

Voici une série de formules qui, elles, donnent une infinité de nombres palindromes composés:

$$\begin{aligned}11 \times 11 \times 11 &= 1331 \\11 \times 11 \times 111 &= 13431 \\11 \times 11 \times 1111 &= 134431 \\11 \times 11 \times 11111 &= 1344431 \\11 \times 11 \times 111111 &= 13444431\end{aligned}$$

...

Ajoutons encore deux séries infinies:

$$\begin{aligned}11 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 13566 \dots 66531 \\ \text{et } 111 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 136899 \dots 9998631\end{aligned}$$

FACTEURS PREMIERS ET CONJECTURES

William Banks a démontré qu'il existe des nombres palindromes ayant un nombre de facteurs premiers aussi grand que souhaité. Il existe donc par exemple des nombres palindromes ayant plus de 1 000 facteurs premiers. Il a aussi établi qu'il existe des nombres palindromes ayant des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire; il existe par exemple des nombres palindromes ayant un facteur premier composé de plus de 1 million de chiffres.

Une autre étude, cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sataka, établit que la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes tend vers 0. On sait, d'après le théorème d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$ ($\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x). On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes: la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev: les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont uniquement 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée pour les 8 premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, le mathématicien brésilo-canadien Paulo Ribenboim a proposé de dénommer «nombre premier triplement palindrome» un nombre premier palindrome de m chiffres décimaux, où m est un nombre premier palindrome de n chiffres décimaux, où n est lui-même un nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10 000 500 001, qui comporte 11 chiffres; 11 est un nombre premier palindrome lui-même constitué de 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome.

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	9 + 2	11
3	7 × 7 × 7	343
4	9 × (9 × 9 + 2)	747
5	9 × 9 × 9 × 9 - 5	6556
6	3 × 7 × 7 × 8 × 8 × 8	65856
7	8 × 8 × 8 × 8 × 9 × (9 + 2)	405504
8	8 × 9 × 9 × 9 × 9 × 9 - 4	4251524
9	8 × 8 × (5 × 6 × 8 × 8 × 8 × 9 + 2)	8847488
10	7 × 7 × 7 × 8 × (7 × 8 × 8 × 8 × 9 - 4)	88499488
11	6 × 8 × 8 × 8 × 9 × (6 × 7 × 9 × 9 × 9 + 8)	846747648
12	7 × 8 × 8 × 8 × 8 × 9 × (4 × 7 × 7 × 9 × 9 - 3)	4095995904
13	7 × 7 × 7 × 7 × 8 × (7 × 7 × 7 × 8 × 8 + 6)	23613431632
14	9 × 9 × 9 × 9 × 9 × 9 × (9 × 9 + 2) × (4 × 7 × 7 × 8 - 6)	68899199886
15	7 × 7 × 7 × 7 × 8 × 8 × 8 × 8 × (2 + 9) × (9 × 9 × 9 + 3)	633498894336

UN JEU AVEC LES PALINDROMES

4

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule $9 \times (9 \times 9 + 2)$ donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome

qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (voir <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html>). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés, mais ils sont peut-être améliorables pour 10 chiffres utilisés ou plus.

Plus intéressant, $10^{11310} + 4661664 \times 10^{5652} + 1$ est formé de 11311 chiffres, le nombre 11311 étant un nombre premier palindrome qui a lui-même 5 chiffres, 5 étant encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ignore s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

ET QUAND ON CHANGE DE BASE ?

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagé que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases ?

Les calculs du nombre de nombres palindromes faits pour la base 10 se généralisent sans difficulté à une base $b > 1$. La propriété «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11» devient sans surprise: «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base b sont multiples de $(b+1)$ ». Par exemple, le nombre N dont l'écriture en base 5 est 123321₅ est divisible par 6: $123321_5 = 5^5 + 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 = 4836 = 806 \times 6$.

Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24:

> $5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^A = 15151_{24}$ (en base 24, on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9, A, B, C, ..., L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans ces formules).

Une question vient naturellement à l'esprit: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois?»

Remarquons d'abord que si n est un nombre quelconque, il est palindrome dans toutes les bases b où $b > n$, car n s'y écrit alors avec un seul chiffre. C'est un peu facile! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois, avec $b < n$?»

Une petite exploration montre que oui. On en trouve aisément. Un bel exemple est 105. En effet: $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$.

Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman, de l'université Stetson, en Floride.

Bien évidemment, il est intéressant de savoir si les nombres de la suite F_n de Fibonacci ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n > 1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cités au-dessus ne sont pas les seuls: encore une conjecture!

SOMMES DE NOMBRES PALINDROMES

En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. C'est l'affirmation dénommée conjecture faible de Goldbach, mais qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontrée en 2013 par le mathématicien péruvien Harald Helfgott, qui est chercheur du CNRS à Paris. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach, qui, elle, attend toujours une démonstration.

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes? Donnent-elles tous les entiers? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas? Les nombres palindromes étant plus faciles à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui parfaitement les réponses à ces questions.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes:

21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1091, 1092, 1093, 1094, ...

C'est la suite A035137 de l'encyclopédie de Neil Sloane. Il est assez aisé de vérifier qu'un nombre n de cette liste n'est pas la somme de deux palindromes. On considère les $n+1$ façons d'écrire n comme une somme $a+b$ de deux entiers, et on constate que a et b ne sont jamais simultanément palindromes.

PYRAMIDES

5

Si, en partant d'un chiffre considéré comme sommet, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes dont chaque étage coïncide avec l'étage juste au-dessus et ne dépasse que d'un chiffre à droite et à gauche de l'étage juste au-dessus, on est vite arrêté. Seules les pyramides indiquées ci-contre sont possibles.

En s'autorisant un élargissement de deux chiffres à droite et à gauche à chaque étage, on obtient beaucoup mieux (toujours en n'utilisant que des nombres premiers palindromes).

La hauteur maximale des pyramides les plus hautes de sommet 2 est 26 et il y a deux solutions, la dernière ligne de

2	2	3	3	5	5	5	7
929	929	131	131	151	353	757	373
39293	39293	11311	71317	31513	33533	37573	93739
7392937	3392933			3315133	1335331	9375739	
373929373	733929337						

l'une d'elles étant :
13189272993373301274751519389
4339011971272339635702075369
33272179110933498915157472103
37339927298131. Si, au sommet, on place le chiffre 3, on trouve trois pyramides de hauteur 28. En partant de 5 ou 7, on trouve à chaque fois une pyramide de hauteur 29.

Tous ces résultats proviennent de G. L. Honaker et Chris Caldwell, deux passionnés américains des nombres

premiers. On trouvera ces résultats dans leur article « Palindromic prime pyramids », *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000, dont des compléments ont été ajoutés sur : http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/step_size2.html et sur : <http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/>.

BIBLIOGRAPHIE

J. Cilleruelo et F. Luca, **Every positive integer is a sum of three palindromes**, prépublication arXiv:1602.06208, 2016.

A. Bérczes et V. Ziegler, **On simultaneous palindromes**, *J. Comb. Number Theory*, vol. 6, pp. 37-49, 2014.

Y. Bugeaud, **Automatic continued fractions are transcendental or quadratic**, prépublication arXiv:1012.1709, 2010.

B. Adamczewski et Y. Bugeaud, **Palindromic continued fractions**, *Annales de l'institut Fourier*, vol. 57(5), pp. 1557-1574, 2007.

G. L. Honaker et C. Caldwell, **Palindromic prime pyramids**, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000.

E. Friedman, **Problem of the Month**, juin 1999 : <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html>

Joseph DeVincentis et Ulrich Schimke ont démontré qu'il existe une infinité d'entiers qui ne sont pas somme de deux nombres palindromes. L'affaire est entendue: en effectuant la somme de deux nombres palindromes, on n'obtient qu'une petite partie des entiers.

Le plus beau résultat concernant les sommes de palindromes est récent, mais lui aussi tout aussi définitif: «Tout nombre entier est somme de trois nombres palindromes au plus.» Le nombre 2000, par exemple, est la somme de 616, 383 et 1001.

Le résultat a été obtenu en deux temps. D'abord, en 2015, William Banks a démontré qu'en base 10, tout entier est somme d'au plus 49 nombres palindromes. Il semblait alors qu'on était au début d'une série de résultats où, progressivement, on remplacerait 49 par des entiers de plus en plus petits.

En fait, l'affaire fut magistralement traitée d'un seul coup. Javier Cilleruelo, de l'université de Madrid, et Florian Luca, mathématicien roumain aujourd'hui à l'université de Witwatersrand, à Johannesburg (Afrique du Sud), ont en effet démontré en 2016 dans un article de 39 pages que: «Dans toute base $b \geq 5$, tout entier s'écrit comme une somme d'au plus trois nombres palindromes.» La démonstration est constructive, puisqu'elle décrit un algorithme qui conduit, pour tout entier donné, à la somme recherchée. Cette prouesse nous rappelle la démonstration de Gauss en 1796 établissant que tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires (c'est-à-dire de la forme $n(n+1)/2$).

L'article revient aussi sur les sommes de deux palindromes et montre que les entiers qui ne sont pas somme de deux palindromes sont très nombreux dans le sens suivant: pour chaque base $b \geq 2$, il existe une constante strictement positive c telle que les nombres qui ne sont pas somme de deux palindromes représentent une proportion des nombres entiers supérieure à c . Javier Cilleruelo et Florian Luca conjecturent, sans toutefois réussir à la démontrer, une propriété analogue pour les nombres entiers qui sont la somme de deux palindromes.

INFINIMENT PALINDROME

Terminons par un remarquable résultat concernant les palindromes infinis et les nombres réels transcendants. Pour l'énoncer, il faut d'abord évoquer la notion de nombre infiniment palindrome et celle de fraction continue.

Considérons la suite de symboles composée uniquement de a et de b définie en partant de ab et en ajoutant son complément ba (chaque a est remplacé par b et chaque b par a), ce qui donne $abba$, puis en recommençant en ajoutant le complément de ce qu'on vient

d'obtenir, ce qui donne $abbabaab$, et en recommençant indéfiniment:

$abbabaabbaababba$,

$abbabaabbaababbabaabbaabbaabbaab$, etc.

On obtient une suite infinie de a et de b dont les 4 premiers symboles sont un palindrome, de même que les 16 premiers symboles, de même que les 64 premiers symboles, etc. On dit que c'est un mot «infiniment palindrome»: ses débuts sont une infinité de fois des palindromes.

Quand on dispose d'une suite infinie d'entiers positifs $a_0, a_1, a_2, \dots$ il est usuel en arithmétique de considérer le nombre réel suivant dénommé fraction continue associée à la suite $a_0, a_1, a_2, \dots$:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

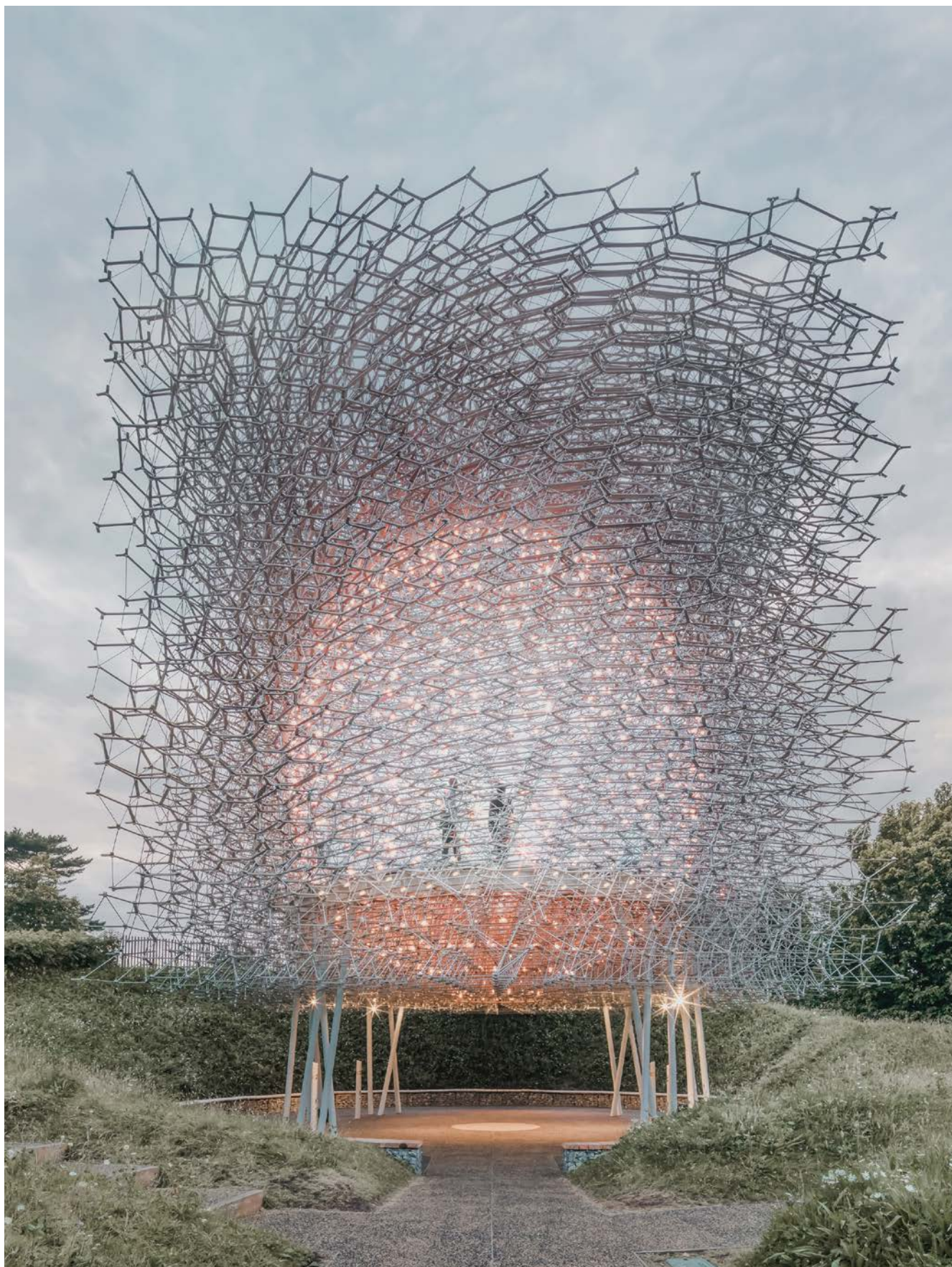
Un extraordinaire résultat de Boris Adamczewski et Yann Bugeaud établit que si la suite de nombres entiers est infiniment palindrome, alors le nombre réel défini par la fraction continue associée est soit un nombre quadratique, soit un nombre transcendant, c'est-à-dire que soit il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers de degré 2 au plus, soit il n'est la solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Dit encore autrement, les nombres réels définis par des fractions continues infiniment palindromes sont élémentaires ou alors aussi compliqués que les nombres π ou e (qui sont transcendants). C'est bien sûr un moyen nouveau de définir des nombres transcendants. En particulier, le nombre x obtenu en prenant $a=1$ et $b=2$ dans le mot infiniment palindrome indiqué plus haut et en écrivant la fraction continue associée est transcendant:

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

On aimerait avoir un résultat analogue concernant les nombres dont l'écriture en base B est une suite infiniment palindrome. Mais pour l'instant, les techniques disponibles achoppent et à nouveau on est réduit à des conjectures.

Amusements sans prétention ou résultats profonds et difficiles, voire seulement conjecturés, les palindromes occupent passionnément les mathématiciens qui y découvrent mille merveilles insoupçonnées. ■



Une sculpture métallique de 17 mètres de hauteur invite à s'immerger dans la vie d'une ruche.

© The Hive at Kew Gardens - image Mark Hadden

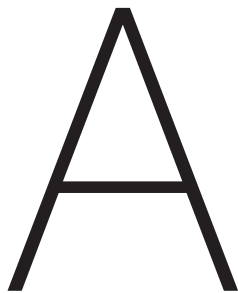
L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à Pour la Science

LET IT BEE

**Entrer dans une ruche
bourdonnante de 17 mètres
de haut et plonger ainsi
dans la vie d'une colonie
de vraies abeilles :
une expérience étourdissante
à vivre à Kew Gardens,
près de Londres.**



u milieu du ^{xx}e siècle, l'éthologue allemand Karl von Frisch a considérablement fait progresser les connaissances sur les abeilles. Par exemple, il perça à jour le langage de leur danse, découvrit les bases de leur sens de l'orientation, et élucida les modalités de leur odorat et de leur vue. Ces travaux lui valurent le prix Nobel de physiologie en 1973.

Que n'aurait-il pas donné pour pouvoir entrer dans une ruche et observer en temps réel ce qui s'y passe ? C'était difficile à son époque, mais ça l'est moins aujourd'hui grâce à l'œuvre de l'artiste britannique Wolfgang Buttress installée dans les jardins botaniques royaux de Kew, à Londres. *The Hive* n'est rien de moins qu'une ruche (*hive* en anglais) de 17 mètres de hauteur dans laquelle on peut déambuler.

Créée à l'origine pour le pavillon britannique de l'exposition universelle de Milan, en 2015, dont le thème était « Nourrir la planète, énergie pour la vie », l'installation a récemment rejoint la Grande-Bretagne. Ce ne fut pas une

mince affaire : il fallut quatre mois pour terminer ce puzzle géant de 170 000 morceaux d'aluminium et 1 000 ampoules à LED, pour un poids total de 44 tonnes. S'il est assez près, le spectateur distingue bien une structure en nid d'abeilles (des hexagones) qui monte doucement en spirale. Mais les points communs avec une vraie ruche vont bien plus loin que cette simple apparence.

SURVEILLEZ L'ESSAIM

Conscient des dangers que courent les abeilles (changement climatique, infections virales, usage abusif de pesticides...), l'artiste a voulu créer une œuvre propre à alerter le public sur ces menaces. Pour ce faire, il s'est entouré d'une équipe pluridisciplinaire et s'est notamment rapproché de Martin Bencsik, de l'université de Nottingham, en Grande-Bretagne. Celui-ci s'est particulièrement intéressé au comportement d'essaimage, c'est-à-dire quand une colonie décide de quitter une ruche pour aller s'établir ailleurs. Il a ainsi équipé des ruches avec des accéléromètres pour enregistrer l'activité de l'ensemble des insectes et y détecter les signes annonciateurs du départ.

Ce dispositif est la clé de voûte de *The Hive*. En effet, il équipe désormais une vraie ruche installée à Kew Gardens, dont il enregistre les sons et les vibrations créés par les bourdonnements d'environ 40 000 abeilles. Les signaux sont ensuite récupérés et traités par un logiciel qui

contrôle les lumières et les sons diffusés à l'intérieur de la sculpture.

Ainsi, le matin, quand l'activité dans la ruche est réduite, les ampoules clignotent lentement. En revanche, par un bel après-midi ensoleillé, l'installation est baignée de flashes rapides et intenses.

Quant aux sons entendus dans *The Hive*, ils sont constitués de ceux, très amplifiés, de la ruche auxquels s'ajoute un tapis sonore de violoncelles et de voix composé par Deirdre Bencsik, l'épouse de Martin, et chanté par Camille Buttress, la fille de l'artiste. D'autres musiciens (un percussionniste, un pianiste...) accompagnent ce trio abeilles, violoncelle et voix, tous étant désormais regroupés dans une formation nommée Be.

Plusieurs morceaux de musique ont été enregistrés (un album, *One*, est d'ailleurs disponible) et sont diffusés selon l'activité des abeilles de la ruche.

En fin de compte, lorsque le public se retrouve au cœur de *The Hive*, il est immergé dans une immense ruche bourdonnante d'une activité rendue palpable et sensible par les lumières et les sons. L'installation est une sorte d'écho amplifié de la vie d'une ruche.

L'histoire ne dit pas comment réagira l'installation quand les abeilles hébergées à ses côtés décideront d'essaimer et de quitter les lieux. *The Hive* s'éteindra-t-elle alors en devenant silencieuse ? ■

The Hive at Kew Gardens:

<http://bit.ly/PLS-ZeHive>

Le site de Wolfgang Buttress:

<http://www.wolfgangbuttress.com/>

M. Bencsik et al., *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 76, pp. 44-50, 2011.



Retrouvez la rubrique
Art & science sur
www.pourlascience.fr