

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

CINQ ÉNIGMES POUR LA RENTRÉE

Un bon problème mathématique doit avoir
une solution qui ne vient pas toute seule.
En voici cinq exemples...

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)

Un de mes professeurs parlait de démonstration « âne-qui-trotte » pour désigner les démonstrations qu'on mène en appliquant les définitions de base et en opérant quelques calculs et déductions faciles, n'exigeant aucun effort d'imagination. À l'opposé, les situations que préfèrent les mathématiciens sont celles où les techniques usuelles échouent et où il faut contourner le problème, le prendre par surprise, introduire des éléments qui n'ont en apparence aucun rapport avec l'énoncé et qui brusquement dénouent les difficultés.

De nombreux lecteurs m'ont écrit à la suite de l'article du mois de février où je présentais sept situations miraculeuses propres à réjouir les amateurs de mathématiques de toutes catégories. Puisque ces petits miracles ont intrigué et amusé, en voici cinq autres exposés sous la forme d'énigmes.

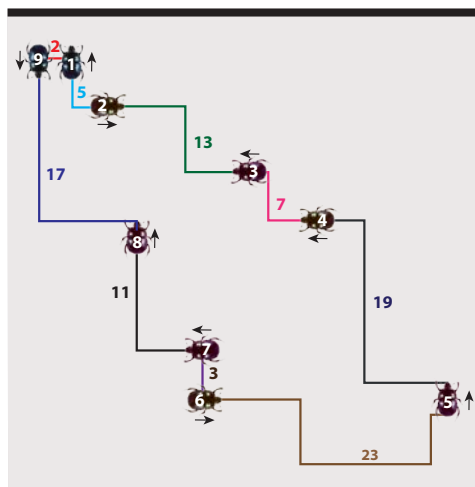
ÉNIGME 1: NEUF SCARABÉES ET DES NOMBRES PREMIERS

On place neuf scarabées sur un circuit, les écarts entre deux scarabées consécutifs, mesurés en mètres le long du circuit, étant l'un des neuf premiers nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23. L'ordre est quelconque et chacun des nombres apparaît une fois exactement. Si l'on fixe arbitrairement le scarabée considéré comme premier, il y a par exemple un écart de 5 mètres entre le premier et le deuxième (en tournant dans le sens horaire), de 13 mètres entre le deuxième et le troisième, de 7 mètres entre le troisième et le quatrième, puis 19, 23, 3, 11, 17 et 2 (entre le dernier et le premier).

Au départ, chaque scarabée choisit au hasard s'il ira, à 1 mètre par minute, dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font instantanément demi-tour. On suppose que la taille des scarabées est négligeable. Au bout de 50 minutes, après de multiples rencontres et demi-tours des neuf scarabées, on note leurs positions et les écarts qui les séparent. Les neuf écarts sont encore les neuf premiers nombres premiers ! Comment expliquer ce miracle arithmétique ?

LES NEUF SCARABÉES

1



Solution: Notons que le circuit a une longueur de 100 mètres, car $2+3+5+7+11+13+17+19+23=100$. Si A est un point du circuit, appelons « point opposé à A » le point B situé à 50 mètres sur le circuit, c'est-à-dire le point à égale distance de A que l'on circule dans le sens horaire ou dans le sens antihoraire.

Imaginons que chaque scarabée porte un drapeau (comme pour l'un des problèmes de février) et que lorsque deux scarabées se rencontrent, ils échangent leurs drapeaux. Chaque drapeau tournera toujours dans le même sens à la vitesse de 1 mètre par minute et, à chaque instant, chaque scarabée portera un seul drapeau.

En cinquante minutes, chaque drapeau aura donc parcouru 50 mètres, ce qui est la moitié exactement de la longueur totale du circuit. Il sera donc arrivé au point opposé à son point de départ. Les positions des scarabées sont les mêmes que les positions des drapeaux, car chaque scarabée, même s'il a changé de drapeau, porte exactement un drapeau. Si le circuit était circulaire, le dessin de leurs positions serait le symétrique par rapport au centre du cercle du dessin initial des positions, et donc les écarts entre scarabées consécutifs seraient les mêmes qu'au départ, c'est-à-dire les neuf premiers nombres premiers. Ces nombres apparaissent dans le même ordre qu'au départ à la condition de tourner dans le sens des aiguilles d'une montre et de partir du scarabée situé au point opposé à celui où se trouvait le premier scarabée dans la description initiale. Que le circuit ne soit pas circulaire ne change pas cette propriété des écarts, qui ne dépend que de la notion de point opposé, et les écarts entre scarabées au bout de 50 minutes sont bien les neuf premiers nombres premiers.

Bien sûr, l'information que les distances sont des nombres premiers n'a aucune importance et constitue un piège: seule leur somme 100 (double de 50) intervient dans la solution.

Notons aussi que ce qui se produit au bout de 50 minutes se produit aussi pour 100 minutes, 150 minutes, etc. mais qu'entre ces moments particuliers, les écarts entre scarabées n'ont pas de raison d'être des nombres premiers.

ÉNIGME 2: DES PAVAGES HEXAGONAUX

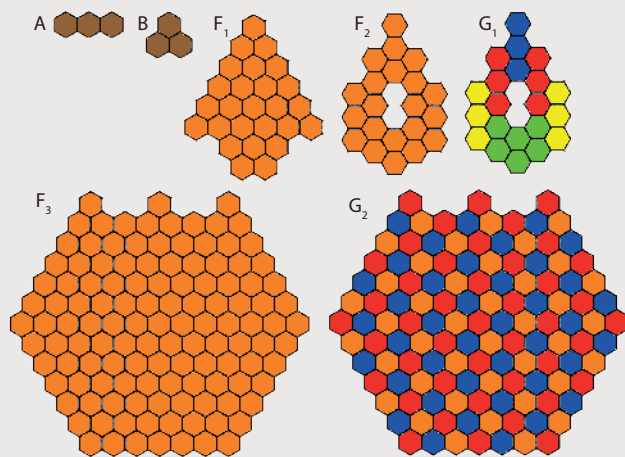
En utilisant des copies des formes A et B (voir l'illustration 2), il faut recouvrir parfaitement les figures F_1 , F_2 , F_3 , ou montrer que c'est impossible (les raisonnements d'impossibilité sont importants en mathématiques et on peut les rechercher pour s'entraîner).

On cherche donc à paver F_1 , F_2 et F_3 à l'aide des triples hexagones A et B dont on dispose d'autant d'exemplaires que souhaité.

Pour la première forme F_1 , c'est impossible car elle est composée d'un nombre d'hexagones (26) qui n'est pas un multiple de 3; or si

2

PAVAGES HEXAGONAUX



l'on pave une forme avec A et B, elle sera forcément composée d'un nombre d'hexagones multiple de 3.

Pour la deuxième forme F_2 , le nombre d'hexagones (21) est un multiple de 3 et on peut donc envisager de la paver avec des A et des B. C'est pourtant impossible, comme on le voit en raisonnant sur la figure G_1 . Pour paver la sorte de pointe en haut (*en bleu*), il faut nécessairement utiliser le pavé A. Ce qui reste alors à paver comporte encore deux sortes de pointes (*en rouge*) qui exigent à nouveau l'utilisation du pavé A, deux fois. Ce qui reste exige à nouveau deux fois la forme A (*en jaune*). Ce qui reste alors (*en vert*) est clairement impossible à paver avec A et B. Le raisonnement s'est déroulé rigoureusement en ne laissant aucune possibilité inexplorée: paver F_2 avec des A ou B est impossible.

La troisième forme F_3 est elle aussi impossible à paver avec des A ou B, mais c'est moins évident. Comment le démontrer?

Solution: La méthode utilisée pour la forme F_1 ne marche pas, car F_3 contient 123 hexagones, et 123 est multiple de 3. On peut essayer et raisonner en utilisant un argument du même type que celui mené pour F_2 . J'ignore si cette méthode aboutit, mais si c'est le cas cela doit être assez compliqué, car plusieurs positionnements des pièces A et B sont possibles quel que soit le point de départ envisagé pour le pavage. Une chose est certaine, la méthode suivante, à l'aide d'un coloriage, est plus rapide. Elle utilise un élément qui n'apparaît pas dans l'énoncé: on colorie le dessin avec trois couleurs comme sur la figure G_2 .

On note alors que, en plaçant n'importe où sur ce coloriage une forme A ou B, cette forme couvre nécessairement exactement un hexagone bleu, un rouge et un orange. Si l'on pouvait paver F_3 avec des A et des B, cela impliquerait >



Le dernier ouvrage de J.-P. Delahaye: **Mathématiques et mystères**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2016).

> que F_3 possède autant d'hexagones de chaque couleur. Or F_3 n'a pas le même nombre de pavés de chaque couleur : il y en a 43 de couleur rouge, 40 de couleur bleue et 40 de couleur orange. Elle est donc impossible à paver avec des A et des B.

ÉNIGME 3: SE CONNAÎTRE OU S'IGNORER

Soit k un entier positif. Lorsque n est assez grand, on peut être certain que dans toute assemblée de n personnes, il y en a k qui se connaissent mutuellement, ou alors k qui ne se connaissent pas du tout les unes les autres. Il est intéressant de connaître le plus petit entier n , noté $R(k)$, qui assure cette propriété.

Comme dans l'énigme précédente, nous allons rencontrer une impossibilité ; elle est ici encore plus étonnante. Lorsque 6 personnes se rencontrent, alors nécessairement 3 d'entre elles se connaissent mutuellement (a et b se connaissent, b et c se connaissent, a et c se connaissent) ou 3 d'entre elles ne se connaissent pas (a et b ne se connaissent pas, b et c ne se connaissent pas, a et c ne se connaissent pas). On montre cela par le raisonnement (*voir plus loin dans le texte*) ou en écrivant un programme qui examine tous les cas possibles, qui sont en nombre fini (il y a précisément $2^{15} = 32768$ graphes à examiner, les personnes étant représentées par des nœuds et leur connaissance mutuelle par des arêtes). Avec moins de 6 personnes, la propriété n'est plus vraie. Avec plus de 6 personnes, la propriété est bien sûr toujours vraie. On dit que le nombre de Ramsey pour $k=3$ vaut 6, et on écrit $R(3)=6$. Pour $k=4$, le nombre de Ramsey est 18 : $R(4)=18$. Vous allez être très surpris concernant $R(5)$, le nombre de Ramsey pour $k=5$. Pourquoi ?

Solution : La surprise n'est pas que le nombre $R(5)$ n'existe pas ou qu'il soit très grand. La surprise est que personne aujourd'hui ne connaît ce nombre. On sait juste qu'il est compris entre 43 et 48. L'idée d'énumérer par exemple tous les graphes à 43 nœuds pour savoir si 43 convient ou pas est difficile à mettre en œuvre, même avec les plus puissants ordinateurs, car il y en a trop. En effet, il existe $2^{43 \times 21}$ graphes possibles ayant 43 nœuds, nombre supérieur à 6×10^{271} , or les calculs les plus importants menés pour résoudre des problèmes (par exemple pour casser des systèmes

de chiffrement cryptographique) ne comportent au mieux que 10^{21} ou 10^{22} opérations élémentaires, ce qui est très inférieur au nombre en question ici.

On a longtemps disposé uniquement du majorant 49. Ce n'est que récemment que l'on a gagné une unité et que l'on est certain que $R(5) \leq 48$. Ce progrès est dû à un travail associant des raisonnements et des calculs massifs par ordinateur menés à leur terme en avril 2017 par Vigeik Angelteit et Brendan McKay de l'université australienne à Canberra (*voir* <https://arxiv.org/pdf/1703.08768.pdf>).

Au sujet de ces nombres si faciles à définir et pourtant si difficiles à calculer, le mathématicien hongrois Paul Erdős s'amuse à faire comprendre qu'on ne pourrait jamais aller très loin dans la connaissance des $R(n)$ en racontant l'histoire suivante :

« Si des extraterrestres bien plus puissants que nous arrivent sur Terre et nous demandent la valeur de $R(5)$ sous la menace d'une destruction totale de la planète, alors il faudra enrôler tous nos ordinateurs et tous nos mathématiciens pour calculer ce nombre. En revanche, s'ils nous demandent $R(6)$, nous n'aurons pas d'autres choix que de tenter de les anéantir. »

Si on se limite à la première partie de l'histoire (l'exigence de calculer $R(5)$), il se peut que l'on soit, même sans menace extraterrestre, capable d'y arriver un jour prochain. En effet, de très gros efforts de calcul ont été entrepris pour trouver des graphes à 43 nœuds qui ne contiennent ni sous-ensemble de 5 nœuds sans lien, ni sous-ensemble de 5 nœuds tous liés. De tels graphes prouveraient que $R(5) > 43$. Ne pas en trouver suggère que $R(5) = 43$ (sans bien sûr que cela puisse être considéré comme une preuve).

Ces recherches infructueuses font cependant espérer que, associé à quelques progrès dans les raisonnements sur ces graphes, on pourrait prochainement prouver définitivement que $R(5) = 43$. Si Erdős était vivant, il faudrait donc qu'il envisage de reformuler son histoire... et moi l'énigme proposée ici. Cela serait facile, car, par exemple concernant $R(6)$, on sait seulement qu'il est compris entre 102 et 165. Pour $R(10)$, notre ignorance est sidérante : on sait seulement qu'il est compris entre 798 et 23556 (*voir le tableau de la figure 3*). Sur ces questions, voir l'article de S. Radziszowski dans la bibliographie.

Si le calcul massif est parfois indispensable pour calculer des nombres de Ramsey, le raisonnement n'est pas interdit, et c'est peut-être parce qu'on ne le maîtrise pas bien qu'on doit faire appel aux ordinateurs. À titre d'exemple, voici une démonstration que $R(3) = 6$.

Soit une réunion de 6 personnes, parmi lesquelles Alain. Ou bien Alain connaît au moins trois d'entre elles (*cas 1*), ou bien c'est le

3

LES NOMBRES DE RAMSEY DE 1 À 10

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(k)$	1	2	6	18	Entre 43 et 48	Entre 102 et 165	Entre 205 et 540	Entre 282 et 1870	Entre 565 et 6588	Entre 798 et 23556