

L'EUROPE DES PALINDROMES

1

Un jeune Français, Romain Seignovert, fervent défenseur de l'idée d'une Europe unie, maintient un site Internet consacré à l'Europe (<https://europeisnotdead.com>). On y trouve notamment cette carte où chaque pays porte un palindrome dans sa langue.



2

LES NOMBRES NON PALINDROMES

premiers, ce que l'on démontre ou que l'on constate en examinant le nombre de nombres premiers inférieurs à 10^n pour $n=1, 2, 3, 4, \dots$, qui est 4, 25, 168, 1229, 9592, 78498, 664579, 5761455, ... (en ordre de grandeur: $10^n/n$).

La série des inverses des nombres palindromes converge vers la limite 3,37018..., alors que la série des inverses des nombres premiers a une somme infinie, marque d'une densité assez forte.

DIVISIBILITÉ, NOMBRES PREMIERS

Autre propriété élémentaire: si un nombre palindrome est formé d'un nombre pair de chiffres, alors il est divisible par 11, et ce n'est donc pas un nombre premier, sauf pour 11 lui-même. Pour le démontrer, on applique le critère de divisibilité par 11: «Un entier est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est un multiple de 11» (par exemple, 915123 est un multiple de 11 puisque $(9+5+2) - (1+1+3) = 11$). Pour un nombre palindrome N ayant un nombre pair de chiffres, les deux sommes en

Les nombres strictement non palindromes sont, par définition, les entiers n qui ne sont palindromes dans aucune base b avec $2 \leq b \leq n-2$. On impose la limite $n-2$ car, en base $n-1$, le nombre n s'écrit 11 et est donc toujours palindrome. La suite des nombres strictement non palindromes commence par : 0, 1, 2, 3, 4, 6, 11, 19, 47, 53, 79, 103, 137, 139, 149, 163, 167, 179, 223, 263, 269, 283, 293, ... qui est la suite A016038 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane.

Une propriété intéressante des nombres strictement non palindromes est que ce sont tous des nombres premiers, à l'exception de 4 et 6.

En voici la démonstration. On se donne un nombre composé quelconque $n > 6$ et on montre que n est palindrome dans une base bien choisie.

• Si n est pair, n s'écrit 22 dans la base

$b = n/2 - 1$, car $n = 2(n/2 - 1) + 2$.

• Si n est impair, on écrit $n = pm$, où p est le plus petit facteur premier de n . Nécessairement, $p \leq m$.

• Si $p = m = 3$, alors $n = 9$ s'écrit 1001 en base $b = 2$.

• Si $p = m > 3$, alors n s'écrit 121 en base $b = p - 1$, car

$$121_{p-1} = 1 + 2(p-1) + (p-1)^2 = 1 + 2p - 2 + p^2 - 2p + 1 = p^2 = n$$

• Le cas $p = m - 1$ est impossible, car p et m sont impairs.

• Si $p < m - 1$, alors n est le palindrome pp en base $b = m - 1$, car $p(m-1) + p = pm$.

Sans mal, on contrôle à chaque fois que la base proposée vérifie $2 \leq b \leq n-2$ et que les chiffres du palindrome proposé sont des nombres entiers entre 0 et $b-1$.

(voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_strictement_non_palindrome).

> question sont égales; leur différence est nulle, donc N est multiple de 11.

On arrive maintenant en terrain moins facile. Qu'en est-il des nombres palindromes ayant un nombre impair de chiffres? Peuvent-ils être des nombres premiers? Plus généralement, qu'en est-il des diviseurs des nombres palindromes?

Voici d'abord le début de la suite des nombres premiers palindromes (<https://oeis.org/A002385>): 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, 12821, 13331, 13831, 13931, 14341, 14741, 15451, 15551, 16061, 16361, 16561, 16661, 17471, 17971, 18181, ...

Le plus grand nombre premier palindrome connu aujourd'hui est $10^{474500} + 999 \times 10^{237249} + 1$, qui est formé de 474501 chiffres.

On cherche à démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers palindromes. Cela semble probable, car les deux propriétés «être un nombre premier» et «être un palindrome», au moins pour les nombres composés d'un nombre impair de chiffres, semblent indépendantes. Cependant, cette intuition un peu vague n'a pas pu être confirmée par une démonstration et donc l'affirmation «Il existe

une infinité de nombres premiers palindromes» reste à l'état de conjecture.

Il existe des méthodes pour construire des nombres palindromes qui ne sont pas des nombres premiers. En voici une.

$$1 \times 1 = 1$$

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

$$111111 \times 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

Malheureusement, la méthode ne fonctionne plus au-delà:

$$1111111111 \times 1111111111 = 1234567900987654321$$

Le sixième des nombres de cette série de palindromes est vraisemblablement le premier palindrome à avoir attiré l'attention d'un mathématicien. En effet, il est mentionné par Mahāvīra, un mathématicien indien du IX^e siècle de notre ère. Dans son ouvrage en sanskrit *Ganita-sāra-sangraha*, il évoque ce carré parfait en le décrivant comme un nombre «commençant par 1 et allant jusqu'à 6, puis décroissant en ordre inverse».

DEUX FOIS PALINDROME

Voici les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, a et b variant de 2 à 20 ($a < b$). Ce tableau a été établi par Erich Friedman. Ainsi, pour $a = 2$ et $b = 3$, il faut aller jusqu'à 6 643 pour trouver un nombre qui convient : $6643_{10} = 1100111110011_2 = 100010001_3$.

$b \backslash a$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	6 643																	
4	5	10																
5	31	26	46															
6	7	28	21	67														
7	85	8	85	24	92													
8	9	121	63	18	154	121												
9	127	10	10	109	80	40	154											
10	33	121	55	88	55	121	121	191										
11	255	244	255	12	166	24	36	60	232									
12	65	13	65	26	104	78	65	91	181	277								
13	313	28	42	98	14	235	154	70	222	84	326							
14	15	1210	15	408	135	135	45	30	323	60	253	379						
15	693	16	1265	1612	80	16	316	80	828	48	241	112	436					
16	17	68	17	119	385	85	170	136	353	221	1 172	170	337	497				
17	341	784	341	18	1211	307	18	528	252	36	290	126	90	144	562			
18	325	1733	38	57	209	57	325	209	171	133	1 462	209	323	361	433	631		
19	381	20	514	428	80	40	260	20	666	60	362	140	60	80	514	180	704	
20	21	1 604	21	126	21	1 944	63	273	252	84	761	42	105	421	273	126	541	781

3

Voici une série de formules qui, elles, donnent une infinité de nombres palindromes composés:

$$\begin{aligned}11 \times 11 \times 11 &= 1331 \\11 \times 11 \times 111 &= 13431 \\11 \times 11 \times 1111 &= 134431 \\11 \times 11 \times 11111 &= 1344431 \\11 \times 11 \times 111111 &= 13444431\end{aligned}$$

...

Ajoutons encore deux séries infinies:

$$\begin{aligned}11 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 13566 \dots 66531 \\ \text{et } 111 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 136899 \dots 9998631\end{aligned}$$

FACTEURS PREMIERS ET CONJECTURES

William Banks a démontré qu'il existe des nombres palindromes ayant un nombre de facteurs premiers aussi grand que souhaité. Il existe donc par exemple des nombres palindromes ayant plus de 1 000 facteurs premiers. Il a aussi établi qu'il existe des nombres palindromes ayant des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire; il existe par exemple des nombres palindromes ayant un facteur premier composé de plus de 1 million de chiffres.

Une autre étude, cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sataka, établit que la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes tend vers 0. On sait, d'après le théorème d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$ ($\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x). On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes: la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev: les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont uniquement 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée pour les 8 premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, le mathématicien brésilo-canadien Paulo Ribenboim a proposé de dénommer «nombre premier triplement palindrome» un nombre premier palindrome de m chiffres décimaux, où m est un nombre premier palindrome de n chiffres décimaux, où n est lui-même un nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10 000 500 001, qui comporte 11 chiffres; 11 est un nombre premier palindrome lui-même constitué de 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome.

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	9 + 2	11
3	7 × 7 × 7	343
4	9 × (9 × 9 + 2)	747
5	9 × 9 × 9 × 9 - 5	6556
6	3 × 7 × 7 × 8 × 8 × 8	65856
7	8 × 8 × 8 × 8 × 9 × (9 + 2)	405504
8	8 × 9 × 9 × 9 × 9 × 9 - 4	4251524
9	8 × 8 × (5 × 6 × 8 × 8 × 8 × 9 + 2)	8847488
10	7 × 7 × 7 × 8 × (7 × 8 × 8 × 8 × 9 - 4)	88499488
11	6 × 8 × 8 × 8 × 9 × (6 × 7 × 9 × 9 × 9 + 8)	846747648
12	7 × 8 × 8 × 8 × 8 × 9 × (4 × 7 × 7 × 9 × 9 - 3)	4095995904
13	7 × 7 × 7 × 7 × 8 × (7 × 7 × 7 × 8 × 8 + 6)	23613431632
14	9 × 9 × 9 × 9 × 9 × 9 × (9 × 9 + 2) × (4 × 7 × 7 × 8 - 6)	68899199886
15	7 × 7 × 7 × 7 × 8 × 8 × 8 × 8 × (2 + 9) × (9 × 9 × 9 + 3)	633498894336

UN JEU AVEC LES PALINDROMES

4

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule $9 \times (9 \times 9 + 2)$ donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome

qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (voir <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html>). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés, mais ils sont peut-être améliorables pour 10 chiffres utilisés ou plus.

Plus intéressant, $10^{11310} + 4661664 \times 10^{5652} + 1$ est formé de 11311 chiffres, le nombre 11311 étant un nombre premier palindrome qui a lui-même 5 chiffres, 5 étant encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ignore s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

ET QUAND ON CHANGE DE BASE ?

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagé que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases ?

Les calculs du nombre de nombres palindromes faits pour la base 10 se généralisent sans difficulté à une base $b > 1$. La propriété «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11» devient sans surprise: «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base b sont multiples de $(b+1)$ ». Par exemple, le nombre N dont l'écriture en base 5 est 123321₅ est divisible par 6: $123321_5 = 5^5 + 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 = 4836 = 806 \times 6$.

Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24: