

Plus étonnant peut-être, un an après, à un mois d'intervalle, le 21 septembre et le 16 octobre 2010, le Loto israélien sortit la série 13, 14, 26, 32, 33, 36, provoquant là encore l'étonnement mondial. Comme l'expliquait David Hand dans son article «Des coïncidences pas si étranges» (*Pour la Science* n°438, avril 2014), si l'on prend en compte le nombre de jeux de Loto dans le monde, et le nombre de tirages que chacun d'eux opère, souvent plusieurs fois par semaine, notre étonnement doit cesser.

Plus précisément, considérons le Loto bulgare où l'on tire 6 numéros entre 1 et 49, ce qui donne une probabilité de gagner de 1/13983816. Demandons-nous combien de tirages sont nécessaires pour que l'événement «deux d'entre eux donnent le même résultat» ait une probabilité supérieure à 50% de se produire. La réponse est 4404.

Le calcul est analogue à celui fait pour le célèbre paradoxe des anniversaires, selon lequel dès que 23 personnes sont réunies, la probabilité que deux d'entre elles aient la même date anniversaire dépasse 50 %. Cela montre que les événements ressentis comme extraordinaires pour les loteries bulgare et israélienne sont en fait nécessaires. Ce n'est pas la survenue des tirages identiques qui est improbable, mais l'inverse: si tous les tirages étaient toujours différents, nous devrions nous en étonner et en rechercher l'explication.

Une autre source d'étonnements provient des séries rapprochées d'événements rares, tels que les accidents d'avion. Les journalistes aiment mentionner une prétendue «loi des séries», pourtant inconnue des mathématiciens, qui expliquerait ces rapprochements jugés à la fois fortement improbables et explicables par cette introuvable loi... Jacques Chirac disait simplement: «Les emmerdes, ça vole »

3

LOI DE POISSON ET ACCIDENTS D'AVION

En août 2005, une série de cinq catastrophes aériennes s'est produite dans un intervalle de 22 jours, faisant plusieurs centaines de morts au total. Cela nous semble extraordinaire, mais l'est-ce vraiment ?

Élise Janvresse et Thierry de la Rue proposent une belle analyse du problème dans leur petit livre *La Loi des séries, hasard ou fatalité ?* (Le Pommier, 2007). En examinant les données disponibles, ils ont évalué que la probabilité totale d'un accident sur un vol d'au moins 30 passagers est de 0,04 par jour. Ils ont ensuite calculé le nombre total d'accidents auquel il faut s'attendre sur une période donnée. On fait appel à la loi de Poisson, une loi des événements rares introduite par Siméon Denis Poisson en 1837. Elle est appropriée ici, puisque la probabilité que 1 des 20 000 vols quotidiens soit victime d'un accident est $0,04/20\,000 = 0,000\,002$.

La loi de Poisson fait intervenir un paramètre d'intensité λ calculé à partir du nombre moyen d'accidents sur

la période considérée — soit, pour une journée, 0,04. D'après la loi de Poisson, la probabilité que le nombre N d'accidents soit égal à l'entier k durant la période choisie est donnée par la formule :

$$\text{Proba}(N = k) = \exp(-\lambda) \lambda^k / k !$$

Si l'on se fixe une fenêtre particulière de 22 jours, alors l'intensité pour cette période vaut $\lambda = 0,04 \times 22 = 0,88$. La probabilité pour qu'il n'y ait eu que 0, 1, 2, 3 ou 4 accidents est donc :

$$\begin{aligned} \text{Proba}(N \leq 4) &= \text{Proba}(N = 0) + \text{Proba}(N = 1) + \text{Proba}(N = 2) + \\ &\text{Proba}(N = 3) + \text{Proba}(N = 4) = \\ &\exp(-0,88)[1 + 0,88^1 + \\ &0,88^2/(2 \times 1) + 0,88^3/(3 \times 2 \times 1) + \\ &0,88^4/(4 \times 3 \times 2 \times 1)] = 0,9978. \end{aligned}$$

La probabilité qu'il y ait eu 5 accidents ou plus dans la période de 22 jours fixée est donc $1 - 0,9978 = 0,0022$, ce qui est faible.

La série malheureuse de catastrophes de 2005 serait donc extraordinaire ! Ce serait oublier qu'il faut envisager non pas une fenêtre de 22 jours, mais toutes les fenêtres de 22 jours présentes durant une année. Le calcul est assez compliqué, car les fenêtres à envisager se chevauchent. Élise Janvresse et Thierry de la Rue ont donc fait usage de ce qu'on nomme les statistiques de balayages, mises au point assez récemment pour traiter ce type de problèmes. Ils concluent que la probabilité que, durant une année donnée, il se produise 5 accidents aériens graves ou plus dans une fenêtre de 22 jours est 11 %. C'est assez faible, mais cela rend la série malheureuse de 2005 peu étonnante, d'autant plus que le calcul mené ne prend pas en compte les variations saisonnières du trafic aérien qui, en concentrant les vols sur certaines périodes, augmentent le 11 % obtenu.

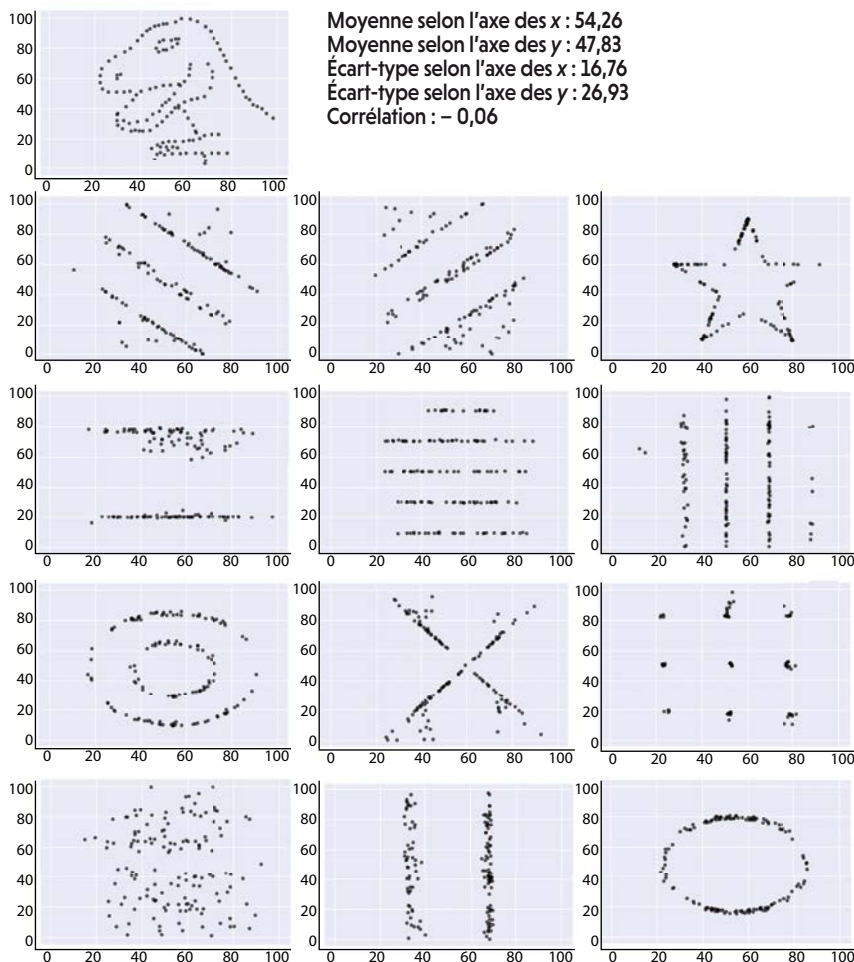


MÊMES PARAMÈTRES... ET POURTANT SI DIFFÉRENTS

4

Nous pensons en général que si des données ont des paramètres statistiques proches (moyennes, écarts-types, etc.), elles se ressemblent nécessairement. Les paramètres statistiques, pensons-nous, sont comme des versions compressées des séries de données. Justin Matejka et George Fitzmaurice prouvent graphiquement que c'est faux. À l'aide d'une méthode qui leur permet de créer facilement des séries ayant exactement les mêmes paramètres statistiques, ils ont notamment produit ces 13 schémas, utiles à tous ceux qui souhaitent prendre conscience de notre fragile compréhension intuitive du hasard et des statistiques.

Il s'agit de graphiques de séries de couples de nombres (x, y) , qui apparaissent très différents. Pourtant, d'une série à l'autre, les 5 paramètres suivants sont les mêmes : moyenne des x , écart-type des x , moyenne des y , écart-type des y , corrélation entre les x et les y . Lorsque la corrélation entre les x et les y est parfaite, ce type de schéma est une droite. (Voir J. Matejka et G. Fitzmaurice, « Same stats, different graphs : Generating datasets with varied appearance and identical statistics », *Proceedings of the 2017 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, pp. 1290-1294, ACM, 2017.)



> toujours en escadrille!... Certaines analyses tentent d'en identifier l'origine en parlant d'une « attente excessive d'étalement » (voir mon article « Notre vision du hasard est bien hasardeuse », *Pour la Science* n° 293, mars 2002) : notre intuition nous souffle à tort que, par exemple, les dates des accidents d'avion doivent être régulièrement espacées, alors que les statistiques nous montrent autre chose.

Cette attente excessive d'étalement a été clairement analysée dans les cas précis des accidents d'avions par Élise Janvresse et Thierry de la Rue, de l'université de Rouen (voir l'encadré 3 page 111).

DES SÉRIES TRÈS DIFFÉRENTES, MAIS AYANT LA MÊME STATISTIQUE

Notre bon sens est défaillant pour traiter les probabilités et nous sommes surpris dans des cas où il n'y a pas lieu de l'être. Utiliser le mot « coïncidence » n'explique rien ou alors cela introduit des idées étranges comme la synchronicité de Carl Gustav Jung ou les champs morphiques de Rupert Sheldrake, dont les scientifiques ont vainement cherché à prouver l'existence (voir par exemple www.sceptiques.qc.ca/dictionnaire/).

Cette faiblesse de notre esprit à percevoir correctement les probabilités a encore récemment été mise en évidence. On est tenté de penser que si des données ont des paramètres statistiques proches, elles doivent nécessairement se ressembler ; or Justin Matejka et George Fitzmaurice, de la société Autodesk Research à Toronto, ont créé délibérément des exemples magnifiques montrant que c'est faux.

Pour engendrer leurs séries, ils ont mis au point une technique qui leur permet de jouer facilement avec les formes des graphes créés. Ainsi, la figure de l'encadré 4 ci-contre visualise une collection de 13 séries de couples de nombres (x, y) qui, malgré leurs graphes très différents (chaque couple (x, y) représentant un point du plan), ont les mêmes 5 paramètres suivants : moyenne des x , écart-type des x , moyenne des y , écart-type des y , corrélation entre les x et les y .

SIMPLE ET INATTENDU

Toujours afin de comprendre et de classifier les situations où notre esprit s'étonne alors qu'il ne devrait pas, détaillons à présent un cas moins connu, car lié à une théorie assez récente. La mauvaise compréhension de ce qui est probable, car simple, conduit à percevoir certains événements comme étonnants alors qu'ils ne le sont pas, et donc à croire être en présence de coïncidences miraculeuses sans bonne explication, alors que la situation est banale.

La notion la plus générale de simplicité est celle qui provient de la théorie algorithmique de l'information. Comme nous n'en avons pas

BIBLIOGRAPHIE

T. Vigen, **Spurious Correlations**, Hachette Books, 2015.

F. Messerli, **Chocolate consumption, cognitive function, and Nobel laureates**, *The New England Journal of Medicine*, vol. 367(16), pp. 1562-1566, 2012.

S. Young et A. Karr, **Deming, data and observational studies**, *Significance*, vol. 8(3), pp. 116-120, 2011.

H. Zenil et J.-P. Delahaye, **On the algorithmic nature of the world**, dans G. Dodig-Crnkovic & M. Burgin (éds.), *Information and Computation*, World Scientific, 2010 (<https://arxiv.org/abs/0906.3554>).

H. White, **A reality check for data snooping**, *Econometrica*, vol. 68(5), pp. 1097-1126, 2000.

toujours une bonne compréhension, cela nous conduit à voir des choses complexes et inattendues quand il n'y a en fait que des choses simples. Cette théorie algorithmique de l'information, ou théorie de la complexité de Kolmogorov, mesure la complexité d'un objet par la taille du plus petit programme qui l'engendre. Elle s'applique aux objets numériques, ou susceptibles d'être représentés numériquement, tels que les images, les sons, les films, et à la plupart des objets du monde réel, si l'on ne prend en compte que leur apparence.

La théorie suggère que parmi les objets utilisant le même nombre de bits d'information (par exemple des images d'un million de pixels), les plus simples, c'est-à-dire ceux ayant la plus faible complexité de Kolmogorov, sont ceux qu'on rencontrera le plus fréquemment. Cela découle d'un théorème de Leonid Levin d'après lequel plus la complexité de Kolmogorov d'un objet ou d'une structure est élevée, moins il est probable que cet objet ou cette structure soit produite par une machine prise au hasard.

Si l'on pense que le monde physique est une sorte de grand système d'interactions menant une forme de calcul qui produit les objets et structures qu'on y rencontre, il est alors naturel de penser que les objets présents dans le monde y apparaissent avec une probabilité liée à leur mesure de Levin, et donc que les plus simples au sens de la complexité de Kolmogorov sont les plus fréquents. Des détails sur cette idée sont donnés dans un article d'Hector Zenil et moi-même (*voir la bibliographie*). Notons qu'il s'agit d'une idée conforme à l'intuition: dans une image numérique en noir et blanc représentant une photo prise du monde réel, on a plus de chances de rencontrer la série de 10 pixels blancs, *bbbbbbbbbb*, qui a une faible complexité de Kolmogorov, que la série précise *bmbmbmbmbb* dont la complexité de Kolmogorov est supérieure.

Une étoile est sphérique, comme le sont beaucoup de fruits. La section d'un tronc d'arbre est circulaire, comme le sont aussi les roues qui équipent nos véhicules. Une tige de blé est parfaitement rectiligne, comme les arêtes d'un cristal. La surface d'un lac est plane comme l'est, regardée de près, la peau de nombreux animaux. Tout cela correspond à des formes simples au sens de la théorie de Kolmogorov. Dans ces cas-là, nous ne cherchons donc pas à trouver une origine commune à deux objets sphériques, ou rectilignes, ou plans. Les formes simples n'ont pas nécessairement une origine commune, leur simplicité suffit à expliquer qu'on les retrouve partout. Jusqu'ici, tout va bien.

En revanche, certains objets ou formes que la théorie de la complexité de Kolmogorov identifie comme simples ne sont pas perçus comme tels par notre jugement immédiat. Une



Certains coquillages arborent à leur surface des motifs très semblables à la figure fractale dénommée triangle de Sierpiński, obtenue en enlevant d'un triangle un triangle central et en répétant indéfiniment l'opération (à droite). Ces motifs sont perçus comme complexes, alors qu'ils sont algorithmiquement simples.

structure comme celle du triangle de Sierpiński (*voir la figure ci-dessus*) nous apparaît complexe alors qu'elle ne l'est pas, puisque des programmes très courts l'engendrent. Si l'on rencontre souvent cette forme dans la nature, en particulier à la surface des coquillages, c'est parce que cette structure est simple, comme le sont une sphère ou un segment de droite.

Nous ne devons donc pas nous émerveiller de ces rencontres multiples sans lien, ni surtout imaginer qu'elles proviennent d'une sorte de fonctionnement secret de l'Univers qui resterait à comprendre. Comme pour la sphère, leur simplicité est l'explication de leur fréquente apparition.

Ce qui est vrai pour le tapis de Sierpiński l'est aussi pour la suite de Fibonacci, dont certains s'émerveillent à tort qu'on la rencontre si souvent. C'est encore vrai pour le nombre d'or, qui suscite une superstition numérolgique. Cela l'est encore d'une multitude de formes fractales qui sont simples et dont on ne doit donc pas s'étonner de les rencontrer. Il est normal que les objets de faible complexité de Kolmogorov se retrouvent partout. Rechercher une explication profonde à la présence multiple de la suite de Fibonacci dans toutes sortes d'objets naturels ou artificiels est aussi naïf que rechercher une explication commune à la présence de longs segments rectilignes dans les arbres, dans les tracés dessinés par les couches géologiques, les stalagmites ou dans le ciel quand une météorite pénètre l'atmosphère terrestre.

Nous percevons facilement la simplicité de certaines formes, mais pour d'autres, il nous faut réfléchir à la théorie qui permet de comprendre la simplicité. Si nous réussissons, nous serons moins enclins à vouloir expliquer ce que nous percevons comme des coïncidences. Ici, comme pour les doubles tirages identiques au Loto, ou les courbes parallèles montrant des corrélations illusoire, nous devons éviter de rechercher des causes communes à ce qui, logiquement, n'en a pas besoin. ■