de la science antique. Ce n'est que pas à pas, au terme de questionnements, de démarches et de procédures parfois insolites, que les Modernes en viennent à faire une œuvre personnelle. Le XVII^e siècle n'est pas cet âge souvent décrit du rationalisme prenant son essor en rejetant le carcan de l'autorité. Si Bacon répète que la vérité est fille du temps et non de l'autorité, il ne dit pas qu'elle doit être fille de l'expérience. L'expérimentation n'a pas plus de poids que la phrase d'un Ancien, *a fortiori* qu'un passage de la Bible. La science du XVII^e siècle ne désenchant pas brutalement le monde et ne témoigne d'aucune révolution scientifique. Comme Voltaire l'écrit fort justement, « les idées ne marchent pas comme les divinités d'Homère, qui en trois pas traversent le ciel. La raison humaine voyage à petites journées ». ■

BIBLIOGRAPHIE

P. Duris, *Quelle révolution scientifique ? Les sciences de la vie dans la querelle des Anciens et des Modernes (xvi^e-xviii^e siècles)*, Hermann, 2016.

C. Lehner et H. Wendt, *Mechanics in the Querelle des Anciens et des Modernes*, *Isis*, vol. 108 (1), pp. 26-39, 2017.

P. Bullard et A. Tadié (dir.), *Ancients and Moderns in Europe : Comparative Perspectives*, Voltaire Foundation, 2016.

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

LE TOUT EST-IL PLUS QUE LA SOMME DE SES PARTIES?

Mettre à l'épreuve une vieille maxime un peu trop vague est un excellent stimulant mathématique: selon le sens qu'on donne aux mots, le mathématicien trouve que le tout est plus que la somme de ses parties... ou l'inverse!

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal).

Le dernier ouvrage
 de J.-P. Delahaye:
**Mathématiques
 et mystères**,
 une sélection de ses
 chroniques parues
 dans *Pour la Science*
 (Belin, 2016).



La maxime «Le tout est plus que la somme de ses parties» serait due au grand Aristote. Abondamment évoquée, elle est presque toujours applaudie sans sens critique. D'après les spécialistes, on ne trouve pas dans Aristote la phrase tant adulée. Seules certaines considérations du grand philosophe sur ce qu'est une droite évoquent une idée proche. Pour Aristote, la droite géométrique n'est pas composée de points qui seraient mis côte à côte et, ensemble, lui donneraient corps, comme nous le propose aujourd'hui la conception ensembliste. Pour lui, la droite est, en ce sens, plus que la somme de ses parties, les points.

L'intuitionnisme mathématique est une conception philosophique qui veut laisser à nos perceptions intuitives naturelles toute leur importance, sans les réduire à des manipulations symboliques. Elle refuse de traiter l'infini et le continu, donc la droite géométrique, de la manière simplifiée qu'on pratique aujourd'hui et adopte, vis-à-vis du continu, une attitude proche de celle d'Aristote: la droite est bien plus qu'un ensemble de points disposés côte à côte!

Toutefois, cette description de la droite et sa réduction ensembliste à des points est un problème de philosophie des mathématiques, alors que, lorsqu'on évoque le *tout* et la *somme de ses parties*, ce n'est pas à cela qu'on pense. L'idée est plutôt celle de la bicyclette qui est bien plus que la somme de ses composants posés au sol sans ordre: roues, pédales, chaînes, selle, etc. Pour enfourcher l'engin et aller faire un tour, il faut d'abord

assembler soigneusement ses parties, ce qui confère au *tout* des propriétés que ne possède aucun de ses composants. De même, une cellule n'est pas un tas de molécules, et un être humain n'est pas non plus un sac d'organes serrés en vrac.

C'est sans doute à cause de tels exemples que la formule est reprise par toutes sortes de systèmes philosophiques à propos de toutes sortes de sujets. Mentionnons plusieurs de ces idées et théories qui s'appuient sur la maxime.

UNE MAXIME D'ARISTOTE BRANDIE PAR DIVERSES THÉORIES

Le «holisme» du Sud-Africain Jan Christiaan Smuts (1870-1950) voit dans la nature une tendance à former des *touts* plus grands que la somme de leurs parties, en particulier grâce à l'évolution biologique.

L'idée de «synergie» évoque que le résultat d'une action collective est supérieur à la somme des résultats des actions des individus. Elle est évoquée quand plusieurs acteurs travaillant à un même but réussissent à obtenir mieux que ce qu'ils obtiendraient en œuvrant chacun de son côté.

En biologie, et dans l'étude des systèmes complexes, on parle d'«émergence» pour décrire une entité regroupant divers composants où l'on voit apparaître en son sein des propriétés ou des sous-systèmes qui ne figurent dans aucun des composants initiaux.

En psychologie, la Gestalt-thérapie du psychiatre allemand Fritz Perls (1893-1970) défend

qu'un individu doit être considéré comme un tout qu'il ne faut pas tenter de réduire à la somme de ses parties.

En médecine, en chimie et en pharmacologie, on mentionne l'«effet cocktail» quand l'action combinée de plusieurs substances n'est pas le simple cumul des actions de chacune des substances.

On discerne parfois dans ces théories ou mouvements la volonté de mettre en évidence des réalités dépassant la raison et le prétendu réductionnisme scientifique. La satisfaction un peu trop facile de donner un nom savant à ce qui n'est, dans certains cas, qu'un désir de mystère et même de magie ne doit pas faire illusion: on n'explique rien en parlant de holisme, de synergie, d'émergence, de Gestalt ou d'effet cocktail. Alors, peut-on donner un sens à la maxime «Le tout vaut plus que la somme des parties» et mieux comprendre ce que cela signifie? Tel sera notre objectif ici.

PROUVER LA MAXIME?

Pour que la maxime ait un énoncé précis, et si possible démontrable, il faut fixer une notion de valeur et constater (ou encore mieux, prouver) que la valeur du *tout* est plus grande que la somme des valeurs des *parties*. Or pour effectuer une somme et dépasser les idées vagues, il faut choisir ou définir une mesure. Il faut donc associer un nombre au *tout* et d'autres aux *parties*. La maxime, avec peut-être des hypothèses restrictives à formuler soigneusement, devrait alors devenir un théorème.

Il semble assez naturel de rechercher cette valeur sous la forme d'un contenu en information ou d'une mesure de complexité, car ce «plus» évoqué est vraisemblablement un enrichissement, ce qu'aujourd'hui nous cherchons à comprendre en employant les mots information et complexité. Pour préciser la maxime sur le *tout* et les *parties*, on doit considérer des objets $A_1, A_2, \dots, A_k$ associés chacun à une certaine complexité: $Comp(A_1), Comp(A_2), \dots, Comp(A_k)$. Ne précisons pas, pour l'instant, de quelle complexité il s'agit, ni son rapport éventuel avec de l'information. Si la maxime est vraie, le *tout*, noté $Union(A_i)$, aura une complexité plus grande que la somme des complexités individuelles: $Comp(Union(A_i)) > Comp(A_1) + \dots + Comp(A_k)$.

Sur les trois essais suivants qui viennent naturellement à l'esprit, ce souhait n'est pas exaucé!

ESSAI 1: LES ENSEMBLES

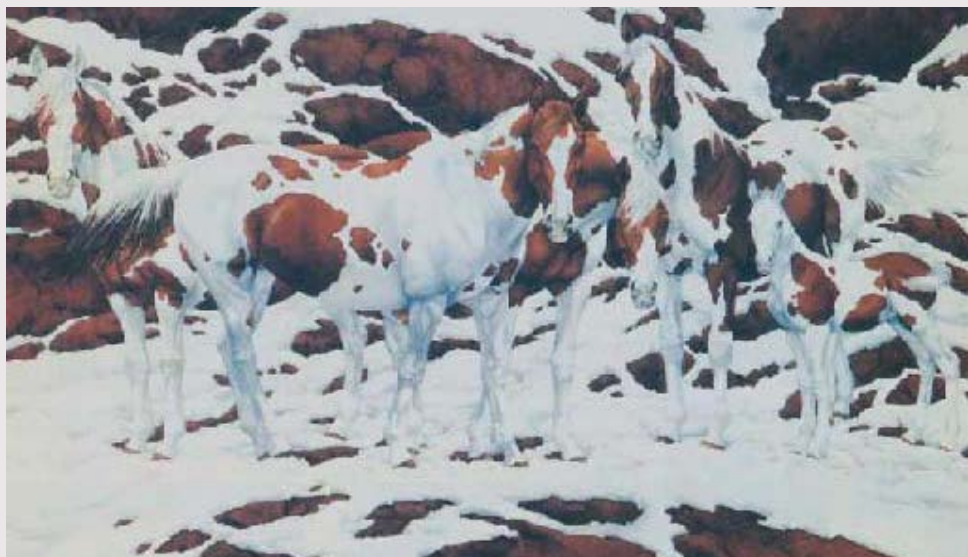
Considérons pour objets des ensembles au sens mathématique et, pour mesure de leur complexité, le nombre de leurs éléments (leur *cardinal*). Ce n'est pas absurde: plus un ensemble contient d'éléments, plus il est complexe. Il y a alors un rapport entre les deux quantités visées, mais inverse de celui attendu: $Card(Union(A_i)) \leq Card(A_1) + \dots + Card(A_k)$.

Lorsqu'un élément est présent dans plusieurs des ensembles considérés, il compte plusieurs fois dans le membre de droite et une seule fois dans le membre de gauche de l'inégalité. Dans le cas de deux ensembles, on précise >

DANS LA GESTALT-THÉORIE, LE TOUT EST PLUS QUE LA SOMME DE SES PARTIES

1

L'idée de la Gestalt-théorie, ou théorie de la forme, est qu'il faut considérer la perception d'une forme comme un tout qui est plus que la somme des perceptions des parties. On illustre souvent cette idée avec l'extraction immédiate d'une figure, ici des chevaux d'un ensemble, le tout étant détecté avant ses parties (opération de découpage).



> facilement ce supplément dans la somme, car:
 $\text{Card}(A \text{ union } B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \text{ intersection } B)$.

Dans le cas d'ensembles finis en nombre fini, il n'y a égalité que lorsqu'il n'y a pas d'éléments communs à deux ensembles, ce qui est rare. Ainsi, notre première tentative de formalisation donne et démontre une maxime opposée à celle attribuée à Aristote!

ESSAI 2: LES ALGORITHMES

Prenons pour objets des problèmes algorithmiques concernant les nombres entiers n . Quelques exemples:

- A_1 : Factoriser n ;
- A_2 : Trouver la somme des diviseurs de n ;
- A_3 : Déterminer si n est un nombre premier;
- A_4 : Déterminer si n est un carré parfait;
- etc.

Prenons en guise de *tout* le problème de résoudre l'ensemble des problèmes élémentaires simultanément (pour un n fixé, ou pour un nombre fini de valeurs de n). Comme mesure de complexité, prenons, cela va de soi pour qui s'intéresse aux algorithmes, le nombre d'opérations ou la taille de la mémoire nécessaires pour effectuer la résolution.

Il a par exemple été démontré en 2002 que savoir si un entier n est premier est polynomial en fonction de la taille de n , c'est-à-dire que cela exige une quantité de calculs élémentaires qui croît comme un polynôme dont la variable est n . On est certain que le polynôme en question est de degré inférieur ou égal à 12 et on conjecture qu'il est de degré inférieur ou égal à 6.

Avec ce type de formalisations naturelles pour qui s'occupe d'algorithmes, la maxime attribuée à Aristote est à nouveau inexacte. En effet, la complexité de la résolution du *tout* sera au plus la somme des complexités des *parties*, et sera souvent inférieure. Certains problèmes bénéficieront des calculs faits pour d'autres, ce qui permettra des économies de ressource (en temps et en mémoire) pour qui cherche à traiter les problèmes simultanément.

Examinons un exemple: factoriser à la fois le nombre 375 (problème A) et le nombre 375000 (problème B). On pourra d'abord factoriser 375, ce qui donne $3 \times 5 \times 5 \times 5$, d'où $375000 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1000$. Il restera alors à factoriser 1000, ce qui donne $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$, d'où $375000 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$. La complexité (en nombre d'opérations élémentaires) de la résolution de A et B est plus faible que $\text{Comp}(A) + \text{Comp}(B)$, car on a profité du calcul fait pour A quand on s'est intéressé à B.

ESSAI 3: LA COMPLEXITÉ DE KOLMOGOROV

Lorsqu'on considère des objets numériques finis, une autre idée naturelle est de mesurer leur valeur par la complexité de Kolmogorov.

Par définition, la complexité de Kolmogorov d'un objet numérique A, par exemple une image, que nous noterons $\text{Kolmo}(A)$, est la taille du plus petit programme qui produit A. Produire une image toute noire demande un programme très court, alors que produire l'image d'un visage nécessite un programme assez long. Même si les images ont la même taille en nombre de pixels, la première est moins complexe que la seconde, ce qu'indique correctement la complexité de Kolmogorov.

Cette mesure de complexité est unanimement considérée comme la bonne mesure du «contenu en information» d'un objet numérique. Généralisant l'entropie de Claude Shannon, elle est utilisée en informatique, en physique, en philosophie des sciences, en biologie, en psychologie. En pratique, calculer $\text{Kolmo}(A)$ revient à rechercher son fichier compressé le plus court. Même si l'on ne réussit qu'imparfaitement à trouver ce fichier compressé optimal, disposer de valeurs approchées de $\text{Kolmo}(A)$ grâce aux algorithmes de compression usuels est utile et permet par exemple de classer des données.

Pas de chance, et c'est plus grave ici car il s'agit vraiment d'une mesure de contenu en information, la complexité de Kolmogorov d'un ensemble d'objets numériques finis est inférieure ou égale à la somme des complexités de Kolmogorov des objets pris un à un. C'est un théorème de la théorie:

$$\text{Kolmo}(\text{Union}(A_i)) \leq \text{Kolmo}(A_1) + \dots + \text{Kolmo}(A_k).$$

L'idée de la démonstration est simple:

- les programmes les plus courts qui engendrent $A_1, A_2, \dots, A_k$, peuvent être mis bout à bout;
- ils constituent alors un programme P qui engendre le *tout* (c'est-à-dire $\text{Union}(A_i)$);
- ce programme P n'est peut-être pas le plus court qui donne le *tout*, mais le programme le plus court qui donne le *tout* sera plus court (puisque'il y a déjà ce programme-là) et donc la complexité du *tout* sera inférieure à la somme des complexités des *parties*. Encore une fois, la théorie démontre une inégalité inverse de celle de la maxime.

Fort de ces exemples, il semblait que jamais on ne pourrait trouver de situations mathématiques où la complexité du *tout* est plus grande que la somme des complexités des objets pris individuellement. Même en cherchant le plus honnêtement possible, quelle que soit la façon (naturelle) de définir et de mesurer la complexité, impossible de trouver un *tout* meilleur que la somme des *parties*!

Précisons que dans cette recherche d'une mesure de complexité satisfaisant la maxime, on a exclu les méthodes factices où l'on place dans le *tout* autre chose que l'ensemble des *parties*. Par exemple, on ne peut pas considérer comme une illustration acceptable de la maxime l'affirmation qu'il y a dans un mot

plus que ce qu'il y a dans l'ensemble des lettres qui le composent.

Il est vrai que dans le mot COMPLEXE, il y a plus que dans la donnée de l'ensemble de ses lettres C, E, L, M, O, P, X, mais c'est bien évidemment parce qu'on ordonne les lettres et qu'on en répète, et que cet ordre et ces répétitions ajoutés aux parties constituent un «plus» qu'on trouve dans le *tout* et qui est absent de la somme des *parties*.

De telles illustrations de la maxime étudiée sont triviales et sans portée, puisqu'elles sont fondées sur un ajout caché quand on constitue le *tout*. Les cas soi-disant spectaculaires de synergie, d'effets cocktail et autres doivent le plus souvent s'interpréter de la même façon. Oui, un vélo est plus que ses parties étalées au sol, mais c'est parce qu'on organise ses parties en les assemblant de la bonne façon et que cette bonne organisation ajoute aux parties.

LA COMPLEXITÉ COMME CONTENU EN CALCUL

La théorie algorithmique de l'information qui détaille ce qu'on peut dire et démontrer sur la complexité de Kolmogorov a introduit une notion qui va nous sauver: la «profondeur logique de Bennett» qui est le temps de calcul du plus court programme qui produit l'objet numérique fini auquel on s'intéresse. C'est une mesure de complexité structurelle, ou encore, une mesure de «contenu en organisation et en calcul», alors que la complexité de Kolmogorov n'est qu'une mesure de «contenu incompressible d'information». Plus un objet est finement structuré, comme l'est par exemple un organisme vivant, plus sa profondeur logique est grande.

Ces deux mesures de complexité, complexité de Kolmogorov et profondeur logique, diffèrent radicalement pour les objets aléatoires dont l'exemple typique est une suite finie de 0 et de 1 obtenue par des tirages successifs à pile ou face. Pour un tel objet aléatoire, la complexité de Kolmogorov est maximale: on ne peut pas le décrire de manière sensiblement plus brève qu'en en donnant les éléments un à un, ce qui est la pire situation pour un objet numérique de taille n , puisque l'objet à produire doit alors être écrit explicitement dans le programme, lequel est nécessairement aussi long que l'objet décrit: une suite aléatoire des bits est incompressible.

À l'inverse, la profondeur logique d'une suite aléatoire de longueur n est minimale pour les suites de longueur n . Une suite aléatoire n'est pas structurée, son contenu en organisation est presque nul. Sa profondeur logique de Bennett est réduite au minimum, puisque exécuter le programme le plus court

2

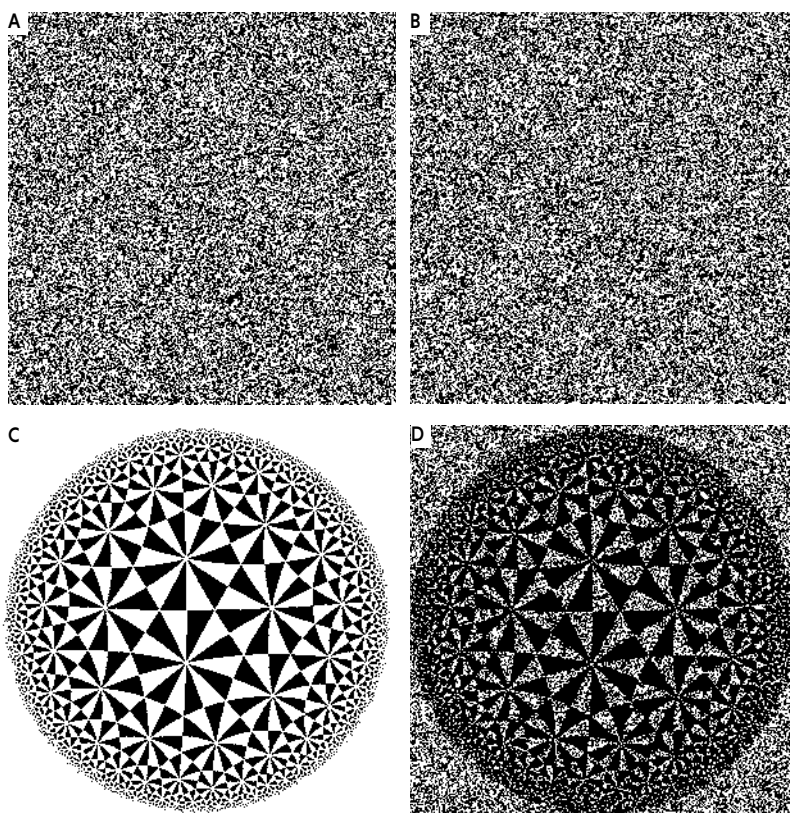
LA CRYPTOGRAPHIE VISUELLE À LA RESCOURSE

La cryptographie visuelle fournit un exemple incontestable de situation où le tout est plus que la somme des parties, plus précisément où le contenu en structures du tout est bien supérieur à la somme des contenus en structures de chacune de ses deux parties prises isolément.

On considère une image A composée à parts égales de points noirs et blancs disposés aléatoirement. Cette image n'a aucun contenu en structure, ou, dit autrement, sa profondeur logique de Bennett est très faible. On considère une image C ayant, elle, un contenu en structure important: il s'agit ici d'un pavage du plan hyperbolique. On calcule l'image B = A xor C.

Un point est blanc dans B si les points correspondants de A et C sont tous les deux blancs ou tous les deux noirs; sinon, il est noir. L'image B est du même type que l'image A: elle n'a aucun contenu en structure et donc une profondeur très faible. Celui qui dispose de A et de B peut pourtant reconstituer C en calculant $A \text{ xor } B = A \text{ xor } (A \text{ xor } C) = (A \text{ xor } A) \text{ xor } C = C$. Il en résulte que $\text{Profondeur}(A \text{ et } B) \approx \text{Profondeur}(C)$, qui est supérieure à $\text{Profondeur}(A) + \text{Profondeur}(B)$.

Notons que si l'on imprime A et B sur des feuilles transparentes et qu'on les superpose, on voit apparaître l'image D, une forme bruitée de l'image C. C'est le principe de base de la cryptographie visuelle.



> qui engendre la suite aléatoire revient à exécuter un programme qui recopie une donnée explicitement inscrite dans le programme et qu'une telle copie ne prend presque pas de temps (contrairement par exemple à la production de chiffres du nombre π par un programme court).

Dans le cas le plus général, la profondeur logique de Bennett n'indique pas que le *tout* a une complexité supérieure à la somme des complexités des *parties*. En effet, si vous prenez un *tout* composé de k fois le même objet, sa profondeur logique sera à peu de chose près la complexité d'un seul objet, et donc sera nettement inférieure à la somme des complexités

des objets pris un à un. Il ne peut y avoir un théorème du *tout* et des *parties* exprimant sans restriction la maxime, même avec la profondeur logique de Bennett!

En revanche, et c'est là une belle surprise, il existe des cas où l'on peut établir avec certitude (ce qui est assez rare quand on manie le concept de profondeur logique) que la complexité d'un tout composé de plusieurs objets est supérieure à la complexité de la somme de chacun d'eux. Voici un tel exemple imparable.

Considérons les deux images A et B de l'encadré 2. Chacune est composée de 0 (pixels blancs) et de 1 (pixels noirs) d'une manière

UN CAS ÉLÉMENTAIRE FAVORABLE

3

Mesurons la complexité d'un ensemble d'objets par le nombre de liens que ces objets peuvent avoir entre eux. Quatre objets A, B, C, D ont par exemple potentiellement 6 relations possibles entre eux : A avec B, A avec C, A avec D, B avec C, B avec D, C avec D.

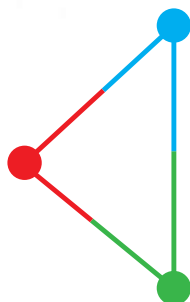
Ce nombre, 6, est le nombre de poignées de mains que 4 personnes s'échangent quand elles se rencontrent, ou le nombre de conversations en face-à-face que 2 personnes parmi 4 peuvent avoir. C'est le nombre d'arêtes possibles dans un graphe (non orienté et sans arête joignant un sommet à lui-même) ayant 4 sommets (*ci-contre, en bas*).

Pour n sommets, ce nombre devient $n(n-1)/2$. Ce nombre est une mesure envisageable de la complexité d'un ensemble d'éléments, car il correspond à la richesse des interactions possibles entre des paires d'éléments. Si l'on considérait les interactions à trois, la formule $n(n-1)/2$ deviendrait $n(n-1)(n-2)/6$ et une généralisation est possible pour les interactions à k , qui conduirait à utiliser les éléments du triangle de Pascal.

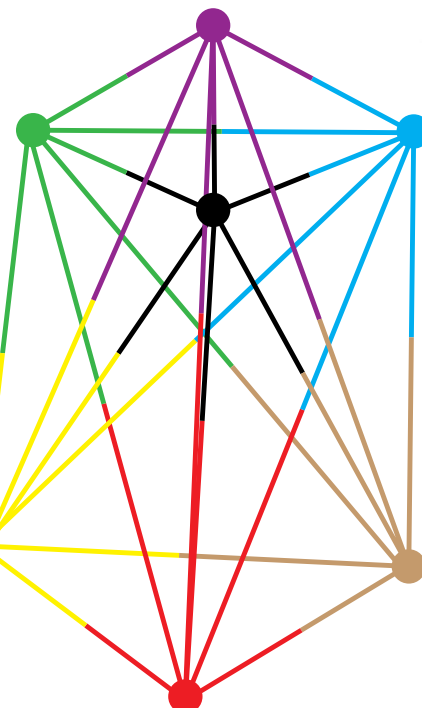
Pour cette mesure de complexité, a-t-on la propriété suggérée par la maxime attribuée à Aristote ? La réponse est oui. Si par exemple on considère n objets et qu'on les groupe en deux parties ayant respectivement a et b objets avec $a+b=n$ ($a \geq 1, b \geq 1$), alors il est facile d'établir que : $n(n-1)/2 > a(a-1)/2 + b(b-1)/2$. La richesse en interactions mesurée comme nous venons de le faire croît non linéairement en fonction du nombre d'éléments, et c'est ici la raison du succès de l'idée que le tout est plus que la somme des parties.



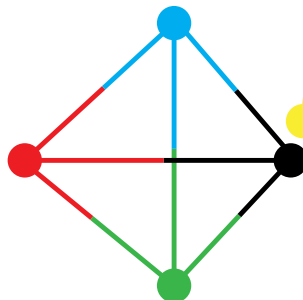
Complexité = 3



Complexité = 21



Complexité = 6



aléatoire. Leur profondeur logique de Bennett est donc minimale, comme nous venons de le voir : un objet aléatoire n'est pas structuré et a donc une profondeur logique minimale, comparable à celle d'une suite de même longueur composée uniquement de 0.

Le *tout* (composé des deux images A et B) n'est pourtant pas aléatoire, car les deux images sont intimement corrélées. Pour s'en rendre compte, on applique l'opération logique «ou exclusif», notée xor, entre A et B, ce qui donne une image C : quand les deux pixels homologues de A et B sont identiques, on met un 0 pour le pixel homologue de l'image C, sinon on met un 1 : $0 \text{ xor } 0 = 0$, $1 \text{ xor } 1 = 0$, $0 \text{ xor } 1 = 1$ et $1 \text{ xor } 0 = 1$.

Les images A et B n'ont pas été produites n'importe comment, et le xor entre A et B fait apparaître un beau dessin géométrique qui est la représentation d'un pavage par des triangles du plan hyperbolique. Le même procédé, que nous allons expliquer, sert de base à ce que l'on dénomme la «cryptographie visuelle», il permet d'obtenir n'importe quelle image aussi structurée qu'on le souhaite en partant de deux objets parfaitement non structurés (mais corrélés).

Le procédé donnant A et B est assez simple. On part d'une image aléatoire A : 50 % de pixels blancs et autant de pixels noirs, tirés au hasard. On choisit une image C quelconque, éventuellement très structurée. L'image B est alors construite en calculant $A \text{ xor } C$. En faisant le calcul $A \text{ xor } B$, on retombera sur C, car :

$$\begin{aligned} A \text{ xor } B &= A \text{ xor } (A \text{ xor } C) \\ &= (A \text{ xor } A) \text{ xor } C = [0] \text{ xor } C = C. \end{aligned}$$

La dernière égalité mentionne l'image notée [0], qui désigne celle composée uniquement de pixels blancs. Le fait que $[0] \text{ xor } C = C$ résulte de ce que $0 \text{ xor } 0 = 0$ et $0 \text{ xor } 1 = 1$.

L'image B est parfaitement aléatoire elle aussi. Celui qui ne dispose que de A seul, ou que de B seul, ne peut strictement rien en tirer. Ni A ni B n'ont le moindre contenu en organisation.

Il résulte de tout cela que le programme le plus court qui donnera le *tout* sera le programme le plus court de A associé avec le programme le plus court de C, suivi d'un calcul du ou exclusif entre A et C, ou sera quelque chose de très proche. Puisque C est structuré de façon non triviale, ce programme minimal pour le *tout* aura un temps de calcul plus long que la somme des temps de calcul des programmes minimaux pour A et minimaux pour B (qui sont des programmes très rapides, puisqu'il n'y a aucune structure dans A, et aucune structure dans B). La profondeur logique du *tout* est donc supérieure à la somme de la profondeur logique de A et de la profondeur logique de B.

On a ainsi ce qu'on voulait : un cas où la maxime aristotélicienne est démontrable. L'énoncé qui permet de prouver l'inégalité est un théorème : «Quelle que soit la profondeur logique d'un objet numérique C de taille *n*, on peut construire deux objets A et B, chacun de taille *n*, de façon que A et B soient chacun de profondeur minimale (parmi les objets de taille *n*), et tels que le *tout* constitué de A et de B soit de profondeur équivalente à celle de C et donc supérieure à la somme de la profondeur de A et de la profondeur de B.»

LE CAS DES SYSTÈMES COMPLEXES

Il est probable que ceux qui évoquent ce *tout* supérieur à la somme de ses *parties* ont en tête des situations où c'est bien l'organisation (ou encore «la richesse en structures», «la valeur fonctionnelle», «le contenu en calcul») qui sert à mesurer la valeur du *tout* et celle de ses *parties*. L'idée exprimée par la maxime est souvent fautive ; elle intéresse d'ailleurs parce qu'on la perçoit comme paradoxale, mais il y a des cas où le paradoxe devient vrai quand ce qui mesure la valeur du tout est vraiment lié à une richesse en organisation. Ces cas font l'intérêt de la maxime.

Croire à la maxime et en faire un pilier philosophique des réflexions sur la complexité sans même chercher à savoir de quoi elle parle, ni si cela peut se mathématiser, est une attitude ridicule. En effet, le plus souvent, c'est l'inégalité inverse qu'on démontre, même quand on envisage la complexité des algorithmes ou la complexité de Kolmogorov. Disposer d'un cas précis où la maxime devient vraie est éclairant, et il faut sans doute y voir une preuve nouvelle de l'intérêt de la définition de Bennett : la complexité structurelle d'un objet fini F se mesure par «le temps de calcul de son programme le plus court», ou, dans la version plus tolérante, par «le temps de calcul des programmes courts qui produisent F».

Il existe peut-être d'autres procédés formels non illusoire donnant un sens à la maxime (l'encadré 3 en présente un), mais celui qui s'appuie sur la profondeur logique de Bennett appliquée à l'association de deux objets corrélés est probablement central, du fait de sa place au sein de la théorie algorithmique de l'information. Dans les systèmes complexes, comme le sont les organismes vivants ou les écosystèmes, les interdépendances font qu'on est assez souvent dans une situation semblable à celle des images A, B et C. Ce qui est apparu dans un premier temps comme une exception y devient la règle. La complexité du *tout* mesurée par la profondeur logique de Bennett est donc, dans de telles structures, supérieure à la somme des complexités des *parties*. ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Li et Paul Vitányi, **An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications**, Springer, 2014.

J.-P. Delahaye, **Qu'est-ce qu'un objet complexe ?**, *Pour la Science*, pp. 78-83, mai 2013.

J.-P. Delahaye, **La cryptographie visuelle**, *Pour la Science*, pp. 86-91, juin 2012.

C. Bennett, **Logical depth and physical complexity**, dans *The Universal Turing Machine : A Half-Century Survey*, pp. 207-235, Oxford University Press, 1988.

Aristote, **Physique - Livre VI**, <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/phys6.htm>

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

LE PALAIS SOUS LES DUNES

Une exposition confronte artistes et scientifiques à la problématique des formes dans un esprit transdisciplinaire. Les œuvres sont alors l'occasion de nous interroger sur les multiples origines des formes et sur ce qu'elles nous disent.

Bienvenue au musée, plus précisément au palais de Tokyo, à Paris. Malgré l'affluence constatée à l'entrée, vous pénétrez dans une grande salle... et là, c'est désert. C'est le désert! Vous êtes face à un paysage de dunes qui se sont formées entre des piliers identiques à ceux croisés plus tôt. Étonnant. C'est l'une des œuvres présentées dans l'exposition *Le Rêve des formes. Art, science, etc.*, coorganisée avec Le Fresnoy-Studio national des arts contemporains, de Tourcoing, à l'occasion de son vingtième anniversaire.

Le fil conducteur est la réflexion engagée entre artistes contemporains et scientifiques autour de l'idée de formes, celles que peut prendre la matière, vivante ou non, quelle que soit l'échelle, du nanométrique à celle de la cosmologie. Cette exposition préfigure le colloque multidisciplinaire *Le Rêve des formes. Arts, sciences & C^{ie}*, qui se tiendra en septembre au Collège de France, à l'invitation d'Alain Prochiantz, neurobiologiste et administrateur général de cette institution.

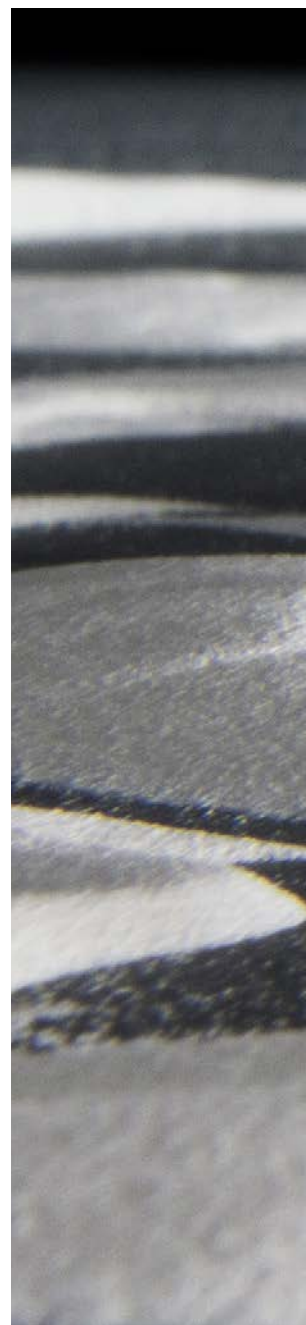
DUNES IMMERGÉES

Les dunes de la grande salle sont un projet réalisé par l'artiste Hicham Berrada en collaboration avec l'architecte Simon de Dreuille et le physicien Sylvain Courrech du Pont. Ce dernier, au laboratoire Matière et systèmes complexes de l'université Paris-Diderot, étudie la formation des dunes, que ce soit dans les déserts terrestres ou ailleurs,

Le comble pour un musée? Mettre en scène le désert en espérant une affluence record.

notamment Mars ou Titan, le satellite de Saturne. Pour ce faire, il a élaboré une machine à fabriquer des dunes. Il s'agit d'un grand aquarium empli d'eau, 800 fois plus dense que l'air. Elle remplace le vent lorsqu'un plateau est mis en mouvement et sur lequel se forment des dunes immergées... 800 fois plus petites que celles observées dans la nature.

Hicham Berrada s'est emparé de ce simulateur pour réaliser un film. Avec Simon de Dreuille, il a d'abord conçu une maquette tridimensionnelle de la salle, dite paysagée, où vous vous trouviez au début de cet article. Cette reproduction a ensuite été placée dans la machine où le processus





d'ensablement autour du «mini-édifice» a été enregistré. Ce sont ces images qui, projetées agrandies dans l'espace d'exposition, agissent comme un trompe-l'œil: on assiste sans trucage, ou presque, à la fabrication d'un paysage désertique de dunes dans la salle paysagée.

Parmi les autres œuvres exposées, citons celle des physiciens Annick Lesne et Julien Mozziconacci, qui donne à voir la structure tridimensionnelle des 23 chromosomes humains. L'artiste Olivier Perriquet et le chercheur en informatique Jean-Paul Delahaye proposent quant à eux une variation autour du Jeu de la vie, un automate cellulaire inventé par John

Horton Conway en 1970 où, malgré des règles de fonctionnement très simples, des comportements complexes et contre-intuitifs peuvent apparaître: ils se traduisent en formes sur un quadrillage. Dernier exemple, les artistes Jonathan Pêpe et Thibaut Rostagnat, avec le mathématicien David Chavalarias, s'interrogent dans *Stalagmèmes* sur la représentation des traces numériques de notre société.

On déambule entre espèces animales, végétales et non identifiées, entre mutants, créatures hybrides et organismes altérés, entre formes autoorganisées et modèles mathématiques... Claire Moulène, l'une des commissaires de l'exposition, la résume

ainsi: «Elle opère progressivement un lissement entre quatre grandes familles de formes: des formes dynamiques, des formes naturalistes ou mimétiques, des formes mutantes ou monstrueuses et, enfin, des formes algorithmiques.» En d'autres termes, au palais de Tokyo, les arts plastiques jouent avec la plasticité. ■

Le Rêve des formes. Art, science, etc.
Palais de Tokyo, Paris, jusqu'au 10 septembre 2017.
www.palaisdetokyo.com



Retrouvez la rubrique
Art & science sur
www.pourlascience.fr

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY
professeur de physique
à l'université
Pierre-et-Marie-Curie, à Paris



ÉDOUARD KIERLIK
également professeur
de physique à l'université
Pierre-et-Marie-Curie

LES RADIOGRAPHIES PRENNENT DES COULEURS

Dans les contrôles de bagages ou du fret à l'aéroport, comment distinguer un liquide explosif d'un parfum ? Un pain de plastic d'un bloc de pâte d'amande ? Fondés sur une bonne compréhension de l'interaction des rayons X avec la matière, les nouveaux scanners aident à faire plus efficacement le tri.

Les radiographies classiques, réalisées avec des rayons X, permettent de bien distinguer une fracture du tibia, une dent cariée ou la silhouette des objets à l'intérieur d'une valise. Mais, bien souvent, elles ne suffisent plus, notamment dans le domaine de la sûreté où l'on doit distinguer le pain de plastic du bloc de pâte d'amande. C'est pourquoi ont été développées de nouvelles générations de scanners à rayons X qui mettent à nu les objets dissimulés à notre vue – en tirant astucieusement parti de la physique de l'interaction des rayons X avec les atomes.

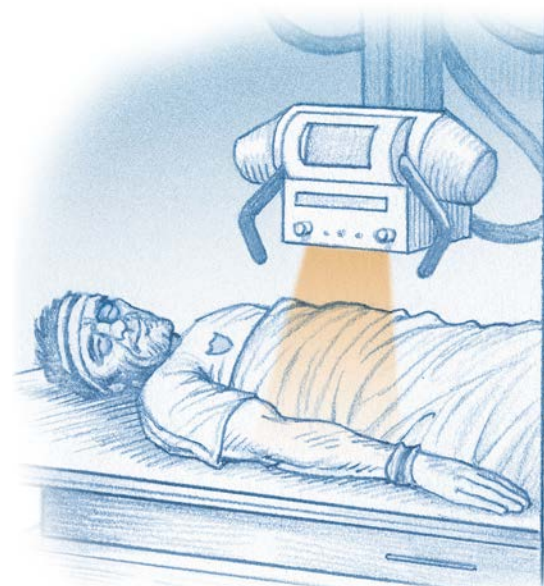
PLUS DENSE, DONC PLUS CLAIR

Rappelons d'abord le principe de la radiographie classique. Il s'agit d'une photographie en négatif, où les zones du cliché apparaissant claires correspondent aux parties de l'objet qui ont absorbé (ou dévié hors champ) les rayons X émis en

direction de la plaque de détection. À épaisseur égale, cette absorption est d'autant plus importante que le matériau traversé est dense, c'est-à-dire que sa masse volumique est élevée. C'est pour cette raison que l'on distingue facilement les os des autres tissus dans une radiographie du corps humain, une dent cariée d'une dent saine, ou les objets métalliques parmi les vêtements d'une valise.

Pourquoi cette absorption (ou déviation) des rayons X est-elle directement reliée à la masse volumique ? Parce que ce phénomène est dû aux interactions des rayons X avec les électrons de la matière, et que le nombre total d'électrons présents par unité de volume est quasiment proportionnel à la masse volumique.

Justifions cette dernière affirmation. La masse d'un atome est pratiquement égale à la masse de son noyau, elle-même à peu près égale au produit du nombre de nucléons (protons et neutrons) par la



masse d'un proton. Or le nombre de nucléons vaut 2 à 3 fois le nombre de protons et ce dernier est égal au nombre d'électrons, afin d'assurer la neutralité électrique de l'atome. Le nombre d'électrons d'un atome est donc grossièrement proportionnel à la masse de cet atome.

En radiographie X classique, on envoie un faisceau approximativement monoénergétique de rayons X (c'est-à-dire que tous les rayons sont à peu près de même énergie) à travers l'objet examiné. L'image obtenue est en teintes de gris, des ombres sans information sur la nature des matériaux traversés. Les contrôleurs de sécurité expérimentés cherchent à