

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

PAVER LE PLAN AVEC UN PENTAGONE CONVEXE

L'ordinateur est parfois bon géomètre. C'est en l'utilisant qu'un mathématicien français vient de mettre le point final à la solution du problème des polygones convexes permettant de recouvrir le plan.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal)

Dans le numéro d'octobre 2013 de *Pour la Science*, cette rubrique présentait l'extraordinaire histoire des pavages du plan par des pentagones convexes identiques.

Le statut du problème était alors incertain: après plusieurs annonces fausses de sa résolution et des efforts considérables, on ne savait pas si les 14 formes possibles identifiées constituaient une liste complète, ou si d'autres formes seraient découvertes.

Depuis, deux événements remarquables se sont produits: la découverte inattendue d'une quinzième forme et la mise au point d'une démonstration que la classification avec les 15 formes trouvées est complète. Le problème des pavages par pentagones convexes est ainsi résolu et, en corollaire, nous connaissons toutes les formes possibles polygonales convexes qui pavent le plan.

Précisons les termes. Les polygones convexes sont les formes du plan délimitées par des segments de droites dont on peut parcourir la frontière en tournant toujours vers la droite ou toujours vers la gauche (la convexité peut s'exprimer autrement: un polygone est convexe si, pour deux points quelconques A et B du polygone, le segment AB est entièrement contenu dans le polygone).

Des résultats anciens, dont certains sont assez faciles (voir l'article d'octobre 2013, «Les pavages pentagonaux: une classification qui s'améliore»), établissent que n'importe quel triangle, ou n'importe quel quadrilatère

(convexe ou non) pave le plan. Pour ce qui est des hexagones convexes, on sait qu'il existe 3 formes possibles pavant le plan. On sait aussi qu'aucun polygone convexe à 7 côtés ou plus ne pave le plan.

Pour connaître tous les polygones convexes qui pavent le plan, seul le cas des pentagones restait à régler... et ce ne fut pas simple!

UNE HISTOIRE CHAOTIQUE

Nous ne reviendrons pas sur les amusantes péripéties des listes partielles de pentagones convexes dont des mathématiciens pressés et imprudents affirmèrent qu'elles étaient complètes, alors que quelque temps après on découvrait que c'était faux en exhibant des nouvelles formes inconnues, augmentant petit à petit la longueur de la liste à considérer.

Cette illusion répétée d'avoir traité le problème se produisit en 1918, 1968, 1975 et 1985. En 2013, on connaissait 14 formes, et nombre de spécialistes pensaient qu'il n'en existait pas d'autres. Ils avaient encore une fois tort: en 2015, à l'université de Washington, Casey Mann, Jennifer McCloud-Mann et David Von Derau découvrirent, en utilisant l'ordinateur, une quinzième forme de pentagone convexe pavant le plan (voir la page ci-contre).

Comme on était échaudé par les annonces répétées et fausses selon lesquelles on disposait de la liste complète, plus personne n'osait l'affirmer, mais cette fois c'était vrai: en 2017, Michaël Rao, chercheur du CNRS à l'École normale supérieure de Lyon, a prouvé qu'on ne trouverait jamais d'autres formes que les 15 connues. ➤

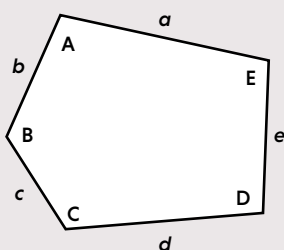


Jean-Paul Delahaye a récemment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

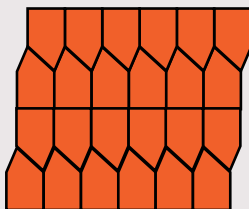
LES 15 FORMES DE PENTAGONES CONVEXES QUI PAVENT LE PLAN

1

Le mathématicien français Michaël Rao vient de démontrer que les pentagones convexes pouvant paver parfaitement le plan se rangent en 15 classes. Chaque classe est définie par des relations entre les angles (notés A, B, C, D, E) et entre les longueurs des côtés (notées a, b, c, d, e).

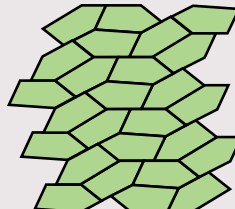


Type 1



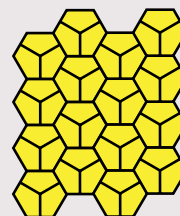
$$D + E = \pi$$

Type 2



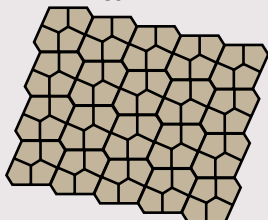
$$C + E = \pi \\ a = d$$

Type 3



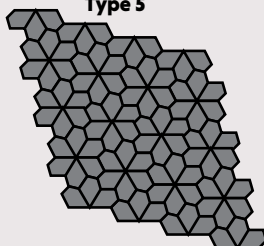
$$A = C = D = 2\pi/3 \\ a = b, d = c + e$$

Type 4



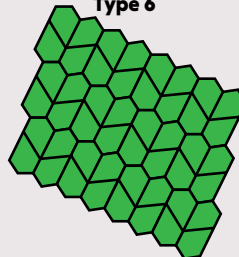
$$A = C = \pi/2 \\ a = b, c = d$$

Type 5



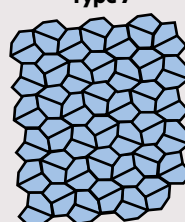
$$C = 2A = 2\pi/3 \\ a = b, c = d$$

Type 6



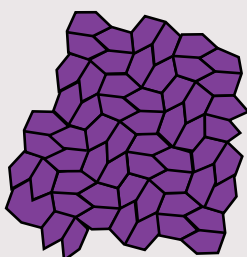
$$C + E = \pi, A = 2C \\ a = b = e, c = d$$

Type 7



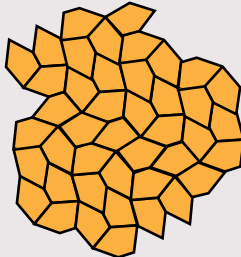
$$2B + C = 2\pi, \\ 2D + A = 2\pi \\ a = b = c = d$$

Type 8



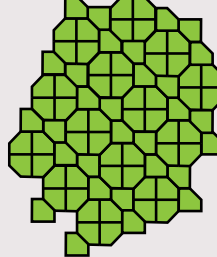
$$2A + B = 2\pi \\ 2D + C = 2\pi \\ a = b = c = d$$

Type 9



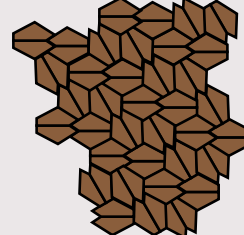
$$2E + B = 2\pi \\ 2D + C = 2\pi \\ a = b = c = d$$

Type 10



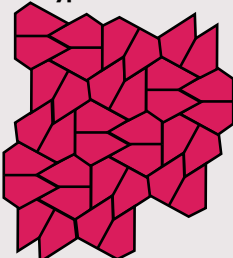
$$E = \pi/2, A + D = \pi \\ 2B - D = \pi, 2C + D = 2\pi \\ a = e = b + d$$

Type 11



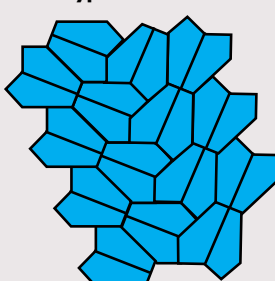
$$A = \pi/2, C + E = \pi \\ 2B + C = 2\pi \\ d = e = 2a + c$$

Type 12



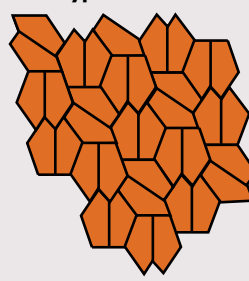
$$A = \pi/2, C + E = \pi \\ 2B + C = 2\pi \\ 2a = c + e = d$$

Type 13



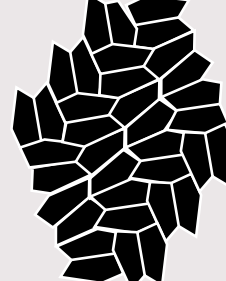
$$A = C = \pi/2, \\ 2B = 2E = 2\pi - D \\ c = d, 2c = e$$

Type 14



$$D = \pi/2, 2E + A = 2\pi \\ B + D + E = 2\pi, A + C = \pi \\ b = c = 2a = 2d$$

Type 15



$$A = \pi/3, B = 3\pi/4, C = 7\pi/12 \\ D = \pi/2, E = 5\pi/6 \\ a = 2b = 2d = 2e$$

- > Sa démonstration utilise un ordinateur, mais la partie humaine préparatoire aux calculs était délicate et personne avant Michaël Rao n'avait su la mener correctement. La démonstration a consisté à ramener l'exploration des cas possibles, qui *a priori* sont en nombre infini, à un nombre fini de cas.

LA DÉMONSTRATION PROCÈDE EN QUATRE ÉTAPES.

Étape 1. Michaël Rao prouve que «si une forme pentagonale convexe P pave le plan, alors elle peut le faire de telle façon que chaque type de sommet du pavage possède une densité positive dans le pavage».

Expliquons cet énoncé. On désigne les 5 sommets du pavé P considéré par les lettres a, b, c, d et e . En certains points M du pavage, se rencontrent plusieurs des sommets du pentagone convexe P, par exemple b, c et e , qui proviennent des différentes versions de P placées autour de M. Cette suite de lettres définit un type de sommet du pavage. Dans un pavage donné, il y a plusieurs types de sommets. Par exemple (voir l'encadré 2), il peut y avoir les trois types de sommets (b, c, e) , (d, d, d) et (a, a, a, a, a) . Cette représentation des types de sommets possibles permettra plus loin de ramener le nombre de cas à traiter, *a priori* infini, à un nombre fini de cas. On aurait pu imaginer qu'un type donné de sommets soit utilisé avec une densité décroissante et tendant vers zéro quand on s'éloigne du centre. Ce que dit le résultat de l'étape 1 du raisonnement de Michaël Rao est que cela ne se produit pas, au moins pour l'un des pavages du plan utilisant le pavé P: pour chaque type T de sommets à envisager, la proportion de sommets de type T dans un pavage utilisant N exemplaires de P sera supérieure à une constante.

Étape 2. Un ensemble de types de sommets pour un pavage donné du plan par des pentagones convexes, par exemple l'ensemble $\{(b, c, e), (d, d, d), (a, a, a, a, a)\}$, a une propriété algébrique particulière (notons-la Q) provenant de sa capacité à paver le plan avec une densité positive pour chaque type de sommets. Cette propriété Q est facile à tester par programme. Celui écrit par Michaël Rao a fait découvrir qu'il n'y a que 371 possibilités différentes pour ces ensembles de types de sommets.

Étape 3. Pour chacun des 371 cas repérés à l'étape 2, on tente d'une manière systématique de paver le plan. Michaël Rao utilise un second programme pour mener cette recherche. Le programme essaye de construire un pavage avec les conditions qu'on s'est fixées sur les angles, mais *a priori* sans conditions sur les côtés. Il explore les pavages possibles et doit faire des hypothèses sur les longueurs des côtés au cours de l'exploration. Si on aboutit à l'un des 15 cas connus, le programme ne va pas plus loin. En effet, on sait alors qu'on peut paver avec ce pentagone et que le motif sera périodique. Les pavages périodiques sont ceux où l'on peut extraire un ensemble fini de pavés et où, à l'aide de deux translations appliquées à ce sous-pavage, on obtient petit à petit le pavage entier.

Il est important de noter que dans le cas général, il existe des ensembles de formes pavant le plan mais qui ne le pavent que non périodiquement. Les ensembles connus de ce type comportent toujours au moins deux pavés différents. Les pavages de Penrose sont de ce type: ils pavent le plan, mais jamais périodiquement.

Étape 4. L'analyse des cas qui ont réussi et leurs regroupements (quand plusieurs cas

2

LES TYPES DE SOMMETS D'UN PAVAGE

Dans la démonstration de Michaël Rao, la classification des types de sommets présents dans un pavage joue un rôle important. Dans l'exemple dessiné ici, où les sommets du pentagone utilisé sont notés a, b, c, d, e , on observe qu'en un point du plan où plusieurs pentagones se rencontrent, il existe trois types différents de situations: (a, a, a, a, a) , (b, c, e) et (d, d, d) .

Cet ensemble de 3 types de sommets est l'un des 371 ensembles différents qu'une recherche exhaustive par programme a produits. Après une exploration de chacun de ces 371 ensembles, on n'obtient que 15 formes de pavages différents par des pentagones convexes.

