

# R

## ENDEZ-VOUS

P.74 Logique & calcul  
 P.80 Art & science  
 P.82 Idées de physique  
 P.86 Science & fiction  
 P.92 Chroniques de l'évolution  
 P.96 Science & gastronomie  
 P.98 À picorer

# TRIVIAL, MAIS PUISSANT: LE PRINCIPE DES TIROIRS

Le «principe des tiroirs» est une évidence. Pourtant, depuis son introduction en théorie des nombres par Dirichlet, au XIX<sup>e</sup> siècle, il s'est révélé être un levier de raisonnement d'une déconcertante efficacité.

## L'AUTEUR



**JEAN-PAUL DELAHAYE**  
 professeur émérite  
 à l'université de Lille  
 et chercheur au Centre  
 de recherche en  
 informatique, signal  
 et automatique de Lille  
 (Cristal)

**U**ne vérité totalement évidente peut-elle être utile? Il semble que oui. Le principe des tiroirs, *pigeonhole principle* en anglais, ne fait qu'affirmer une vérité générale, simple et indubitable. Nous allons voir que, pourtant, s'appuyer sur lui produit d'intéressants et puissants résultats.

### Le principe des tiroirs

*Soit un meuble comportant  $n$  tiroirs dans lequel sont rangés  $m$  objets. Si  $m > n$ , alors au moins l'un des tiroirs contient deux objets ou plus.*

Ce principe a été utilisé dans deux publications de 1842 du mathématicien allemand Johann Dirichlet qui, à ce moment-là, ne le nommait pas. Dans des publications ultérieures, il utilisera le mot *Schubfachprinzip* («principe des tiroirs» en allemand). Il est cependant difficile de savoir qui a vraiment été le premier à utiliser ce principe pour formuler un raisonnement mathématique. Il a très bien pu être découvert ou mis en œuvre sans même être explicité à n'importe quel instant depuis que les mathématiques existent.

Dans une étude historique publiée en 2014, Benoît Rittaud, de l'université Paris-13, et Albrecht Heeffer, de l'université de Gand, ont mis en évidence des utilisations du principe deux siècles avant Dirichlet (voir l'encadré 1). Reste que, presque toujours, on rapporte le principe à Dirichlet: on ne prête qu'aux riches. L'utilisation qu'en a fait Dirichlet a produit un résultat remarquable dont personne ne peut dire qu'il est évident.

La célèbre démonstration de Dirichlet est expliquée dans l'encadré 3 avec quelques conséquences et des détails montrant que le résultat est, en un sens, le meilleur possible.

### TROIS EXEMPLES

À titre d'illustration de la puissance du principe des tiroirs, nous présentons une série d'exemples le mettant en œuvre, dans un ordre de difficulté croissante.

**Résultat 1.** Si  $k+1$  nombres entiers (notés  $n_0, n_1, \dots, n_k$ ) sont donnés, on peut en trouver deux dont la différence est un multiple de  $k$ . En particulier, si quatre nombres  $a, b, c$  et  $d$  sont donnés, il y en a deux dont la différence est un multiple de 3.

**Démonstration.** Prenons les nombres un à un et mettons-les dans  $k$  tiroirs portant les numéros  $0, 1, \dots, k-1$ . Pour ranger le nombre  $x$ , on calcule le reste de la division de  $x$  par  $k$ , et ce reste indique le tiroir où le déposer. D'après le principe des tiroirs, deux nombres se retrouveront dans un même tiroir. Puisque ces deux nombres ont le même reste quand on les divise par  $k$ , leur différence donne un reste nul quand on la divise par  $k$ . Leur différence est ainsi un multiple de  $k$ .

**Résultat 2.** Si l'on se donne 10 entiers quelconques composés de deux chiffres, il existe parmi eux deux sous-ensembles disjoints de nombres ayant la même somme. Par exemple, si l'on se donne  $\{23, 35, 44, 61, 68, 70, 71, 82, 83, 95\}$ , on trouvera que  $\{23, 35, 95\}$  donne la même somme que  $\{71, 82\}$ :  $23+35+95=153=71+82$ .

**Démonstration.** Les sous-ensembles possibles de notre ensemble de 10 entiers sont au nombre de  $2^{10}=1024$ , car pour constituer un tel sous-ensemble, on opère 10 fois de suite le choix binaire: prendre le nombre ou ne pas le prendre. Quels nombres peut-on atteindre en faisant la somme des nombres de nos sous-ensembles? Un sous-ensemble comporte de 0 à 10 nombres compris entre 10 et 99; la somme



Jean-Paul Delahaye a récemment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

## QUI A INVENTÉ LE PRINCIPE DES TIROIRS?

1

**B**enoît Rittaud et Albrecht Heeffer ont retrouvé un texte utilisant de manière indubitable le principe des tiroirs dans un livre écrit en latin en 1622, *Selectæ Propositiones*, attribué au jésuite français Jean Leurechon (1591-1670) de Pont-à-Mousson (voir la bibliographie). On y trouve l'affirmation que, nécessairement, il existe deux femmes ayant le même nombre de cheveux. La démonstration n'est pas explicitée, mais ne peut provenir que de l'application du principe des tiroirs. Dès 1625, l'idée est d'ailleurs reprise, en se référant au livre du jésuite, par l'ecclésiastique Marin Mersenne (1588-1648), qui a laissé son nom à une catégorie de nombres premiers toujours très populaire.



Treize pigeons pour 12 casiers : nécessairement, au moins un casier contient plus de 1 pigeon.

Mersenne écrit dans son livre *La Vérité des sciences* : « Il est nécessaire que deux hommes aient autant de cheveux, d'escus, & d'autres choses l'un comme l'autre ». Le raisonnement fait bien appel à ce que nous appelons le principe de tiroirs : si le nombre maximum de cheveux est 200 000, alors dans toute population supérieure à ce nombre, deux personnes ont nécessairement le même nombre de cheveux. Aucune trace plus ancienne d'utilisation du principe des tiroirs n'est pour l'instant identifiée. En conclusion, il faudrait, si l'on souhaite rapporter le principe à un auteur, le dénommer « principe de Leurechon » plutôt que « principe de Dirichlet ».

est donc comprise entre 0 et 10 fois 99, donc entre 0 et 990. En numérotant 991 tiroirs de 0 à 990, et en plaçant chaque sous-ensemble possible dans le tiroir dont le numéro est la somme de ses éléments, on trouve d'après le principe des tiroirs deux sous-ensembles ayant la même somme.

Le problème n'est cependant pas vraiment résolu, car on nous demande de trouver des sous-ensembles *disjoints* ayant la même somme, et rien ne nous permet d'affirmer que les deux sous-ensembles trouvés à l'instant le sont. Ce n'est pas très grave : si les sous-ensembles ont des éléments en commun, on les enlève. Les deux sous-ensembles alors obtenus ont encore la même somme, car on a enlevé les mêmes éléments, et cette fois ce sont deux sous-ensembles disjoints.

**Résultat 3.** Soit  $S$  une suite quelconque composée de  $N$  nombres entiers tous différents. On considère une sous-suite croissante de  $S$  de la plus grande longueur possible,  $C$ , et en même temps on considère une sous-suite décroissante de  $S$  de la plus grande longueur possible,  $D$ . Alors  $DC \geq N$ , affirmation qui signifie qu'il est impossible que les sous-suites croissantes et décroissantes de  $S$  soient toutes très courtes.

Ce résultat montre qu'il existe nécessairement une forme d'ordre dans toute suite de nombres ; c'est l'un des premiers résultats de la « théorie de Ramsey ».

Exemple : Partant de la suite (1, 3, 9, 4, 13, 8, 11, 2, 7, 6) de longueur  $N=10$ , en cherchant attentivement, on découvre que la plus longue sous-suite croissante de  $S$  est (1, 3, 4, 8, 11), de longueur  $C=5$ , et que les plus longues sous-suites décroissantes sont (13, 11, 7, 6), (13, 8, 7, 6)

et (9, 8, 7, 6), de longueur  $D=4$ . Comme annoncé, on constate que  $DC=20 \geq N=10$ .

**Démonstration.** Pour chaque nombre  $x$  de la suite  $S$ , on calcule deux nombres  $c$  et  $d$  qui sont d'une part la longueur de la plus longue sous-suite croissante extraite de  $S$  partant de  $x$ , d'autre part la longueur de la plus longue sous-suite décroissante extraite de  $S$  partant de  $x$ . Ces deux nombres  $c$  et  $d$  déterminent un tiroir dans lequel on place  $x$ . On a bien sûr  $c \leq C$  et  $d \leq D$  ; le nombre de tiroirs nécessaires pour ranger les  $N$  nombres de la suite  $S$  est donc inférieur ou égal au produit  $CD$ .

Supposons que  $CD < N$ . D'après le principe des tiroirs, il existe alors deux nombres  $x$  et  $y$  de la suite  $S$  qui se retrouvent dans le même tiroir. Les deux nombres  $x$  et  $y$  sont donc chacun le début d'une suite croissante de longueur  $c$  impossible à prolonger, et d'une suite décroissante de longueur  $d$  elle aussi impossible à prolonger. Par hypothèse, puisque  $x$  et  $y$  sont dans le même tiroir, le même  $c$  vaut pour  $x$  et  $y$ , et le même  $d$  vaut pour  $x$  et  $y$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x$  est placé avant  $y$  dans la suite  $S$ . Deux cas sont à considérer.

Si  $x < y$ , alors la sous-suite qui commence par  $x$  et qui se poursuit par la sous-suite croissante de longueur  $c$  commençant par  $y$  est une sous-suite croissante de  $S$  partant de  $x$  et de longueur  $c+1$ , ce qui contredit le fait que  $c$  est la longueur de la plus longue sous-suite croissante de  $S$  qui commence à  $x$ .

Si  $x > y$ , alors la sous-suite qui commence par  $x$  et qui se poursuit par la sous-suite décroissante de longueur  $d$  commençant par  $y$  est une sous-suite décroissante de  $S$  partant de  $x$  et de longueur  $d+1$ , ce qui contredit le fait >

- > que  $d$  est la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de  $S$  qui commence par  $x$ .

Dans chaque cas, nous avons trouvé une contradiction. L'hypothèse faite, à savoir que  $CD < N$ , est donc fausse. Autrement dit, nous avons prouvé que  $CD \geq N$ .

### VARIANTE AVEC BEAUCOUP D'OBJETS

On a souvent beaucoup plus d'objets à ranger qu'on ne dispose de tiroirs. La version généralisée suivante du principe des tiroirs sera alors un bon outil.

#### Principe général des tiroirs

*Soit  $k$  un nombre entier, et un meuble de rangement comportant  $n$  tiroirs dans lequel sont rangés  $m$  objets. Si  $m > kn$ , alors au moins l'un des tiroirs contient plus de  $k$  objets.*

C'est évident, car si chaque tiroir contenait  $k$  objets ou moins, alors au total dans le meuble de  $n$  tiroirs ne seraient rangés que  $kn$  objets ou moins. La version suivante signifie la même chose, mais s'énonce sans mentionner de variable.

#### Principe général des tiroirs énoncé sans variable

*Quand on range des objets dans les tiroirs d'un meuble, le nombre maximum d'objets qu'on trouve dans un tiroir est supérieur ou égal à la moyenne du nombre d'objets qu'on trouve dans les tiroirs.*

Voici un exemple illustrant la puissance de cette variante.

**Problème.** Un jeu de pari sur les résultats de matchs de football vous invite à remplir un carton avec une grille de 13 cases correspondant aux 13 matchs qui seront joués samedi

prochain. Il faut indiquer pour chaque match, A contre B, le résultat que vous anticipez : A gagne, B gagne, ou match nul. Combien de cartons de jeu faut-il remplir et comment faut-il les remplir pour être certain que l'un d'eux comporte au moins cinq prévisions exactes ?

**Solution.** Deux cartons ne suffisent pas. En effet, quelle que soit la façon dont vous les remplissez, il se peut que tout soit faux : pour le match X, vous avez choisi une des trois options sur un carton, et peut-être une autre option sur le second carton, mais par malchance, à chaque fois, c'est la troisième option qui s'est réalisée.

Montrons que trois cartons bien remplis vous garantissent d'avoir au moins cinq prévisions exactes sur l'un d'eux.

Vous remplissez au hasard les trois cartons, mais en vous assurant d'indiquer pour chaque match les trois options possibles avec les trois cartons. Comme il y a treize matchs, vos trois cartons feront globalement treize prévisions exactes, puisque pour chaque match vous avez envisagé les trois options possibles.

Considérons que les trois cartons sont les trois tiroirs et que les matchs sont les objets à ranger qu'on place à chaque fois dans le tiroir correspondant au carton qui fait la bonne prédiction. Comme les trois cartons ont fait trois prédictions différentes pour chaque match, chaque match se retrouve dans un tiroir bien précis parmi les trois. Il y a 13 objets, l'un des trois tiroirs contient donc un nombre d'objets supérieur ou égal au nombre moyen d'objets par tiroir. Ce nombre moyen est  $13/3 = 4,33...$  Puisque le nombre d'objets est un entier, l'un

## DÉCOUPAGE D'UNE SPHÈRE

2

**P**rouver que si l'on dessine 5 points à la surface d'une sphère tels que 2 points ne soient jamais diamétralement opposés, et que 3 d'entre eux n'appartiennent jamais à un même cercle de rayon maximal de la sphère, alors il est possible de découper la sphère en deux demi-sphères dont l'une contient 4 points au moins et cela sans qu'aucun des 4 points ne soit sur le bord de la demi-sphère retenue.

#### Solution

On choisit deux points parmi les cinq,  $P_1$  et  $P_2$ . Ces deux points définissent un grand cercle à la surface de la sphère et donc un découpage en deux demi-sphères. Les trois autres points  $P_3$ ,  $P_4$  et  $P_5$ , se retrouvent sur les deux demi-sphères. Par conséquent, d'après le principe des tiroirs (avec 2 tiroirs et 3 objets), deux des points, mettons  $P_3$  et  $P_4$ , appartiennent à la même demi-sphère. Ces deux points présents sur une même demi-sphère ne sont pas sur le bord du découpage, puisque trois points ne sont jamais sur le même grand cercle. Les deux points qui ont servi à dessiner la découpe sont pour l'instant sur le bord de la découpe, mais ils ne sont pas diamétralement opposés ; on peut donc faire légèrement pivoter le grand cercle de découpage pour que les quatre points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$  qui nous intéressent soient maintenant sur la même demi-sphère, sans qu'aucun ne soit sur le bord.

