

QUI A INVENTÉ LE PRINCIPE DES TIROIRS?

1

Benoît Rittaud et Albrecht Heeffer ont retrouvé un texte utilisant de manière indubitable le principe des tiroirs dans un livre écrit en latin en 1622, *Selectæ Propositiones*, attribué au jésuite français Jean Leurechon (1591-1670) de Pont-à-Mousson (voir la bibliographie). On y trouve l'affirmation que, nécessairement, il existe deux femmes ayant le même nombre de cheveux. La démonstration n'est pas explicitée, mais ne peut provenir que de l'application du principe des tiroirs. Dès 1625, l'idée est d'ailleurs reprise, en se référant au livre du jésuite, par l'ecclésiastique Marin Mersenne (1588-1648), qui a laissé son nom à une catégorie de nombres premiers toujours très populaire.



Treize pigeons pour 12 casiers : nécessairement, au moins un casier contient plus de 1 pigeon.

Mersenne écrit dans son livre *La Vérité des sciences* : « Il est nécessaire que deux hommes aient autant de cheveux, d'escus, & d'autres choses l'un comme l'autre ». Le raisonnement fait bien appel à ce que nous appelons le principe de tiroirs : si le nombre maximum de cheveux est 200 000, alors dans toute population supérieure à ce nombre, deux personnes ont nécessairement le même nombre de cheveux. Aucune trace plus ancienne d'utilisation du principe des tiroirs n'est pour l'instant identifiée. En conclusion, il faudrait, si l'on souhaite rapporter le principe à un auteur, le dénommer « principe de Leurechon » plutôt que « principe de Dirichlet ».

est donc comprise entre 0 et 10 fois 99, donc entre 0 et 990. En numérotant 991 tiroirs de 0 à 990, et en plaçant chaque sous-ensemble possible dans le tiroir dont le numéro est la somme de ses éléments, on trouve d'après le principe des tiroirs deux sous-ensembles ayant la même somme.

Le problème n'est cependant pas vraiment résolu, car on nous demande de trouver des sous-ensembles *disjoints* ayant la même somme, et rien ne nous permet d'affirmer que les deux sous-ensembles trouvés à l'instant le sont. Ce n'est pas très grave : si les sous-ensembles ont des éléments en commun, on les enlève. Les deux sous-ensembles alors obtenus ont encore la même somme, car on a enlevé les mêmes éléments, et cette fois ce sont deux sous-ensembles disjoints.

Résultat 3. Soit S une suite quelconque composée de N nombres entiers tous différents. On considère une sous-suite croissante de S de la plus grande longueur possible, C , et en même temps on considère une sous-suite décroissante de S de la plus grande longueur possible, D . Alors $DC \geq N$, affirmation qui signifie qu'il est impossible que les sous-suites croissantes et décroissantes de S soient toutes très courtes.

Ce résultat montre qu'il existe nécessairement une forme d'ordre dans toute suite de nombres ; c'est l'un des premiers résultats de la « théorie de Ramsey ».

Exemple : Partant de la suite (1, 3, 9, 4, 13, 8, 11, 2, 7, 6) de longueur $N=10$, en cherchant attentivement, on découvre que la plus longue sous-suite croissante de S est (1, 3, 4, 8, 11), de longueur $C=5$, et que les plus longues sous-suites décroissantes sont (13, 11, 7, 6), (13, 8, 7, 6)

et (9, 8, 7, 6), de longueur $D=4$. Comme annoncé, on constate que $DC=20 \geq N=10$.

Démonstration. Pour chaque nombre x de la suite S , on calcule deux nombres c et d qui sont d'une part la longueur de la plus longue sous-suite croissante extraite de S partant de x , d'autre part la longueur de la plus longue sous-suite décroissante extraite de S partant de x . Ces deux nombres c et d déterminent un tiroir dans lequel on place x . On a bien sûr $c \leq C$ et $d \leq D$; le nombre de tiroirs nécessaires pour ranger les N nombres de la suite S est donc inférieur ou égal au produit CD .

Supposons que $CD < N$. D'après le principe des tiroirs, il existe alors deux nombres x et y de la suite S qui se retrouvent dans le même tiroir. Les deux nombres x et y sont donc chacun le début d'une suite croissante de longueur c impossible à prolonger, et d'une suite décroissante de longueur d elle aussi impossible à prolonger. Par hypothèse, puisque x et y sont dans le même tiroir, le même c vaut pour x et y , et le même d vaut pour x et y . Sans perte de généralité, on peut supposer que x est placé avant y dans la suite S . Deux cas sont à considérer.

Si $x < y$, alors la sous-suite qui commence par x et qui se poursuit par la sous-suite croissante de longueur c commençant par y est une sous-suite croissante de S partant de x et de longueur $c+1$, ce qui contredit le fait que c est la longueur de la plus longue sous-suite croissante de S qui commence à x .

Si $x > y$, alors la sous-suite qui commence par x et qui se poursuit par la sous-suite décroissante de longueur d commençant par y est une sous-suite décroissante de S partant de x et de longueur $d+1$, ce qui contredit le fait >

- > que d est la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de S qui commence par x .

Dans chaque cas, nous avons trouvé une contradiction. L'hypothèse faite, à savoir que $CD < N$, est donc fausse. Autrement dit, nous avons prouvé que $CD \geq N$.

VARIANTE AVEC BEAUCOUP D'OBJETS

On a souvent beaucoup plus d'objets à ranger qu'on ne dispose de tiroirs. La version généralisée suivante du principe des tiroirs sera alors un bon outil.

Principe général des tiroirs

Soit k un nombre entier, et un meuble de rangement comportant n tiroirs dans lequel sont rangés m objets. Si $m > kn$, alors au moins l'un des tiroirs contient plus de k objets.

C'est évident, car si chaque tiroir contenait k objets ou moins, alors au total dans le meuble de n tiroirs ne seraient rangés que kn objets ou moins. La version suivante signifie la même chose, mais s'énonce sans mentionner de variable.

Principe général des tiroirs énoncé sans variable

Quand on range des objets dans les tiroirs d'un meuble, le nombre maximum d'objets qu'on trouve dans un tiroir est supérieur ou égal à la moyenne du nombre d'objets qu'on trouve dans les tiroirs.

Voici un exemple illustrant la puissance de cette variante.

Problème. Un jeu de pari sur les résultats de matchs de football vous invite à remplir un carton avec une grille de 13 cases correspondant aux 13 matchs qui seront joués samedi

prochain. Il faut indiquer pour chaque match, A contre B, le résultat que vous anticipez : A gagne, B gagne, ou match nul. Combien de cartons de jeu faut-il remplir et comment faut-il les remplir pour être certain que l'un d'eux comporte au moins cinq prévisions exactes ?

Solution. Deux cartons ne suffisent pas. En effet, quelle que soit la façon dont vous les remplissez, il se peut que tout soit faux : pour le match X, vous avez choisi une des trois options sur un carton, et peut-être une autre option sur le second carton, mais par malchance, à chaque fois, c'est la troisième option qui s'est réalisée.

Montrons que trois cartons bien remplis vous garantissent d'avoir au moins cinq prévisions exactes sur l'un d'eux.

Vous remplissez au hasard les trois cartons, mais en vous assurant d'indiquer pour chaque match les trois options possibles avec les trois cartons. Comme il y a treize matchs, vos trois cartons feront globalement treize prévisions exactes, puisque pour chaque match vous avez envisagé les trois options possibles.

Considérons que les trois cartons sont les trois tiroirs et que les matchs sont les objets à ranger qu'on place à chaque fois dans le tiroir correspondant au carton qui fait la bonne prédiction. Comme les trois cartons ont fait trois prédictions différentes pour chaque match, chaque match se retrouve dans un tiroir bien précis parmi les trois. Il y a 13 objets, l'un des trois tiroirs contient donc un nombre d'objets supérieur ou égal au nombre moyen d'objets par tiroir. Ce nombre moyen est $13/3 = 4,33...$ Puisque le nombre d'objets est un entier, l'un

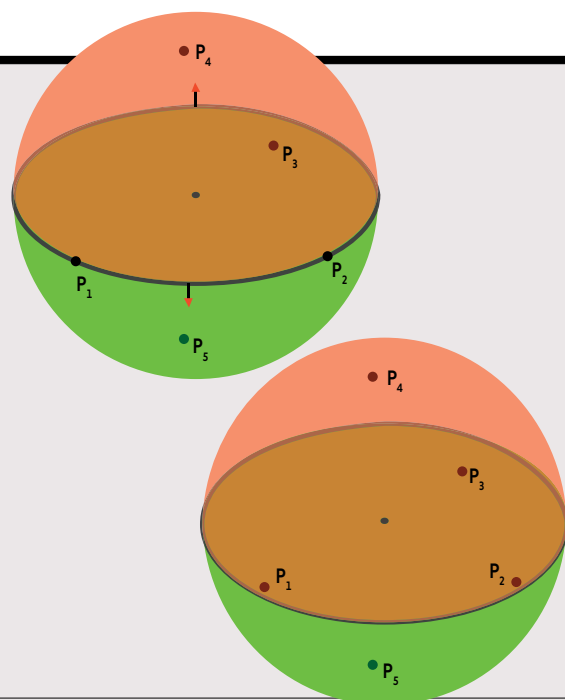
DÉCOUPAGE D'UNE SPHÈRE

2

Prouver que si l'on dessine 5 points à la surface d'une sphère tels que 2 points ne soient jamais diamétralement opposés, et que 3 d'entre eux n'appartiennent jamais à un même cercle de rayon maximal de la sphère, alors il est possible de découper la sphère en deux demi-sphères dont l'une contient 4 points au moins et cela sans qu'aucun des 4 points ne soit sur le bord de la demi-sphère retenue.

Solution

On choisit deux points parmi les cinq, P_1 et P_2 . Ces deux points définissent un grand cercle à la surface de la sphère et donc un découpage en deux demi-sphères. Les trois autres points P_3 , P_4 et P_5 , se retrouvent sur les deux demi-sphères. Par conséquent, d'après le principe des tiroirs (avec 2 tiroirs et 3 objets), deux des points, mettons P_3 et P_4 , appartiennent à la même demi-sphère. Ces deux points présents sur une même demi-sphère ne sont pas sur le bord du découpage, puisque trois points ne sont jamais sur le même grand cercle. Les deux points qui ont servi à dessiner la découpe sont pour l'instant sur le bord de la découpe, mais ils ne sont pas diamétralement opposés ; on peut donc faire légèrement pivoter le grand cercle de découpage pour que les quatre points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 qui nous intéressent soient maintenant sur la même demi-sphère, sans qu'aucun ne soit sur le bord.



des tiroirs contient au moins cinq objets, ou, dit autrement, l'un des cartons comporte au moins cinq prédictions exactes. La conclusion est donc que deux cartons ne permettent rien, mais que trois cartons, bien utilisés, garantissent d'avoir cinq prédictions exactes au moins sur l'un d'eux.

VARIANTE PROBABILISTE

Le hasard uniforme est un moyen d'améliorer sensiblement le nombre de rencontres dans les tiroirs. On imagine qu'on dispose aléatoirement, avec un hasard uniforme, les m objets dans les n tiroirs de notre meuble. Pour opérer le placement au hasard, on utilise par exemple un jeu de n cartes dont on tire une carte pour chaque objet à placer, carte ensuite remise dans le paquet avant le tirage suivant. Bien sûr, si le nombre m d'objets est supérieur au nombre n de tiroirs, la rencontre de deux objets dans un même tiroir est certaine, c'est le principe des tiroirs de base.

Plus intéressant : même s'il y a moins d'objets que de tiroirs ($m < n$), la rencontre se produira assez souvent et bien plus qu'on ne l'imagine *a priori*. Voici l'énoncé du principe probabiliste des tiroirs qui précise cette probabilité.

Principe probabiliste des tiroirs

Quand on range uniformément au hasard m objets dans n tiroirs ($m < n$) d'un meuble, la probabilité que deux objets se retrouvent dans le même tiroir est égale à $1 - n! / [n^m (n - m)!]$, qui vaut à peu près $1 - \exp[-m(m-1)/2n]$.

En effet, il y a n^m tirages possibles puisque m fois de suite, on tire un des n tiroirs. Parmi les n^m tirages possibles, tous équiprobables, le nombre de tirages défavorables (jamais deux objets ne se trouvent dans un même tiroir) est donné par le nombre de suites de m éléments différents pris parmi n . On parle d'arrangements, et on sait que leur nombre est $n! / (n - m)!$. Le résultat s'en déduit.

Le fameux paradoxe des anniversaires est un cas particulier de ce principe probabiliste. On considère 23 élèves d'une même classe; ce sont les m objets à ranger! On demande de trouver la probabilité pour que, en les mettant dans 365 tiroirs correspondant aux 365 jours de l'année et pouvant être leur jour anniversaire de naissance, il y en ait deux dans le même tiroir, c'est-à-dire deux élèves ayant le même jour anniversaire. On a $m=23$ et $n=365$; le calcul fait avec la formule approchée donne : $1 - \exp[-23 \times 22 / (2 \times 365)] = 0,5000017$, ce qui est supérieur à 50 %. Avec la formule exacte, le calcul donne : 0,5072972.

Ainsi, la probabilité pour que deux élèves d'une classe de 23 élèves aient le même jour anniversaire est égale à 50,72 %. Notons que dans le monde réel, cette probabilité est un peu supérieure à ce 50,72 %, parce que les

3

LA DÉMONSTRATION DE DIRICHLET

Même s'il n'en était pas l'inventeur, Dirichlet fut le premier mathématicien à avoir compris la force du principe des tiroirs et à l'avoir utilisé pour démontrer des affirmations intéressantes.

Il s'en servit notamment pour établir le résultat suivant : Pour tout nombre réel x et tout entier donné n , il existe un nombre rationnel p/q (un rapport de deux entiers) avec $q \leq n$, tel que $|x - p/q| < 1/(nq)$.

En langage plus simple : on s'intéresse aux nombres rationnels p/q dont le dénominateur est inférieur ou égal à l'entier n donné, et on affirme que tout nombre réel peut être approché par l'un d'eux, p/q , avec une erreur inférieure à $1/(nq)$.

Démonstration

On ne s'intéresse qu'aux nombres entre 0 et 1, auxquels on se ramène. Pour tout nombre réel y , notons $\{y\}$ sa partie fractionnaire, c'est-à-dire ce qui reste quand on lui enlève sa partie entière. Par exemple, $\{3,14159\} = 0,14159$. On range les $n + 1$ nombres $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{nx\}$ dans les n « tiroirs » constitués des intervalles $[0, 1/n[, [1/n, 2/n[, [2/n, 3/n[, \dots, [(n-1)/n, 1[$ (rappelons que $[a, b[$ désigne l'ensemble des nombres z tels que $a \leq z < b$). D'après le principe des tiroirs, deux de ces $n + 1$ nombres se

retrouvent dans le même tiroir. Il existe donc deux entiers distincts k et h tels que $\{kx\}$ et $\{hx\}$ soient dans le même tiroir. On en déduit : $|\{kx\} - \{hx\}| < 1/n$. En notant p la différence des parties entières de kx et hx , on en déduit que $|(k-h)x - p| < 1/n$. Si l'on pose $q = k - h$, et que l'on divise par q (qui n'est pas nul, car k est différent de h), on obtient : $|x - p/q| < 1/(nq)$. CQFD.

Un corollaire du résultat est que pour tout nombre réel x , il existe une infinité de nombres entiers q tel que $|x - p/q| \leq 1/q^2$ pour un certain entier p . Dans cet énoncé, on ne peut pas remplacer l'exposant 2 par un nombre réel $a > 2$. En effet, tout nombre irrationnel algébrique (non rationnel, mais racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers) comme le nombre $\sqrt{2}$ est un contre-exemple. C'est ce qu'indique le théorème suivant, qui contribua à valoir une médaille Fields à Klaus Roth en 1958 : Si x est irrationnel algébrique et si a est un nombre réel strictement supérieur à 2, alors il n'existe qu'un nombre fini de q tels que $|x - p/q| \leq 1/q^a$ pour un certain entier p (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Roth's_theorem).

