

> d'en obtenir une version parfaitement formalisée qu'un ou plusieurs ordinateurs contrôlent en utilisant éventuellement des programmes différents, ce qui procure une garantie presque parfaite de correction. Des logiciels spécialisés nommés assistants de preuve, dont COQ de l'Inria, aident à l'écriture de ces preuves formelles. La méthode des preuves formelles est utilisée pour certifier des circuits et des programmes importants, par exemple en aéronautique. Ici, la mise au point d'une telle preuve permettrait de valider non seulement la partie calculatoire de la démonstration de Michaël Rao, mais aussi sa partie «humaine». Les programmes utilisés par le mathématicien ont été écrits dans le langage C++ et ont une longueur d'environ 5000 lignes. Assurer leur totale exactitude ne sera pas une mince affaire.

Le résultat de Michaël Rao concerne les pentagones convexes. Il est remarquable qu'on ne connaisse pas aujourd'hui de classification analogue pour les pentagones non convexes qui pavent le plan (voir l'encadré 3 pour des exemples). Le problème, d'énoncé simple, semble d'une grande difficulté. Les idées et méthodes de la démonstration de Michaël Rao pourront-elles

faire avancer cette version généralisée de la classification des pentagones pavant le plan?

À cette question, Michaël Rao répond: «La plupart des méthodes que j'ai utilisées peuvent être adaptées aux polygones à n côtés (pour un n fixé), et pas forcément convexes.» Il ajoute cependant: «Je ne me prononcerai pas sur la question d'une classification complète pour les polygones (pas nécessairement convexes) à n côtés (pour un n fixé). Il se pourrait qu'il y ait des comportements bizarres, et qu'on ait un nombre infini de types (conditions sur les angles et les côtés), alors qu'on a un nombre fini de familles (conditions sur les angles uniquement).» Il précise aussi qu'au départ, il s'intéressait au fameux problème de l'*einstein* et que ce n'est que dans un second temps, quand la quinzième forme a été découverte en 2015, qu'il a compris que la preuve de la classification complète des pentagones convexes pavant le plan était à sa portée. Il va continuer à travailler sur ces questions de pavages... sans doute en espérant être celui qui trouve en premier un *einstein*, ou qui montre qu'il n'en existe pas.

AUTRES PROGRÈS RÉCENTS CONCERNANT LES PENTAGONES

Parfois, un pentagone ne peut pas paver le plan. C'est ce qu'on démontre facilement pour le pentagone régulier, qui a 5 côtés égaux et 5 angles égaux. Reste alors à savoir comment placer un tel pentagone de manière optimale dans le plan, c'est-à-dire avec une densité aussi élevée que possible. Remarquons que ce problème de densité optimale est le plus simple qui soit non trivial pour les polygones réguliers. On sait en effet répondre à la question de la densité maximale pour les triangles équilatéraux, pour les carrés et même pour les hexagones réguliers... puisqu'ils pavent parfaitement le plan!

La figure ci-contre montre une façon de disposer des pentagones réguliers sur un plan qui semble assez bonne. Sa densité est de:

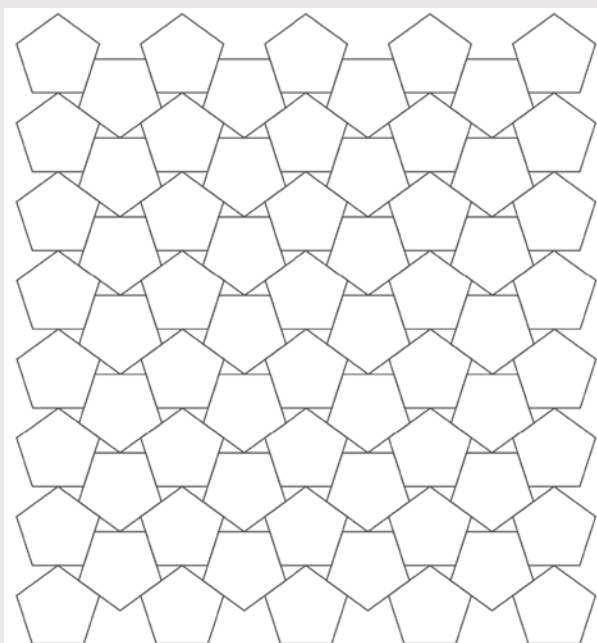
$$(5 - \sqrt{5})/3 \approx 0,921311.$$

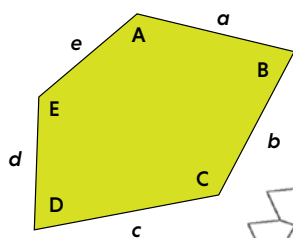
Autrement dit, la partie du plan non recouverte est inférieure à 8 % de la surface.

Est-ce la meilleure façon de disposer les pentagones? Ne peut-on pas les serrer les uns contre les autres encore mieux? L'affirmation que cette disposition est la plus dense possible constitue la «conjecture pentagonale de Henley». Elle est restée non résolue jusqu'en 2016. Elle n'est pas simple du tout, car les rangements possibles sont nombreux et délicats à comparer si l'on veut être certain de ne laisser échapper aucune éventualité. Les dispositions optimales pourraient être très complexes et, par exemple, ne pas être périodiques. Cela se produit en effet pour d'autres problèmes du même type: quand on cherche la disposition de densité optimale pour deux pavés de Penrose, la solution est un pavage non périodique.

4 LE PAVAGE OPTIMAL PAR UN PENTAGONE RÉGULIER

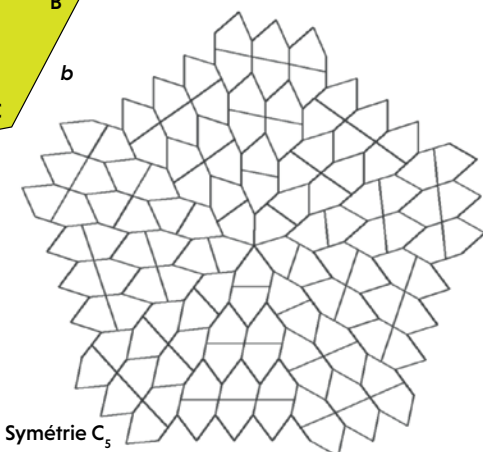
Disposer des pentagones réguliers identiques de façon que la surface non recouverte soit aussi réduite que possible est loin d'être simple. Que la disposition représentée ci-dessous soit la meilleure est vrai, mais il aura fallu attendre 2016 pour le démontrer. La preuve s'étale sur un article de 60 pages, mais elle a aussi nécessité l'utilisation de plusieurs programmes informatiques.



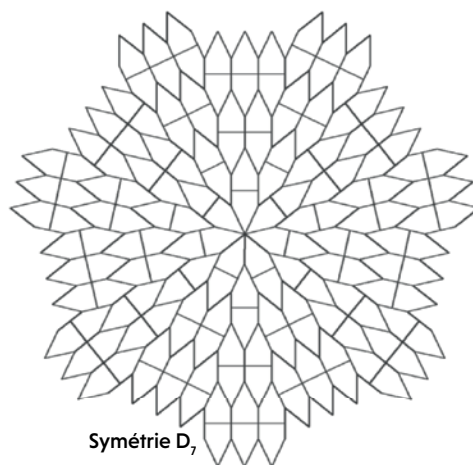


$$D + E = 180^\circ, \\ B = 72^\circ$$

$$C = 180^\circ - B/2 \\ D = 90^\circ$$



Symétrie C_5



Symétrie D_7

5

DES PENTAGONES POUR DES PAVAGES EN ÉTOILE

Assembler des copies d'un même pentagone pour obtenir un pavage étoilé complet du plan semble difficile. Pourtant, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, il existe un pavé qui donnera un pavage étoilé à k branches.

Selon qu'on souhaite que le pavage ait des axes de symétrie ou

non, deux types de solutions sont possibles.

Nommons A, B, C, D, E les angles internes du pentagone considéré et a, b, c, d, e les longueurs de ses côtés. Soit $k \geq 3$ un entier. Si les angles A, B, C, D et E sont inférieurs à 180° , que $b = c = a + d$ et $D + E = 180^\circ$, que B et

C divisent 360° et que $B = 360^\circ/k$, alors il est possible de paver le plan avec la symétrie C_k (invariance uniquement par des rotations).

Si, de plus, on a $C = 180^\circ - B/2$ et $D = 90^\circ$, alors on peut paver le plan avec la symétrie D_k (invariance par des rotations et des symétries axiales).

La conjecture de Henley vient d'être démontrée par Thomas Hales et Wöden Kusner. Thomas Hales, professeur à l'université de Pittsburgh, aux États-Unis, est connu pour avoir résolu la conjecture de Kepler qui indique la façon la plus dense d'empiler des sphères dans l'espace, et Wöden Kusner est actuellement à l'université de Vanderbilt. L'article qui prouve la conjecture de Henley comporte 60 pages, mais il se réfère, comme celui de Michaël Rao, à plusieurs programmes mis en œuvre pour aboutir au résultat. Qui aurait soupçonné il y a un siècle que la géométrie exigerait l'aide de machines ?

PENTAGONES POUR PAVAGES EN ÉTOILE

Terminons notre promenade géométrique en évoquant un résultat inattendu et esthétique. La question que s'est posée Bernhard Klaassen, de l'institut Fraunhofer SCAI, en Allemagne, est la suivante : pour quelle valeur de l'entier $k \geq 3$ peut-on trouver des pavés pentagonaux qui pavent le plan de manière étoilée, c'est-à-dire en disposant les pavés autour d'un centre de telle façon que le pavage soit invariant par rotation de $2\pi/k$? Pour chaque k , il existe deux variantes du problème. Soit la rotation de $2\pi/k$, une ou plusieurs fois, est la seule façon de retrouver le pavage, auquel cas on

parle de symétrie C_k . Soit, en plus de la rotation, la symétrie par rapport à certaines droites passant par le centre laisse aussi le pavage invariant, auquel cas on parle de symétrie D_k (voir l'encadré ci-dessus).

Bernhard Klaassen a trouvé une famille de pentagones qui autorisent un pavage avec symétries C_k ou D_k pour tout $k \geq 3$. Voici sa solution. Notons A, B, C, D et E les angles internes du pentagone considéré et a, b, c, d, e les longueurs des côtés du pentagone. On impose les propriétés suivantes : tous les angles internes sont inférieurs à 180° ; $b = c = a + d$; $D + E = 180^\circ$ et C divise 360° ainsi que B.

Le théorème est alors le suivant :

Pour tout entier $k \geq 3$ et tout pentagone possédant les propriétés énoncées avec $B = 360^\circ/k$, il est possible de paver le plan avec la symétrie C_k . De plus, si $C = 180^\circ - B/2$ et $D = 90^\circ$, alors on peut paver le plan avec la symétrie D_k . On remarque qu'en prenant une solution et en accolant correctement les pentagones par deux, on obtient un pavage par des hexagones : la solution trouvée pour les pentagones donne donc du même coup une solution pour les hexagones.

N'est-il pas étonnant qu'il ait fallu attendre 2016 et 2017 pour résoudre ces questions assez simples concernant les polygones, et que pour deux des trois résultats mentionnés ici, l'ordinateur ait été nécessaire ? ■

BIBLIOGRAPHIE

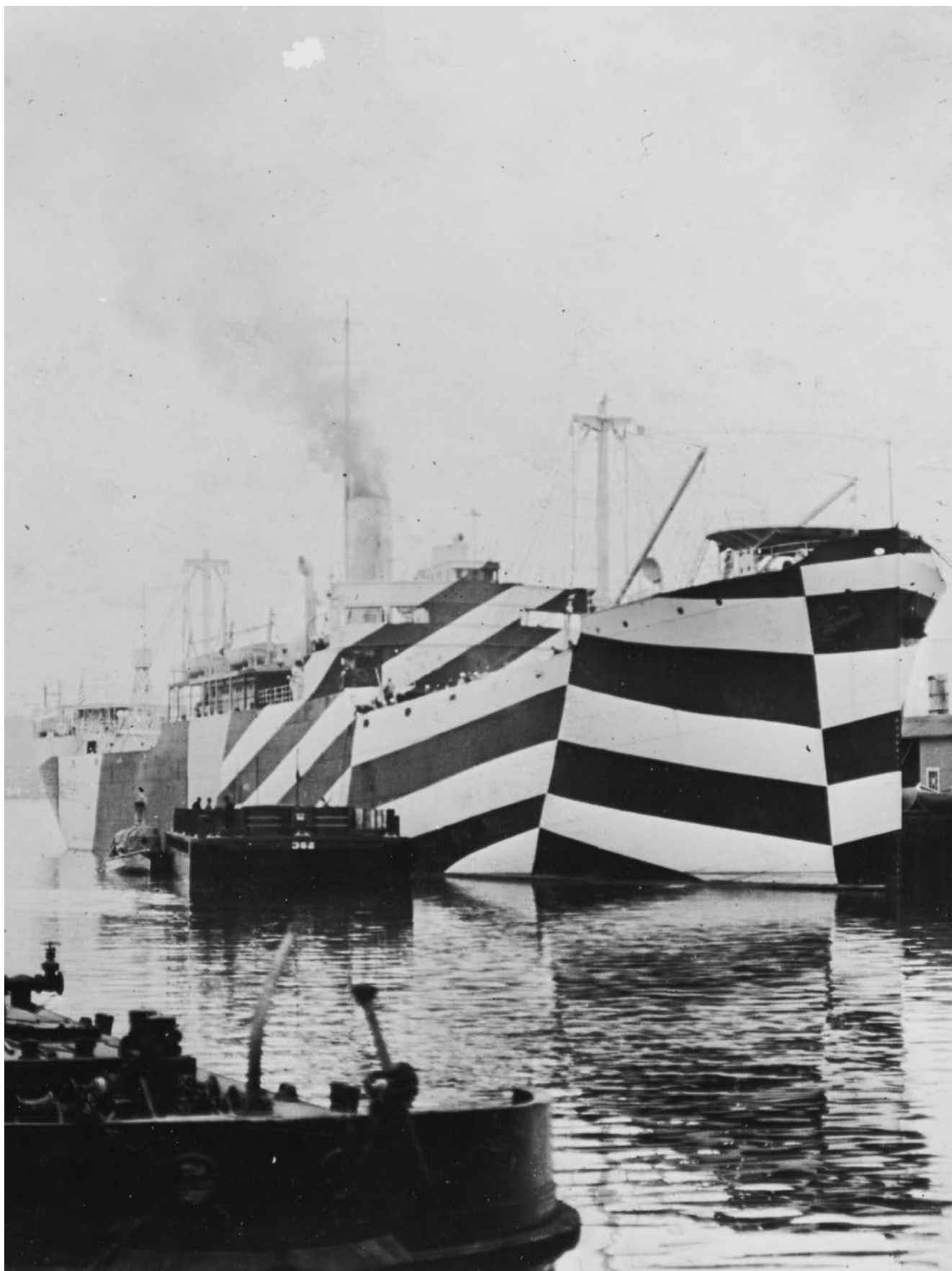
M. Rao, **Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane**, <http://perso.ens-lyon.fr/michael.rao/publi/penta.pdf>, 2017.

N. Wolchover, **Pentagon tiling proof solves century-old math problem**, *Quanta*, 11 juillet 2017 (traduction française : <http://bit.ly/2xEmaBS>).

B. Klaassen, **Rotationally symmetric tilings with convex pentagons and hexagons**, *Elemente der Mathematik*, vol. 71, pp. 137-144, 2016 (<https://arxiv.org/pdf/1509.06297.pdf>).

T. Hales et W. Kusner, **Packings of regular pentagons in the plane**, <https://arxiv.org/pdf/1602.07220.pdf>, 2016.

C. Mann et al., **Convex pentagons that admit i-block transitive tilings**, <https://arxiv.org/pdf/1510.01186.pdf>, 2015.



*L'USS West Mahomet
prêt à rendre fous les sous-marins allemands!*