

- > que d est la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de S qui commence par x .

Dans chaque cas, nous avons trouvé une contradiction. L'hypothèse faite, à savoir que $CD < N$, est donc fausse. Autrement dit, nous avons prouvé que $CD \geq N$.

VARIANTE AVEC BEAUCOUP D'OBJETS

On a souvent beaucoup plus d'objets à ranger qu'on ne dispose de tiroirs. La version généralisée suivante du principe des tiroirs sera alors un bon outil.

Principe général des tiroirs

Soit k un nombre entier, et un meuble de rangement comportant n tiroirs dans lequel sont rangés m objets. Si $m > kn$, alors au moins l'un des tiroirs contient plus de k objets.

C'est évident, car si chaque tiroir contenait k objets ou moins, alors au total dans le meuble de n tiroirs ne seraient rangés que kn objets ou moins. La version suivante signifie la même chose, mais s'énonce sans mentionner de variable.

Principe général des tiroirs énoncé sans variable

Quand on range des objets dans les tiroirs d'un meuble, le nombre maximum d'objets qu'on trouve dans un tiroir est supérieur ou égal à la moyenne du nombre d'objets qu'on trouve dans les tiroirs.

Voici un exemple illustrant la puissance de cette variante.

Problème. Un jeu de pari sur les résultats de matchs de football vous invite à remplir un carton avec une grille de 13 cases correspondant aux 13 matchs qui seront joués samedi

prochain. Il faut indiquer pour chaque match, A contre B, le résultat que vous anticipez : A gagne, B gagne, ou match nul. Combien de cartons de jeu faut-il remplir et comment faut-il les remplir pour être certain que l'un d'eux comporte au moins cinq prévisions exactes ?

Solution. Deux cartons ne suffisent pas. En effet, quelle que soit la façon dont vous les remplissez, il se peut que tout soit faux : pour le match X, vous avez choisi une des trois options sur un carton, et peut-être une autre option sur le second carton, mais par malchance, à chaque fois, c'est la troisième option qui s'est réalisée.

Montrons que trois cartons bien remplis vous garantissent d'avoir au moins cinq prévisions exactes sur l'un d'eux.

Vous remplissez au hasard les trois cartons, mais en vous assurant d'indiquer pour chaque match les trois options possibles avec les trois cartons. Comme il y a treize matchs, vos trois cartons feront globalement treize prévisions exactes, puisque pour chaque match vous avez envisagé les trois options possibles.

Considérons que les trois cartons sont les trois tiroirs et que les matchs sont les objets à ranger qu'on place à chaque fois dans le tiroir correspondant au carton qui fait la bonne prédiction. Comme les trois cartons ont fait trois prédictions différentes pour chaque match, chaque match se retrouve dans un tiroir bien précis parmi les trois. Il y a 13 objets, l'un des trois tiroirs contient donc un nombre d'objets supérieur ou égal au nombre moyen d'objets par tiroir. Ce nombre moyen est $13/3 = 4,33...$ Puisque le nombre d'objets est un entier, l'un

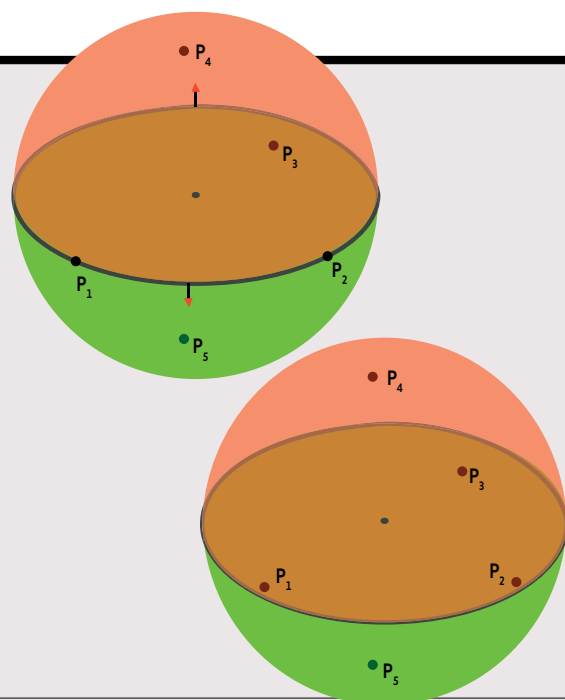
DÉCOUPAGE D'UNE SPHÈRE

2

Prouver que si l'on dessine 5 points à la surface d'une sphère tels que 2 points ne soient jamais diamétralement opposés, et que 3 d'entre eux n'appartiennent jamais à un même cercle de rayon maximal de la sphère, alors il est possible de découper la sphère en deux demi-sphères dont l'une contient 4 points au moins et cela sans qu'aucun des 4 points ne soit sur le bord de la demi-sphère retenue.

Solution

On choisit deux points parmi les cinq, P_1 et P_2 . Ces deux points définissent un grand cercle à la surface de la sphère et donc un découpage en deux demi-sphères. Les trois autres points P_3 , P_4 et P_5 , se retrouvent sur les deux demi-sphères. Par conséquent, d'après le principe des tiroirs (avec 2 tiroirs et 3 objets), deux des points, mettons P_3 et P_4 , appartiennent à la même demi-sphère. Ces deux points présents sur une même demi-sphère ne sont pas sur le bord du découpage, puisque trois points ne sont jamais sur le même grand cercle. Les deux points qui ont servi à dessiner la découpe sont pour l'instant sur le bord de la découpe, mais ils ne sont pas diamétralement opposés ; on peut donc faire légèrement pivoter le grand cercle de découpage pour que les quatre points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 qui nous intéressent soient maintenant sur la même demi-sphère, sans qu'aucun ne soit sur le bord.



des tiroirs contient au moins cinq objets, ou, dit autrement, l'un des cartons comporte au moins cinq prédictions exactes. La conclusion est donc que deux cartons ne permettent rien, mais que trois cartons, bien utilisés, garantissent d'avoir cinq prédictions exactes au moins sur l'un d'eux.

VARIANTE PROBABILISTE

Le hasard uniforme est un moyen d'améliorer sensiblement le nombre de rencontres dans les tiroirs. On imagine qu'on dispose aléatoirement, avec un hasard uniforme, les m objets dans les n tiroirs de notre meuble. Pour opérer le placement au hasard, on utilise par exemple un jeu de n cartes dont on tire une carte pour chaque objet à placer, carte ensuite remise dans le paquet avant le tirage suivant. Bien sûr, si le nombre m d'objets est supérieur au nombre n de tiroirs, la rencontre de deux objets dans un même tiroir est certaine, c'est le principe des tiroirs de base.

Plus intéressant : même s'il y a moins d'objets que de tiroirs ($m < n$), la rencontre se produira assez souvent et bien plus qu'on ne l'imagine *a priori*. Voici l'énoncé du principe probabiliste des tiroirs qui précise cette probabilité.

Principe probabiliste des tiroirs

Quand on range uniformément au hasard m objets dans n tiroirs ($m < n$) d'un meuble, la probabilité que deux objets se retrouvent dans le même tiroir est égale à $1 - n! / [n^m (n - m)!]$, qui vaut à peu près $1 - \exp[-m(m-1)/2n]$.

En effet, il y a n^m tirages possibles puisque m fois de suite, on tire un des n tiroirs. Parmi les n^m tirages possibles, tous équiprobables, le nombre de tirages défavorables (jamais deux objets ne se trouvent dans un même tiroir) est donné par le nombre de suites de m éléments différents pris parmi n . On parle d'arrangements, et on sait que leur nombre est $n! / (n - m)!$. Le résultat s'en déduit.

Le fameux paradoxe des anniversaires est un cas particulier de ce principe probabiliste. On considère 23 élèves d'une même classe; ce sont les m objets à ranger! On demande de trouver la probabilité pour que, en les mettant dans 365 tiroirs correspondant aux 365 jours de l'année et pouvant être leur jour anniversaire de naissance, il y en ait deux dans le même tiroir, c'est-à-dire deux élèves ayant le même jour anniversaire. On a $m=23$ et $n=365$; le calcul fait avec la formule approchée donne : $1 - \exp[-23 \times 22 / (2 \times 365)] = 0,5000017$, ce qui est supérieur à 50 %. Avec la formule exacte, le calcul donne : 0,5072972.

Ainsi, la probabilité pour que deux élèves d'une classe de 23 élèves aient le même jour anniversaire est égale à 50,72 %. Notons que dans le monde réel, cette probabilité est un peu supérieure à ce 50,72 %, parce que les

3

LA DÉMONSTRATION DE DIRICHLET

Même s'il n'en était pas l'inventeur, Dirichlet fut le premier mathématicien à avoir compris la force du principe des tiroirs et à l'avoir utilisé pour démontrer des affirmations intéressantes.

Il s'en servit notamment pour établir le résultat suivant : Pour tout nombre réel x et tout entier donné n , il existe un nombre rationnel p/q (un rapport de deux entiers) avec $q \leq n$, tel que $|x - p/q| < 1/(nq)$.

En langage plus simple : on s'intéresse aux nombres rationnels p/q dont le dénominateur est inférieur ou égal à l'entier n donné, et on affirme que tout nombre réel peut être approché par l'un d'eux, p/q , avec une erreur inférieure à $1/(nq)$.

Démonstration

On ne s'intéresse qu'aux nombres entre 0 et 1, auxquels on se ramène. Pour tout nombre réel y , notons $\{y\}$ sa partie fractionnaire, c'est-à-dire ce qui reste quand on lui enlève sa partie entière. Par exemple, $\{3,14159\} = 0,14159$. On range les $n + 1$ nombres $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{nx\}$ dans les n « tiroirs » constitués des intervalles $[0, 1/n[, [1/n, 2/n[, [2/n, 3/n[, \dots, [(n-1)/n, 1[$ (rappelons que $[a, b[$ désigne l'ensemble des nombres z tels que $a \leq z < b$). D'après le principe des tiroirs, deux de ces $n + 1$ nombres se

retrouvent dans le même tiroir. Il existe donc deux entiers distincts k et h tels que $\{kx\}$ et $\{hx\}$ soient dans le même tiroir. On en déduit : $|\{kx\} - \{hx\}| < 1/n$. En notant p la différence des parties entières de kx et hx , on en déduit que $|(k-h)x - p| < 1/n$. Si l'on pose $q = k - h$, et que l'on divise par q (qui n'est pas nul, car k est différent de h), on obtient : $|x - p/q| < 1/(nq)$. CQFD.

Un corollaire du résultat est que pour tout nombre réel x , il existe une infinité de nombres entiers q tel que $|x - p/q| \leq 1/q^2$ pour un certain entier p . Dans cet énoncé, on ne peut pas remplacer l'exposant 2 par un nombre réel $a > 2$. En effet, tout nombre irrationnel algébrique (non rationnel, mais racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers) comme le nombre $\sqrt{2}$ est un contre-exemple. C'est ce qu'indique le théorème suivant, qui contribua à valoir une médaille Fields à Klaus Roth en 1958 : Si x est irrationnel algébrique et si a est un nombre réel strictement supérieur à 2, alors il n'existe qu'un nombre fini de q tels que $|x - p/q| \leq 1/q^a$ pour un certain entier p (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Roth's_theorem).



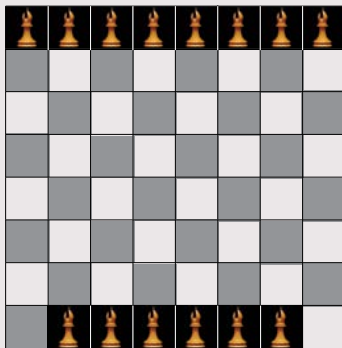
PLUS ON EST DE FOUS...

4

Combien de fous du jeu d'échecs peut-on placer au plus sur un échiquier 8×8 en évitant que deux fous soient en prise ?

La figure de gauche montre que 14 fous peuvent être placés sans qu'aucun ne soit en prise sur un autre.

La figure de droite montre que l'on ne peut pas en placer plus de 14. En effet, les couleurs sur l'échiquier définissent 14 sous-ensembles qui seront pour nous 14 tiroirs. On remarque que les couleurs ont été choisies de telle façon que si on place des fous sur deux cases portant la même couleur, ils sont en prise. Il en résulte que si on plaçait m fous sur l'échiquier avec $m > 14$, d'après le principe des tiroirs utilisé avec 14 tiroirs et m objets, on placerait deux fous dans le même tiroir, donc en prise l'un sur l'autre. Il n'est donc pas possible de placer plus de 14 fous.



S'ÉCHAPPER DU DAMIER

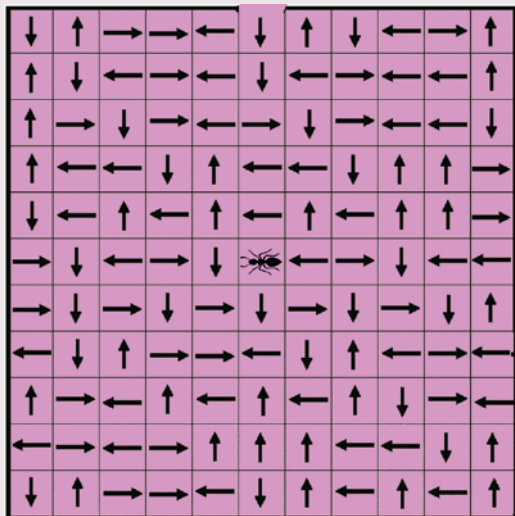
5

Sur chaque case d'un damier carré de taille finie, une flèche indique (au hasard) un des quatre points cardinaux. Une fourmi se trouve sur la case centrale. Chaque seconde, elle change de case et va sur la case voisine de sa position en suivant la direction indiquée par la flèche présente sur la case où elle se trouve. Si la fourmi arrive sur la case centrale du mur Nord et que la flèche de la case pointe dans la direction Nord, elle sort. Lorsque la fourmi quitte une case,

la flèche de la case qu'elle vient de quitter tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Il y a un mur sur les côtés Ouest, Est, Sud et Nord (sauf au niveau de la case centrale du mur Nord). Lorsque la fourmi est bloquée par le mur, elle ne change pas de case, mais la flèche tourne quand même de 90° .

Nous allons montrer que la fourmi finit toujours par trouver la sortie.

Supposons que la fourmi ne quitte jamais le damier. D'après le principe des tiroirs fini/infini, il existe au moins une case où elle passe une infinité de fois (les tiroirs sont les cases, et les objets qu'on y dépose sont les numéros des instants où la fourmi s'y trouve). Comme elle se trouve sur cette case une infinité de fois et qu'elle fait tourner la flèche à chaque passage, elle passe aussi une infinité de fois par chacune de ses voisines. Elle passe donc, de proche en proche, une infinité de fois par chacune des cases. La quatrième fois au plus où elle se trouve sur la case libératrice, la flèche lui indiquera le Nord. C'est contraire à notre hypothèse de départ. La contradiction trouvée prouve qu'il est impossible que la fourmi ne quitte pas le damier.



> naissances ne sont pas uniformément réparties dans l'année, ce qui augmente la probabilité de jours anniversaires communs... et surtout parce que la présence de jumeaux dans une classe, quand elle se produit, fait passer la probabilité calculée à 100 %.

Une autre application du principe probabiliste des tiroirs est amusante. Les humains ont au plus 200 000 cheveux sur la tête. On est donc certain, d'après le principe des tiroirs, que, dans une ville comptant 200 001 habitants ou plus, deux personnes ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête. Plus surprenante est la probabilité que cela se produise dans un gros village de 1 000 ou 2 000 habitants. Les calculs avec la formule approchée donnent, pour $m=1 000$ habitants :

$1 - \exp[-1 000 \times 999 / (2 \times 200 000)] = 0,9177095$, soit une probabilité de 91,77 %, et pour $m=2 000$ habitants :

$1 - \exp[-2 000 \times 1 999 / (2 \times 200 000)] = 0,9999543725$, soit une probabilité de 99,995 %.

Dans un village de 2 000 personnes, il est donc quasiment certain que deux personnes ont, à l'unité près, le même nombre de cheveux !

DES VERSIONS INFINIES DU PRINCIPE DES TIROIRS

Une chose vraie dans le fini a généralement un énoncé correspondant dans l'infini. C'est le cas pour le principe des tiroirs.

Principe des tiroirs fini/infini

Quand on range une infinité d'objets dans un nombre fini de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité d'objets.

Une application de ce principe porte sur les décimales des nombres réels. Parmi les séquences de chiffres décimaux consécutifs de longueur 1 million (il y en a $10^{1 000 000}$), l'une d'elles se retrouve présente une infinité de fois dans les décimales de π ... et c'est vrai en changeant la longueur et en prenant n'importe quel nombre réel à la place de π .

La démonstration est simple. On parcourt les décimales par paquets de 1 million : paquet P_1 commençant à la première décimale, paquet P_2 commençant à la deuxième décimale, etc. Puis on range chaque entier n dans le tiroir étiqueté par la séquence de décimales P_n . D'après le principe des tiroirs fini/infini, comme il n'y a que $10^{1 000 000}$ tiroirs (il n'y a que $10^{1 000 000}$ séquences distinctes) et qu'on y range tous les entiers, l'un des tiroirs contient une infinité de nombres. La séquence de 1 million de chiffres écrite sur ce tiroir est donc présente une infinité de fois dans les décimales de π .

À vrai dire, on conjecture que « toute séquence finie de chiffres, quelle que soit sa longueur, est présente une infinité de fois dans les décimales de π » ; mais contrairement à

6

Un champion souhaite organiser ses séances d'entraînement pour les 30 prochains jours. Il s'entraîne par heures entières et veut s'entraîner 45 fois (donc 45 heures). Il veut s'entraîner au moins une heure par jour. Montrer que nécessairement, dans le programme qu'il se fixe, il y a une série de jours consécutifs où il s'entraînera exactement 14 heures.

Démonstration

Considérons le total des heures qu'il aura fait au bout d'une journée, deux journées, etc. Cela donne 30 nombres entiers $S_1 < S_2 < \dots < S_{30} = 45$. On veut démontrer qu'il existe i et j tels que $S_i + 14 = S_j$. Considérons les inégalités écrites au-dessus

en ajoutant 14 à chaque nombre. On a : $S_1 + 14 < S_2 + 14 < \dots < S_{30} + 14 = 45 + 14 = 59$. Les 60 nombres entiers $S_1, S_2, \dots, S_{30}$ et $S_1 + 14, S_2 + 14, \dots, S_{30} + 14$ sont tous compris entre 1 et 59. D'après le principe des tiroirs (ici 59 tiroirs, 60 objets), deux de ces nombres, notons-les X et Y , sont égaux. Les nombres X et Y ne peuvent pas être tous les deux parmi les 30 premiers à cause des inégalités strictes, ni tous les deux parmi les 30 derniers. Il y en a donc un parmi les 30 premiers, disons S_i , et un autre parmi les 30 derniers, disons $S_j + 14$. Nous avons trouvé S_i et S_j tels que $S_i + 14 = S_j$. C'est ce que nous voulions. Remarquons que le raisonnement marcherait encore en remplaçant 14 par 13 ou 12, ou 11... ou 1.

l'affirmation tirée du principe des tiroirs, cet énoncé plus précis reste une hypothèse.

Le principe des tiroirs fini/infini se généralise en considérant l'algèbre des cardinaux transfinis. Indiquons seulement la version de cette généralisation concernant les ensembles infinis dénombrables, ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance un à un avec les nombres entiers, et les ensembles infinis non dénombrables, trop gros pour qu'une telle correspondance existe.

Principe des tiroirs dénombrable/non dénombrable

Quand on range une infinité non dénombrable d'objets dans un meuble contenant une infinité dénombrable de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité non dénombrable d'objets.

Application. Si E est un sous-ensemble non dénombrable du plan et qu'un pavage du plan est donné (par exemple par des carrés) alors l'un des pavés contient une infinité non dénombrable d'éléments de E . On répartit les points dans des tiroirs correspondant aux pavés qui constituent une infinité dénombrable. Parfois, un point de E appartient à plusieurs pavés (car les bords des pavés sont communs); on le place alors au hasard dans le tiroir associé à l'un des pavés concernés. Quand tous les points sont placés, on applique le principe des tiroirs: l'un des tiroirs contient donc une infinité non dénombrable d'éléments, et donc l'un des pavés contient une infinité non dénombrable de points de E .

Le principe des tiroirs fini/infini est important en logique et Terence Tao, célèbre mathématicien australo-américain lauréat d'une médaille Fields en 2006, a proposé un axiome qui exprime ce principe dans un langage logique élémentaire. Cet axiome est aujourd'hui discuté et on étudie sa force (voir la bibliographie). Les travaux autour de ces questions constituent une indication indirecte que les principes des tiroirs sont des

énoncés singuliers exprimant de manière concise des affirmations logiques puissantes... malgré leur apparente évidence.

Ce contenu logique réellement intéressant du principe des tiroirs et de ses variantes est d'ailleurs confirmé par d'autres travaux menés en démonstration automatique à propos d'une méthode de calcul logique dénommée *résolution*. On étudie la transcription en logique propositionnelle de l'affirmation: si m objets sont mis dans n tiroirs et que $m > n$, alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets. On essaie de voir quelles sont les démonstrations les plus courtes possible de la formule. On découvre qu'elles sont toutes assez longues, ce qui confirme que, même si elles nous apparaissent aller de soi, les affirmations tirées du principe des tiroirs quand on fait varier n et m ne résultent pas sans efforts des vérités logiques élémentaires adoptées comme axiomes.

UN PRINCIPE FAUX EN MÉCANIQUE QUANTIQUE?

Une dernière preuve que ces principes ne sont pas uniquement des banalités vient d'être proposée par Yakir Aharonov, de l'université de Tel Aviv, et des collègues. Leur article paru en 2016 dans la revue de l'Académie des sciences des États-Unis affirme établir que la forme la plus élémentaire du principe des tiroirs, «Si trois objets sont placés dans deux tiroirs, alors l'un des tiroirs contient deux objets», est fautive en mécanique quantique.

Si comme moi vous avez du mal à comprendre l'article (voir la bibliographie), qui a provoqué quelques réactions critiques, et à savoir ce que peut signifier qu'en mécanique quantique le principe des tiroirs soit faux, ce n'est pas très étonnant. Après tout, le grand physicien américain Richard Feynman avait lui-même déclaré que «personne ne comprend la mécanique quantique»! ■

BIBLIOGRAPHIE

Y. Aharonov et al., **Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations**, *PNAS*, vol. 113(3), pp. 532-535, 2016.

B. Rittaud et A. Heeffer, **The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 36, pp. 27-29, 2014.

O. Beyersdorff et al., **A lower bound for the pigeonhole principle in tree-like resolution by asymmetric Prover-Delayer games**, *Information Processing Letters*, vol. 110(23), pp. 1074-1077, 2010.

J. Gaspar et U. Kohlenbach, **On Tao's "finitary" infinite pigeonhole principle**, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 75(1), pp. 355-371, 2010.

P. G. L. Dirichlet, **Recherches sur les formes quadratiques à coefficients complexes**, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 24, pp. 291-371, 1842.