

Conclusion: c'est l'hémisphère gauche qui se charge d'effectuer les calculs mentaux.

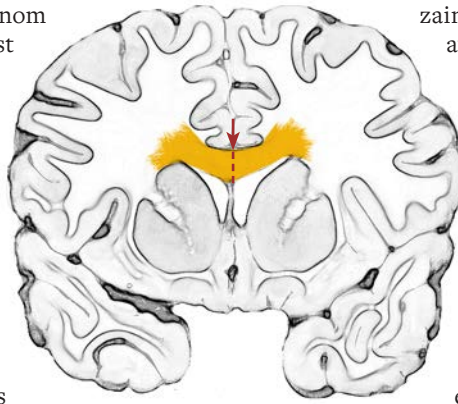
V. P., également désignée par le prénom Vicky dans la littérature scientifique, est quant à elle une jeune femme qui a subi une callosotomie en 1979, à l'âge de 27 ans. En 1984, un examen d'imagerie par résonance magnétique (IRM) révèle que toutes les connexions entre les deux hémisphères n'ont pas été sectionnées: quelques fibres sont restées en place à l'avant et à l'arrière du corps calleux. Elles représentent moins de 2 % des connexions, et l'une des expériences impliquant V. P. vise à étudier si des informations visuelles sont transmissibles à travers ces quelques fibres restantes.

Lors de cette expérience, deux images sont présentées à V. P. dans des parties distinctes de son champ visuel, afin que chacune soit traitée par un hémisphère différent. La patiente doit déterminer si elles ont une couleur, une forme ou une taille identique. Il faut alors que les deux moitiés du cerveau comparent ce qu'elles ont perçu. Mais les résultats indiquent que V. P. répond au hasard, signe que ses deux hémisphères ne communiquent pas, malgré les fibres épargnées. Lors d'une seconde expérience, on fait lire à la patiente des paires de mots, là encore disposées de façon qu'un mot soit traité par chaque hémisphère, et elle doit indiquer s'ils riment ou non. V. P. répond cette fois de façon assez précise. Certaines informations à caractère verbal circulent d'un hémisphère à l'autre.

Le cas de cette jeune femme contribue à l'établissement d'une carte fonctionnelle du corps calleux: différentes parties de cette structure véhiculent ainsi les informations motrices, somatosensorielles, auditives ou visuelles. Des recherches récentes ont aussi montré l'existence de connexions subcorticales entre les deux hémisphères cérébraux, qui ne sont pas atteintes lors d'une callosotomie.

DE CURIEUX SYMPTÔMES

Les patients au cerveau divisé (ou patients *split-brain*) ont des symptômes curieux: quand on présente un mot à leur hémisphère droit, ils ne le comprennent pas, car ce côté du cerveau n'est pas dédié aux fonctions linguistiques (du moins chez les droitiers). Mais si on leur demande d'écrire ce qu'ils ont vu en utilisant la main gauche – commandée par l'hémisphère droit –, ils y parviennent correctement. De même, si on bande les yeux d'un patient en lui glissant dans la main gauche une brosse à dents, il reconnaît l'objet à partir de sa forme et exprime sa fonction en mimant le geste de se brosser les dents, mais il est incapable de le nommer. En effet, il n'a pas accès à sa bibliothèque de mots, qui se trouve dans l'autre hémisphère du cerveau.



Le corps calleux (en orange), constitué de multiples fibres nerveuses, forme un pont entre les deux hémisphères cérébraux. Il est profondément enfoncé dans la crevasse qui sépare ces derniers. L'opération de callosotomie consiste à le sectionner (flèche rouge).

Grâce aux recherches de Michael Gazzaniga et d'autres neuropsychologues sur une douzaine de patients *split-brain*, nous savons aujourd'hui qu'un cerveau sain ressemble à deux machines indépendantes reliées par des câbles qui transmettent une grande quantité d'informations. Quand une connexion est interrompue, comme dans le cas de la callosotomie, l'information perçue par un hémisphère – qu'il s'agisse d'un mot, d'une image ou d'une sensation tactile – n'est pas transmise à l'autre. Avec les conséquences que nous avons décrites. Ces recherches ont aussi montré que, la plupart du temps et de façon très simplifiée, l'hémisphère gauche remplit principalement des fonctions linguistiques tandis que l'hémisphère droit traite surtout des informations visuelles et spatiales, s'occupant notamment de la reconnaissance des visages.

DEUX HÉMISPHÈRES SÉPARÉS, MAIS UNE CONSCIENCE

Michael Gazzaniga avait déjà compris que les deux hémisphères sont capables d'effectuer presque toutes leurs tâches de manière indépendante. Ces deux moitiés du cerveau ont toutefois deux «visions» différentes du monde, ce qui a suscité un vif intérêt chez les chercheurs qui étudient la personnalité et la conscience. «L'idée que la séparation des deux hémisphères créerait un individu porteur de deux consciences était fascinante, mais la réalité n'est pas aussi simple», tempérait toutefois le psychologue américain Michael Miller dans la revue *Nature* en 2012, à l'occasion des quarante ans du premier test sur les patients *split-brain*. En effet, chaque «module» du cerveau ne porte pas une conscience distincte, celle-ci dépendant aussi des multiples connexions qui parcourent l'encéphale.

Et les patients de Michael Gazzaniga, que sont-ils devenus? Ils vieillissent petit à petit et l'âge rend les longues séances de tests et d'évaluation moins faciles. Certains sont déjà décédés. Aujourd'hui, la section du corps calleux est presque complètement abandonnée, en raison de l'existence de traitements plus efficaces. En outre, pour étudier le fonctionnement de chaque hémisphère, nous disposons de techniques plus performantes et utilisables sur des sujets au corps calleux intact, comme l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle ou la stimulation magnétique transcrânienne (qui permet d'activer ou d'inhiber certaines zones du cerveau avec des impulsions magnétiques). Mais grâce aux patients *split-brain*, qui ont accepté de se soumettre pendant des décennies à des expériences neuroscientifiques, nous savons bien mieux quoi chercher et quelles zones explorer. ■

BIBLIOGRAPHIE

D. Wolman, *A tale of two halves*, *Nature*, vol. 483, pp. 260-263, 2012.

M. Gazzaniga, *Le cerveau divisé*, *Pour la Science*, n° 251, 1998.

M. Gazzaniga et al., *Some functional effects of sectioning the cerebral commissures in man*, *PNAS*, vol. 48, pp. 1765-1769, 1962.

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

LA SUITE DE FIBONACCI... ET SES SUITES

La suite de Fibonacci est célèbre, au point d'avoir inspiré d'autres constructions: une suite de mots, des fractales, un arbre... Tous ces objets mathématiques constituent des terrains inépuisables de découvertes, encore aujourd'hui.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal).

La suite (F_n) de Leonardo Fibonacci est définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ pour $n>1$. Ses premiers termes sont donc $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, $F_8=21$, $F_9=34$, $F_{10}=55$, $F_{11}=89$, $F_{12}=144$, ...

Les mathématiciens, amateurs ou professionnels, l'étudient obstinément. Elle est simple, l'utiliser dans un test d'intelligence serait un cadeau, et pourtant elle engendre des surprises variées, des théorèmes et même des conjectures. Cette suite et le nombre d'or $\phi=1,618033988...$, limite du rapport de deux termes consécutifs de la suite, se retrouvent partout en mathématiques (voir l'encadré 1).

Cette ubiquité un peu semblable à celle du nombre π , qui lui aussi est présent dans une multitude de contextes mathématiques, physiques et biologiques, a une explication évidente qui devrait calmer les numéologues plus ou moins sérieux voulant y voir un mystère profond susceptible d'éclairer les sciences et les arts.

L'explication de l'ubiquité de la suite de Fibonacci et du nombre d'or est que ce sont des objets simples, puisqu'ils ont des définitions simples, et que les objets simples sont bien sûr partout !

La simplicité de la suite de Fibonacci n'est pas la même que celle des nombres 2 , $\sqrt{3}$, π ou e , eux aussi omniprésents; mais, sur le plan mathématique, c'est une suite à peu près aussi élémentaire que les suites arithmétiques $(s_{n+1}=s_n+r)$ et les suites géométriques $(s_{n+1}=ks_n)$, elles aussi rencontrées dans des contextes variés.

Reste que la suite de Fibonacci est à l'origine de questions délicates parfois difficiles et souvent inattendues. Sans refaire le parcours de tout ce qu'on sait sur elle (il faudrait un gros livre), évoquons quelques propriétés et questions fascinantes qui la concernent.

UNE MULTITUDE DE DÉFINITIONS

D'abord, nous noterons que la définition que nous avons donnée n'est qu'une définition parmi une multitude. En voici quelques autres.

– Le nombre F_n est le nombre de façons d'écrire n comme une somme de nombres entiers impairs. On a ainsi $F_6=8$ car il y a 8 façons d'écrire 6 comme somme de nombres entiers impairs: $6=1+1+1+1+1+1=1+1+1+3=1+1+3+1=1+3+1+1=3+1+1+1=1+5=5+1=3+3$.

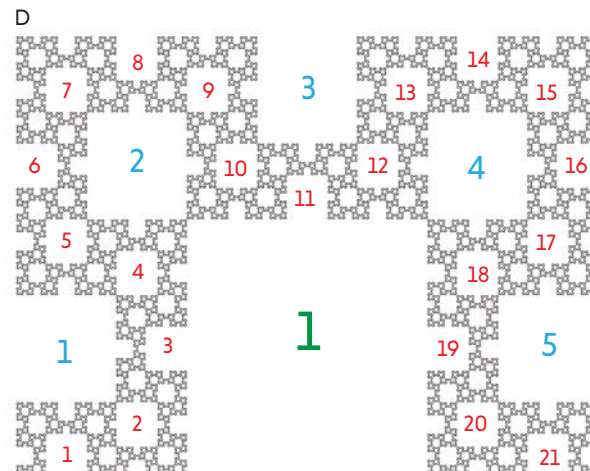
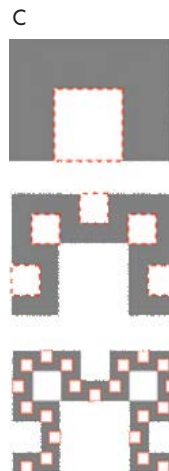
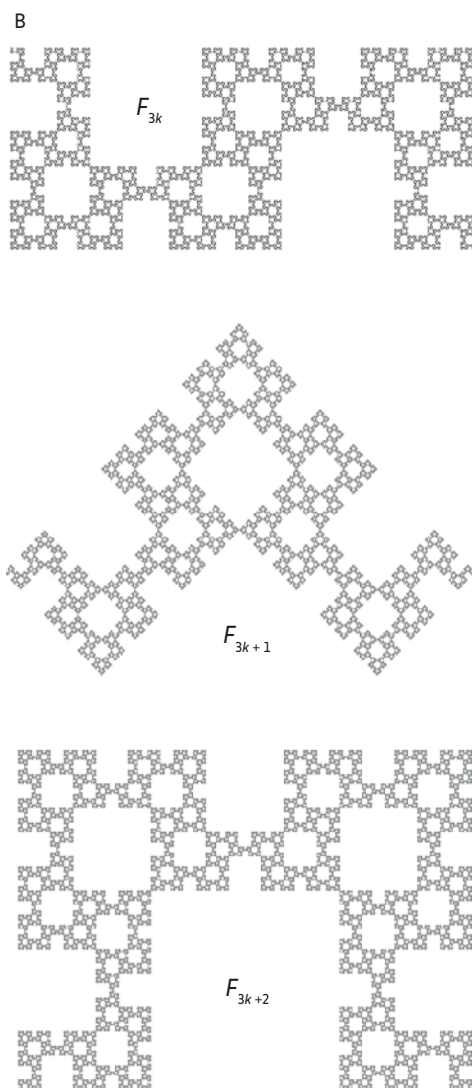
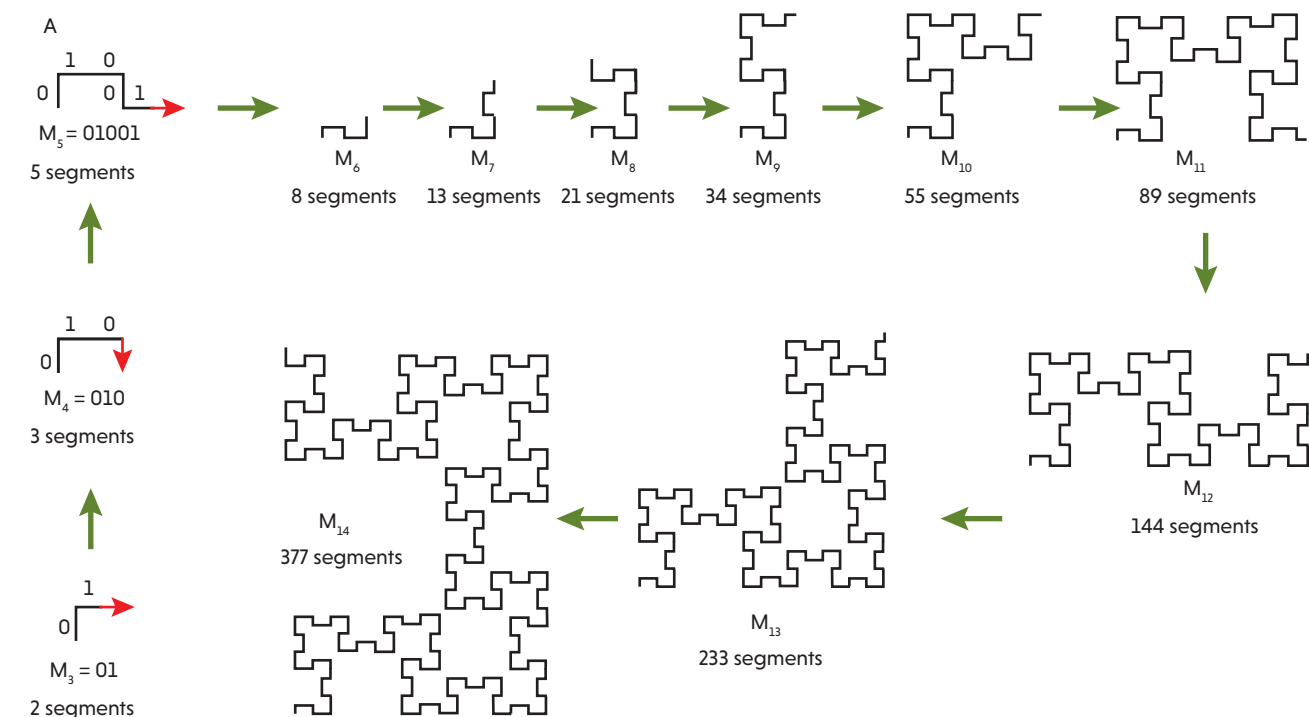
– Le nombre F_n est le nombre de suites de longueur n composées d'entiers compris entre 1 et $n-2$ commençant par 1 et dont deux termes consécutifs diffèrent toujours exactement d'une unité. On retrouve $F_6=8$, car il y a 8 telles suites: 121212, 121232, 121234, 123212, 123232, 123234, 123432, 123434.

– Le nombre F_{n+2} est le nombre de mots de longueur n composés de 0 et de 1 et n'ayant pas deux 1 consécutifs. On retrouve par exemple que $F_5=5$, car il existe exactement 5 mots de longueur 3 ne comportant pas deux 1 consécutifs: 000, 100, 010, 001, 101. La valeur $F_6=8$ provient des 8 mots de longueur 4 ne comportant pas deux 1 consécutifs: 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 0101, 1001, 1010.

– Le nombre F_{n+1} est le nombre de façons de paver un rectangle $2 \times n$ avec des

Le dernier ouvrage
 de J.-P. Delahaye:
**Mathématiques
 et mystères**,
 une sélection de ses
 chroniques parues
 dans *Pour la Science*
 (Belin, 2016).





LES FRACTALES DE FIBONACCI

3

Partant d'un mot M_n de Fibonacci, on lui associe un dessin (figure A) :
 – on se place à l'origine, en se dirigeant vers le haut ;
 – quand on lit la k -ième lettre de M_n , on trace un segment unité en suivant la direction que l'on a, puis :
 – si la k -ième lettre lue est un 1, on garde la même direction ;
 – si la k -ième lettre lue est un 0, on tourne vers la droite si k est pair, et vers la gauche si k est impair.

Les courbes correspondant aux entiers n de la forme $3k$ convergent vers une fractale,

de même que les courbes correspondant aux entiers de la forme $3k+1$, ou $3k+2$ (figure B). La fractale obtenue par exemple pour $3k+2$, s'obtient aussi par un procédé d'évidement (C et D) : partant d'un rectangle, on en retire un carré noté 1 (en vert dans D), puis des carrés de taille un peu plus petite (numérotés en bleu) à ce qui reste. On recommence avec ce qui reste (carrés numérotés en rouge), et ainsi de suite.

La frontière de cette fractale de dimension 1,6379... est elle-même une fractale, de dimension 1,2465...

- > algorithme efficace dont le nombre d'opérations pour calculer F_n n'augmente que logarithmiquement avec n . C'est plus efficace que la formule de Binet $F_n = (\phi^n - 1/(-\phi)^n)/\sqrt{5}$ avec $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, car pour l'utiliser, il faut d'abord connaître $\sqrt{5}$ et ϕ avec une grande précision.

Trouver les formules que nous venons de mentionner n'est pas très facile, mais les démontrer quand on les connaît est une simple question de patience: on mène un raisonnement par récurrence en utilisant $\phi^2 = 1 + \phi$ pour la formule de Binet, puis, par simple substitution et simplification, on prouve les deux formules permettant le calcul rapide.

FACTORISATION DES TERMES DE LA SUITE ET NOMBRES PREMIERS

Parmi les questions les plus étudiées figurent celles liées à la factorisation des nombres de la suite de Fibonacci. La page www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibtable.html donne la factorisation en nombres premiers des 300 premiers termes de la suite.

Une remarquable propriété des termes de la suite est: « Si n divise m , alors F_n divise F_m . » Ainsi, puisque 5 divise 15, on en déduit que $F_5 = 5$ divise $F_{15} = 610$. De même, puisque 10 divise 100, il s'ensuit que $F_{10} = 55$ divise F_{100} , ce qui est vrai puisqu'on a :

$F_{100} = 3 \times 5^2 \times 11 \times 41 \times 101 \times 151 \times 401 \times 3001 \times 570601$. On tire du précédent résultat que: «Si F_n est premier, alors n est premier.» On le vérifie en constatant que tous les nombres premiers de la suite ont des numéros qui sont des nombres premiers: $F_2 = 2$; $F_5 = 5$; $F_{13} = 13$; $F_{11} = 89$; $F_{13} = 233$; $F_{17} = 1597$; $F_{23} = 28657$; $F_{29} = 514229$; $F_{43} = 43349437$.

Autre propriété inattendue: « Si n et m sont premiers entre eux (c'est-à-dire n'ont pas de diviseur commun), alors il en est de même des termes correspondants F_n et F_m . ». Il en résulte que deux termes consécutifs de la suite n'ont jamais de facteur commun.

Encore plus surprenant: «Pour tout entier m , la suite de Fibonacci considérée modulo m est périodique.» On vérifie que la suite 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ..., prise modulo 2, donne: 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, ..., qui est de période 3. Modulo 3, la période est 8: 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, ... (le cycle est noté en bleu).

DES CONJECTURES QUI RESTENT À PROUVER

Reste une série de questions non résolues. Ainsi, on conjecture qu'il existe une infinité de nombres premiers dans la suite de Fibonacci, sans que l'on sache le démontrer.

Une remarquable conjecture concernant la suite de Fibonacci affirmait que les seuls

nombres qui sont des puissances parfaites dans la suite sont $0=0^n$, $1=1^n$, $8=2^3$ et $144=12^2$. Cette conjecture a été démontrée récemment par les mathématiciens Yann Bugeaud et Maurice Mignotte, de l'université de Strasbourg, associés au mathématicien britannique Samir Siksek, de l'université de Warwick. Ils ont publié leur résultat dans l'une des plus prestigieuses revues de mathématiques, *Annals of Mathematics* : l'intérêt pour la suite de Fibonacci n'est pas l'exclusivité des amateurs numéroluges.

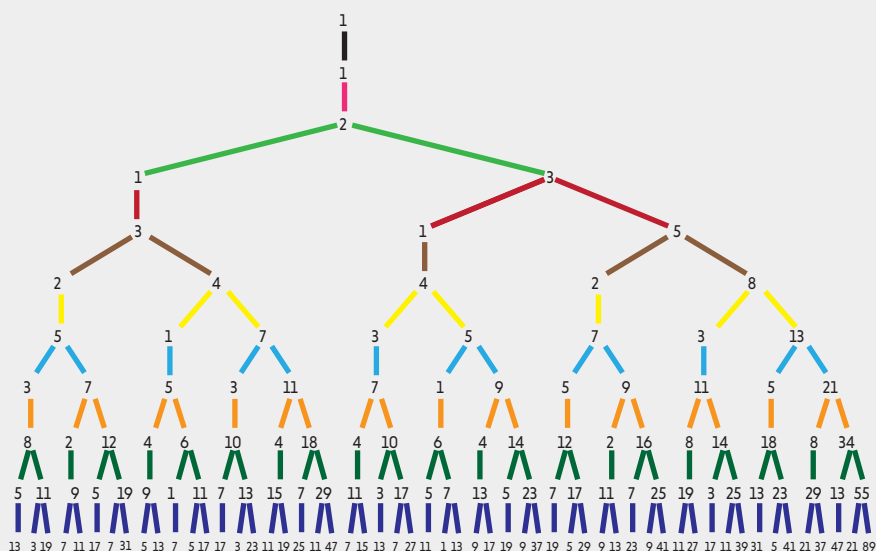
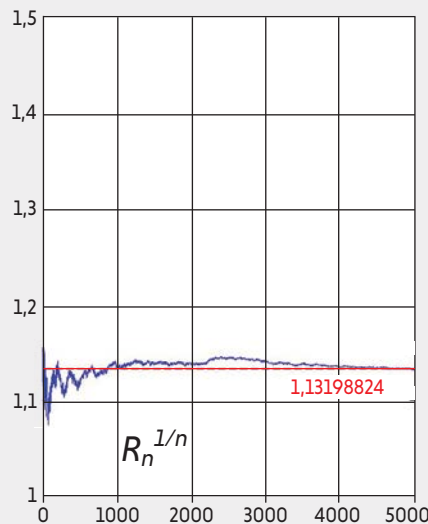
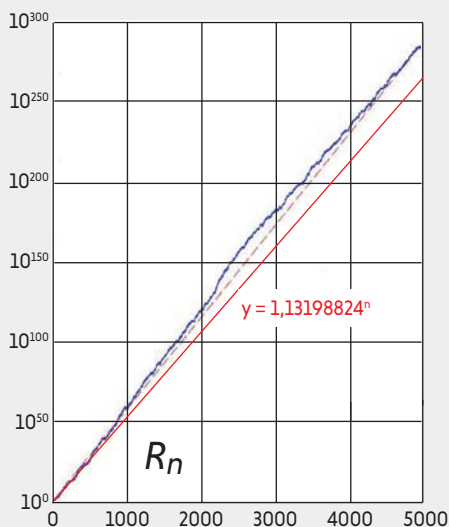
Parmi les conjectures en attente, mentionnons encore celle-ci : « Pour tout nombre premier p , le premier terme de la suite de Fibonacci non nul et divisible par p n'est pas divisible par p^2 . »

LES MOTS DE FIBONACCI

La définition de la suite de Fibonacci en suggère une, analogue, pour les « mots » composés de 0 ou 1: $M_1 = 1$; $M_2 = 0$; $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$ pour $n > 1$. Le « + » signifie ici la concaténation. Il existe des variantes à cette définition quand on change les deux premiers mots, mais on retombe le plus souvent sur la même suite de mots, éventuellement décalée. Le début de la suite de mots est: $M_1 = 1$; $M_2 = 0$; $M_3 = 01$; $M_4 = 010$; $M_5 = 01001$; $M_6 = 01001010$; $M_7 = 0100101001001$; $M_8 = 010010100100101001010$; $M_9 = 01001010010010100101001010010100101001010010100101001010010100101001010010100101001010$, ... Le lien avec la suite numérique de Fibonacci est immédiat: la longueur de M_n est F_n . Un peu d'attention montre aussi que le nombre de 0 dans M_n est F_{n-1} et que le nombre de 1 est F_{n-2} . Il s'ensuit que le rapport entre le nombre de 0 et le nombre de 1 dans M_n tend vers le nombre d'or.

La méthode de la concaténation utilisée pour la construction est ici équivalente à une autre méthode: pour passer d'un mot au suivant, on remplace chaque 0 par 01 et chaque 1 par 0. On remarque que chaque nouveau mot de la suite prolonge le précédent, ce qui signifie qu'en poursuivant la construction, on obtient un mot infini composé de 0 et de 1: c'est le «mot infini de Fibonacci».

Une façon totalement inattendue de calculer ce mot infini fait apparaître un lien profond avec le nombre d'or ϕ . On trace le quadrillage du plan qui le découpe en carrés de côté 1, soit toutes les droites d'équations $x=n$ ou $y=n$ avec n entier positif. On dessine la droite de pente ϕ passant par l'origine; cette droite est d'équation $y=\phi x$. On la parcourt en commençant à l'origine des axes. À chaque fois que l'on croise une droite verticale du quadrillage, on écrit un 0, et à chaque fois que l'on croise une droite horizontale, on écrit un 1. Le mot infini que l'on obtient 010010101... est le mot infini de Fibonacci (*voir l'encadré 2*).



SUITES ALÉATOIRES ET ARBRE DE FIBONACCI

4

On peut construire une suite aléatoire inspirée de celle de Fibonacci en posant : $R_0 = 0$, $R_1 = 1$ et, pour tout entier $n > 1$, $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$ ou $|R_{n-1} - R_{n-2}|$ avec une probabilité $1/2$ pour chaque cas. Divakar Viswanath a montré que, sauf dans des cas de probabilité totale nulle, la suite $R_n^{1/n}$ converge vers une constante réelle $V = 1,132...$ (la « constante de Viswanath »).

On représente toutes les suites aléatoires de Fibonacci à l'aide d'un arbre unique. On ne figure dans cet arbre que les suites qui ne repassent pas par un même couple de nombres

consécutifs (qui serait comme un retour en arrière) : chaque nœud droit a deux descendants, l'un provenant de la somme (placé à droite), l'autre de la différence des deux termes au-dessus (placé à gauche) ; chaque nœud gauche n'en a qu'un, celui de la somme qui est considéré comme un nœud droit. Cet arbre, étudié par Benoît Rittaud, a d'extraordinaires propriétés, dont les deux suivantes :

- le nombre de nœuds de niveau n est donné par la suite de Fibonacci ;
- tout couple d'entiers (a, b) premiers entre eux apparaît une fois exactement avec a juste au-dessus de b .

> Voici encore quelques propriétés de la suite des mots de Fibonacci.

Les deux dernières « lettres » d'un mot de Fibonacci sont alternativement 01 et 10, d'un mot au suivant. En supprimant ces lettres, ce qui reste est un palindrome, c'est-à-dire un mot symétrique par rapport à son centre. Exemple : sans ses deux dernières lettres, M_8 devient 0100101001001010010, qui est identique à lui-même quand on le lit à l'envers.

Les mots de Fibonacci et le mot infini de Fibonacci ne contiennent jamais le sous-mot 11 ni le sous-mot 000.

Étrangement, concaténer deux mots de Fibonacci successifs dans un ordre ou un autre donne presque la même chose. Plus précisément, $M_n M_{n-1}$ et $M_{n-1} M_n$ sont identiques sauf pour les deux dernières lettres, qui sont inversées. Ainsi, on a $M_5 M_6 = 0100101001010$, tandis que $M_6 M_5 = 0100101001001$.

On trouve dans les mots finis ou le mot infini de Fibonacci des répétitions triples consécutives. Exemple : le sous-mot 010 figure trois fois de suite dans le mot $M_8 = 010010100100101010$. En revanche, on ne trouvera jamais de répétition quadruple d'aucun sous-mot.

Le nombre réel dont l'écriture en base 2 est donnée par le mot infini de Fibonacci 0,010010100... est, comme les nombres π et e , un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est la racine d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Le nombre de sous-mots différents de longueur n présents dans le mot infini de Fibonacci est exactement $n+1$. Par exemple, les seuls sous-mots de longueur 4 qu'on trouvera sont 0010, 0100, 0101, 1001 et 1010.

On sait depuis 2012, grâce aux profonds et difficiles travaux de Yann Bugeaud et Boris Adamczewski, que les nombres réels dont le rapport (nombre de sous-mots de longueur n de leur écriture en base 2)/ n est borné sont soit des nombres rationnels, c'est-à-dire des rapports de deux entiers, soit des nombres transcendants. Avec la propriété énoncée juste avant, ce théorème prouve à nouveau que le nombre réel dont les chiffres binaires sont ceux du mot infini de Fibonacci est un nombre transcendant.

DES FRACTALES À PARTIR DES MOTS DE FIBONACCI

Disposant des mots finis de Fibonacci, il est tentant de les utiliser pour dessiner une courbe. La méthode suivante produit un intéressant résultat.

1) On choisit un mot M_n , dont on va parcourir les F_n lettres en dessinant des segments de longueur 1.

2) On part de l'origine et on se dirige verticalement, « vers le haut ».

3) Quand on lit la k -ième lettre de M_n , on trace un segment en suivant la direction que l'on a.

4) Si la k -ième lettre lue est un 1, on garde la même direction.

5) Si la k -ième lettre lue est un 0, on tourne vers la droite si k est pair, et vers la gauche si k est impair.

Les courbes ainsi construites (voir l'encadré 3) ne se recoupent jamais. Elles se classent en trois catégories, selon que l'indice du mot utilisé est un multiple de 3, un multiple de 3 additionné de 1, un multiple de 3 additionné de 2. Si l'on s'intéresse à toutes les courbes correspondant aux multiples de 3, en les tournant et en les ramenant à la même taille, il apparaît que les courbes convergent vers une forme unique très découpée. Cette forme limite a été étudiée par l'amateur français Alexis Monnerot-Dumaine en 2008. Le facteur d'agrandissement entre le dessin correspondant à l'indice k et le dessin pour l'indice $k+3$ est $1+\sqrt{2}$, et la dimension fractale (ou dimension de Hausdorff) de la figure limite est :

$$3 \log \phi / \log(1+\sqrt{2}) = 1,6379...$$

Rappelons que la dimension de Hausdorff d'une courbe lisse (cercle, droite, parabole, etc.) est 1, que la dimension de Hausdorff d'un morceau de surface plein (disque, carré rempli, etc.) est 2. La valeur 1,6379... trouvée pour la figure associée aux mots de Fibonacci prouve donc sa nature fractale au sens rigoureux du terme : cette figure est de dimension non entière, ici comprise entre 1 et 2.

La frontière de cette fractale est aussi très découpée. C'est une autre figure fractale, dont la dimension est plus petite ($\log 3 / \log(1+\sqrt{2}) = 1,2465...$) que la précédente.

De manière remarquable, d'autres procédés de construction conduisent à cette même forme fractale. En voici deux.

On sait que le célèbre tapis de Sierpiński s'obtient par évidements successifs : un carré plein est divisé en 9 carrés identiques ; on retire le carré central ; on recommence avec les 8 carrés restants, etc. La fractale de Fibonacci s'obtient aussi par évidements successifs : on part d'un rectangle plein de côtés 1 et $\sqrt{2}$, on enlève un carré de côté $1/\sqrt{2}$ au milieu en bas du rectangle, puis on recommence en enlevant à chaque étape une série de carrés dont la taille est divisée d'une étape à l'autre par $1+\sqrt{2}$ et dont la position suit une règle facile à comprendre en observant les deux premières étapes (voir l'encadré 3).

À la grande surprise de tous, Ron Knott a découvert un procédé encore plus simple pour arriver à cette fractale de Fibonacci : on suit les chiffres d'un mot de Fibonacci en traçant des segments de longueur 1 comme dans la première construction, mais maintenant on tourne à droite ou à gauche à chaque nouvelle lettre,

en changeant de direction pour tourner quand la lettre lue est 1.

Une idée très naturelle de généralisation de la suite de Fibonacci faisant intervenir le hasard est la suivante : on pose $R_0=0$, $R_1=1$ et, pour tout entier $n>1$, $R_n=R_{n-1}+R_{n-2}$ ou $|R_{n-1}-R_{n-2}|$ avec une probabilité $1/2$ pour chaque cas.

Autrement dit, à chaque nouveau nombre calculé, on choisit au hasard, avec une probabilité $1/2$, d'additionner les deux derniers, ou de les soustraire l'un à l'autre sans s'occuper du signe du résultat.

Un remarquable résultat a été établi au sujet de ces suites aléatoires de Fibonacci par Divakar Viswanath, de l'université du Michigan : avec une probabilité 1, la suite $R_n^{1/n}$ converge vers une constante réelle V égale à 1,132...

Cette nouvelle constante mathématique jamais rencontrée auparavant a bien sûr été dénommée constante de Viswanath. Elle est très mal connue et ceux qui s'y sont intéressés sont en désaccord dès sa quatrième décimale. Certains prétendent que c'est 1,132150... alors que d'autres affirment que c'est 1,131988... Un lecteur pourra-t-il mener des calculs qui tranchent la question ?

Notons que l'expression « avec une probabilité 1 » signifie qu'il y a autant de chances d'obtenir une autre limite que la constante de Viswanath qu'il y a de chances de tomber toujours sur pile en lançant indéfiniment une pièce de monnaie non truquée dans une série infinie de tirages à pile ou face.

L'ARBRE DE FIBONACCI

On peut représenter toutes les suites aléatoires de Fibonacci à l'aide d'un arbre. Si l'on ne souhaite représenter que les suites qui ne repassent pas par un même couple de nombres consécutifs (car c'est en quelque sorte revenir en arrière), dessiner l'arbre de toutes les suites aléatoires de Fibonacci devient simple (voir l'encadré 4). Ce nouvel arbre mathématique, introduit par Benoît Rittaud, de l'université Paris 13, présente d'intéressantes propriétés :

- le nombre de nœuds de niveau n est donné par la suite de Fibonacci ;

- la somme S_k des nombres de la ligne k vérifie $S_k = 2S_{k-1} + S_{k-3}$.

Surtout, cet arbre présente l'extraordinaire et inattendue propriété que tout couple d'entiers (a, b) premiers entre eux apparaît une fois exactement avec a juste au-dessus de b et que le chemin qui y mène est directement lié à la fraction continue du nombre a/b .

On le voit, loin de s'épuiser, l'intérêt pour la suite de Fibonacci et les objets apparentés semble s'étendre et produire sans cesse des idées, théorèmes et conjectures qui enrichissent la connaissance des procédés élémentaires de construction associés et leurs mystères. ■

BIBLIOGRAPHIE

K. Hare et J. C. Saunders, **On (a, b) pairs in random Fibonacci sequences**, prépublication arXiv:1608.03522, 2016.

S. Eliahou, **Mystères arithmétiques de la suite de Fibonacci, Images des Mathématiques**, 2014 : <http://bit.ly/2rzvvtvJ>

A. Monnerot-Dumaine, **The Fibonacci Word fractal**, 2009 : <http://bit.ly/2rzgiCv>

B. Rittaud, **On the average growth of random Fibonacci sequences**, *Journal of Integer Sequences*, vol. 10, article 07.2.4, 2007.

Y. Bugeaud et al., **Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I. Fibonacci and Lucas perfect powers**, *Annals of Mathematics*, vol. 163, pp. 969-1018, 2006.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

L'ATTAQUE DES FÉROCES ESCARGOTS

Dans nombre d'enluminures du Moyen Âge,
des chevaliers combattent de terrifiants... escargots.
Comment expliquer de telles joutes sans pitié?

D

ans *Monty Python: Sacré Graal!*, film sorti en 1975, un épisode célèbre met en scène le terrible lapin tueur de Caerbannog, égorgeur de chevaliers, dont seule la sainte Grenade d'Antioche viendra à bout. On pourrait réécrire la scène en remplaçant le petit animal à grandes oreilles avec un autre encore moins dangereux de réputation: l'escargot. Pourquoi un escargot? Pour les mêmes raisons qu'un lapin!

Tous les deux apparaissent à plusieurs reprises sous la forme d'enluminures dans

les marges de nombreux manuscrits médiévaux. Le plus souvent, ils sont aux prises avec des chevaliers armés dans des combats féroces. Le folio 16 du *Festal Missal*, rédigé à Amiens en 1323 par Garnerus de Morolio et illustré par Petrus de Raimbaucourt, est un bel exemple (*ci-contre*). Le gastéropode projette ses tentacules comme des lances vers un couple qui n'en mène pas large malgré son arsenal (épée, poignard, bouclier...). Comment expliquer ce motif récurrent?

Ce type d'enluminures est à classer parmi les «drôleries», des facéties picturales qui n'ont rien à envier à l'exubérance des tableaux de Jérôme Bosch, par exemple le *Jardin des délices*. Que ces fantaisies relèvent du pur amusement ou, pour certaines, de la subversion n'empêche pas de s'interroger sur une éventuelle source d'inspiration. De fait, ces drôleries témoignent du sens de l'humour et des préoccupations de l'époque.



L'ultime combat
de l'homme
et de la bête...

Les combats de chevaliers contre les escargots seraient d'abord apparus en France au XIII^e siècle avant d'essaimer en Angleterre et en Flandres. Étonnamment, d'où qu'ils viennent, les combats se ressemblent beaucoup dans leur mise en scène, au point que l'on peut supposer une transmission de pays à pays.

Plusieurs spécialistes ont tenté d'interpréter ces images. Selon des historiens, ces affrontements seraient une critique de la lâcheté, un lourd péché à cette époque très religieuse. Jean de Dunois, noble et militaire du XV^e siècle, et compagnon d'armes de Jeanne d'Arc, y voyait plutôt une métaphore de la



résurrection du Christ... sortant de sa coquille. Plus récemment, l'historien Lilian Randall propose de relier les escargots aux lombards, des prêteurs sur gages – et parfois usuriers – du Moyen Âge (ce métier serait né en Lombardie, en Italie, d'où leur nom). L'image peu flatteuse d'un corps mou aurait été associée à ce corps de métier peu digne de confiance.

Enfin, d'autres explications sont plus explicites et renvoient à de réels escargots, notamment ceux qui saccageaient régulièrement le vignoble français. De tels nuisibles méritaient d'être combattus, les chevaliers des enluminures

symbolisant les agriculteurs qui devaient quotidiennement lutter contre ce fléau à coquille. De fait, les escargots sont liés depuis toujours à la vigne dont ils apprécient particulièrement les bourgeons et les jeunes feuilles. Ils demeurent un problème pour les viticulteurs actuels. Les drôleries feraient ainsi état d'un combat permanent des humains contre un ravageur des cultures.

Une cause similaire expliquerait la présence des lapins. Dans son *Histoire naturelle*, l'écrivain romain du 1^{er} siècle Pline l'Ancien (très estimé au Moyen Âge) raconte que les habitants des îles Baléares ont réclamé auprès des

autorités romaines des soldats pour exterminer les prolifiques lapins qui détruisaient les cultures et entraînaient des famines. Des soldats ont donc bien combattu des lapins, des animaux tueurs (*via* les disettes). Cet épisode a pu inspirer les enlumineurs et les érudits Monty Python.

Les escargots et les lapins renvoient les dragons, loups et autres prédateurs au rang de bestioles inoffensives et toutes mignonnes... ■



Retrouvez la rubrique
Art & science sur
www.pourlascience.fr