

6

Un champion souhaite organiser ses séances d'entraînement pour les 30 prochains jours. Il s'entraîne par heures entières et veut s'entraîner 45 fois (donc 45 heures). Il veut s'entraîner au moins une heure par jour. Montrer que nécessairement, dans le programme qu'il se fixe, il y a une série de jours consécutifs où il s'entraînera exactement 14 heures.

Démonstration

Considérons le total des heures qu'il aura fait au bout d'une journée, deux journées, etc. Cela donne 30 nombres entiers $S_1 < S_2 < \dots < S_{30} = 45$. On veut démontrer qu'il existe i et j tels que $S_i + 14 = S_j$. Considérons les inégalités écrites au-dessus

en ajoutant 14 à chaque nombre. On a : $S_1 + 14 < S_2 + 14 < \dots < S_{30} + 14 = 45 + 14 = 59$. Les 60 nombres entiers $S_1, S_2, \dots, S_{30}$ et $S_1 + 14, S_2 + 14, \dots, S_{30} + 14$ sont tous compris entre 1 et 59. D'après le principe des tiroirs (ici 59 tiroirs, 60 objets), deux de ces nombres, notons-les X et Y , sont égaux. Les nombres X et Y ne peuvent pas être tous les deux parmi les 30 premiers à cause des inégalités strictes, ni tous les deux parmi les 30 derniers. Il y en a donc un parmi les 30 premiers, disons S_i , et un autre parmi les 30 derniers, disons $S_j + 14$. Nous avons trouvé S_i et S_j tels que $S_i + 14 = S_j$. C'est ce que nous voulions. Remarquons que le raisonnement marcherait encore en remplaçant 14 par 13 ou 12, ou 11... ou 1.

l'affirmation tirée du principe des tiroirs, cet énoncé plus précis reste une hypothèse.

Le principe des tiroirs fini/infini se généralise en considérant l'algèbre des cardinaux transfinis. Indiquons seulement la version de cette généralisation concernant les ensembles infinis dénombrables, ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance un à un avec les nombres entiers, et les ensembles infinis non dénombrables, trop gros pour qu'une telle correspondance existe.

Principe des tiroirs dénombrable/non dénombrable

Quand on range une infinité non dénombrable d'objets dans un meuble contenant une infinité dénombrable de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité non dénombrable d'objets.

Application. Si E est un sous-ensemble non dénombrable du plan et qu'un pavage du plan est donné (par exemple par des carrés) alors l'un des pavés contient une infinité non dénombrable d'éléments de E . On répartit les points dans des tiroirs correspondant aux pavés qui constituent une infinité dénombrable. Parfois, un point de E appartient à plusieurs pavés (car les bords des pavés sont communs); on le place alors au hasard dans le tiroir associé à l'un des pavés concernés. Quand tous les points sont placés, on applique le principe des tiroirs: l'un des tiroirs contient donc une infinité non dénombrable d'éléments, et donc l'un des pavés contient une infinité non dénombrable de points de E .

Le principe des tiroirs fini/infini est important en logique et Terence Tao, célèbre mathématicien australo-américain lauréat d'une médaille Fields en 2006, a proposé un axiome qui exprime ce principe dans un langage logique élémentaire. Cet axiome est aujourd'hui discuté et on étudie sa force (voir la bibliographie). Les travaux autour de ces questions constituent une indication indirecte que les principes des tiroirs sont des

énoncés singuliers exprimant de manière concise des affirmations logiques puissantes... malgré leur apparente évidence.

Ce contenu logique réellement intéressant du principe des tiroirs et de ses variantes est d'ailleurs confirmé par d'autres travaux menés en démonstration automatique à propos d'une méthode de calcul logique dénommée *résolution*. On étudie la transcription en logique propositionnelle de l'affirmation: si m objets sont mis dans n tiroirs et que $m > n$, alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets. On essaie de voir quelles sont les démonstrations les plus courtes possible de la formule. On découvre qu'elles sont toutes assez longues, ce qui confirme que, même si elles nous apparaissent aller de soi, les affirmations tirées du principe des tiroirs quand on fait varier n et m ne résultent pas sans efforts des vérités logiques élémentaires adoptées comme axiomes.

UN PRINCIPE FAUX EN MÉCANIQUE QUANTIQUE?

Une dernière preuve que ces principes ne sont pas uniquement des banalités vient d'être proposée par Yakir Aharonov, de l'université de Tel Aviv, et des collègues. Leur article paru en 2016 dans la revue de l'Académie des sciences des États-Unis affirme établir que la forme la plus élémentaire du principe des tiroirs, «Si trois objets sont placés dans deux tiroirs, alors l'un des tiroirs contient deux objets», est fautive en mécanique quantique.

Si comme moi vous avez du mal à comprendre l'article (voir la bibliographie), qui a provoqué quelques réactions critiques, et à savoir ce que peut signifier qu'en mécanique quantique le principe des tiroirs soit faux, ce n'est pas très étonnant. Après tout, le grand physicien américain Richard Feynman avait lui-même déclaré que «personne ne comprend la mécanique quantique»! ■

BIBLIOGRAPHIE

Y. Aharonov et al., **Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations**, *PNAS*, vol. 113(3), pp. 532-535, 2016.

B. Rittaud et A. Heeffer, **The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 36, pp. 27-29, 2014.

O. Beyersdorff et al., **A lower bound for the pigeonhole principle in tree-like resolution by asymmetric Prover-Delayer games**, *Information Processing Letters*, vol. 110(23), pp. 1074-1077, 2010.

J. Gaspar et U. Kohlenbach, **On Tao's "finitary" infinite pigeonhole principle**, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 75(1), pp. 355-371, 2010.

P. G. L. Dirichlet, **Recherches sur les formes quadratiques à coefficients complexes**, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 24, pp. 291-371, 1842.



Le tableau *La Pose enchantée* (en haut, avec des couleurs reconstituées), de Magritte, n'existe plus. L'artiste l'a découpé et en a réemployé les morceaux pour réaliser d'autres œuvres. La radiographie (ci-dessus) a révélé que le quart supérieur droit se dissimulait sous *Dieu n'est pas un saint* (ci-contre). C'est le dernier fragment qui manquait.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à Pour la Science

CECI N'EST PAS UN PUZZLE

Grâce à la radiographie,
on a retrouvé le dernier
fragment d'une toile
de Magritte que le peintre
avait découpée en
quatre pour en faire
de nouvelles œuvres.

E

n 1929, la crise venue des États-Unis débarque en Europe. Parmi ceux qu'elle a considérablement appauvris, on compte le peintre belge René Magritte. Il a quitté deux ans auparavant son pays pour Paris, où il a fréquenté les surréalistes (André Breton, Paul Éluard, Max Ernst...), mais il est contraint de rentrer, désargenté, à Bruxelles en 1930. En particulier, il est privé du soutien financier de la galerie bruxelloise Le Centaure, qui a fermé.

S'ouvre alors une période de vaches maigres qui durera plusieurs années. Pour s'adonner à son art, il est conduit à des actes extrêmes. C'est ainsi qu'il découpe en quatre morceaux l'une de ses toiles, *La Pose enchantée*, peinte en 1927 (voir page ci-contre). On connaît ces deux femmes nues accoudées sur des colonnes brisées grâce à une photographie, en noir et blanc, qui figure dans le *Catalogue raisonné* de l'artiste avec la mention: «Localisation inconnue [...] probablement détruite.» Que sont devenus les fragments?

La découverte de la dernière pièce du puzzle a été annoncée en novembre 2017

par une équipe conjointe des musées royaux des Beaux-Arts de Belgique et le Centre européen d'archéométrie de l'université de Liège. Reprenons l'enquête depuis le début.

ÉPARILLÉ PAR PETITS BOUTS

La première pièce, le tableau intitulé *Le Portrait*, peint en 1935, a été repérée en 2013 par Anne Umland et Michael Duffy, du musée d'Art moderne de New York, alors qu'ils préparaient une exposition. En remarquant qu'une autre œuvre se cachait sous celle visible, ils ont radiographié la toile: les rayons X ont révélé qu'il s'agissait du quart supérieur gauche de *La Pose enchantée*.

Encouragée par ce premier succès, la même équipe a pisté les toiles dont les dimensions pouvaient correspondre aux œuvres recherchées et a sondé la face cachée du *Modèle rouge*, peint en 1935 et conservé au musée Moderna, à Stockholm, en Suède. Gagné! C'était le quart inférieur gauche.

D'autres limiers ont ensuite pris le relais. Leur traque les a menés dans un musée de Norfolk, en Grande-Bretagne. Cette fois, en 2016, la radiographie mit en évidence le quart inférieur droit du tableau original sous *La Condition humaine*, elle aussi réalisée en 1935. Un seul morceau restait à trouver...

C'est là qu'entre en scène le projet *Magritte on practice*, qui a consisté à étudier chaque toile du musée Magritte, à Bruxelles, la plus vaste collection

d'œuvres de l'artiste. La pièce manquante était bien à Bruxelles, dissimulée sous les traits de *Dieu n'est pas un saint*, daté entre 1935 et 1936. La mission était accomplie et le dossier classé: *La Pose enchantée* était entièrement reconstituée.

On remarque que le réemploi des morceaux a attendu au moins cinq années. On peut y voir le signe d'une hésitation, Magritte ayant peut-être eu du mal à se résoudre à ce sacrifice. Y en a-t-il eu d'autres? Probablement, car certains spécialistes prêtent au peintre la fâcheuse habitude de recycler ses toiles.

Un autre indice vient du *Catalogue raisonné*, où de nombreux tableaux portent la mention «Localisation inconnue». Sont-ils là, sous nos yeux, et surtout sous d'autres couches de peintures?

Francisca Vandepitte, des musées royaux des Beaux-Arts de Belgique, le pense: «Si nous avons la possibilité de poursuivre ces recherches, il y a tout lieu de s'attendre à ce que d'autres tableaux disparus de Magritte fassent surface.»

Les 42 huiles et 21 gouaches que l'on connaît de l'artiste ne seraient alors que la face visible d'une œuvre beaucoup plus vaste. Les expositions dédiées à Magritte seront désormais multicouches! ■

Le communiqué de l'université de Liège:
<http://bit.ly/PLS-Magritte>



Retrouvez la rubrique
Art & science sur
www.pourlascience.fr

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY
professeur de physique
à l'université
Pierre-et-Marie-Curie,
à Paris



ÉDOUARD KIERLIK
également professeur
de physique à l'université
Pierre-et-Marie-Curie

DES PENDULES DE FOUCAULT SUR PUCE

Pour mesurer les rotations d'un appareil, les gyromètres électromécaniques s'appuient sur la force de Coriolis – la même force qui permet au pendule de Foucault de mettre en évidence la rotation de la Terre sur elle-même.

Quel est le point commun entre un smartphone, une manette de jeu vidéo, un drone à quatre hélices, une automobile ou un gyropode? Chacun de ces objets dissimule un minuscule gyromètre: une puce électromécanique de taille millimétrique qui mesure en temps réel la vitesse de rotation de l'objet et qui peut, par intégration temporelle, en déduire son orientation dans l'espace, étape indispensable pour stabiliser celle-ci.

Malgré leur modernité, ces dispositifs s'inspirent d'instruments et de principes connus au XIX^e siècle. Voyons lesquels et ce qu'il y a de nouveau.

S'ORIENTER À L'AVEUGLE

Pouvons-nous déterminer notre orientation dans l'espace et son évolution en l'absence de toute référence extérieure, par exemple dans une cabine de train dont

les volets sont baissés ou dans un avion en plein brouillard? Nous serions tentés de répondre oui. Lorsque nous sommes en voiture, nous savons même les yeux fermés que la voiture accélère parce que nous sommes collés contre le dossier du siège, et que nous tournons parce que nous sommes déportés sur le côté. Ces forces ressenties sont des forces d'inertie, mesurables par des dynamomètres ou par l'inclinaison d'un fil à plomb.

Cependant, la mesure de ces forces ne permet pas toujours d'en déduire notre orientation. Un exemple? Lorsqu'un avion exécute un virage, le pilote incline l'avion, afin que la force ressentie par les passagers reste toujours selon la verticale du plancher. Avec un dynamomètre, on mesurerait une accélération supérieure à l'accélération de la pesanteur; mais il en serait de même si l'avion suivait une trajectoire incurvée vers le haut.

Le physicien français Léon Foucault a proposé deux solutions à cette difficulté.

La première tourne et la seconde oscille. La solution tournante, c'est le gyroscope, qu'il a perfectionné en 1852. Grâce à une suspension adaptée, une masse en rotation très rapide autour d'un axe est libre de pivoter dans toutes les directions. Dans ces conditions, l'axe conserve sa direction quels que soient les mouvements de la suspension, solidaire de l'objet en mouvement, l'avion dans notre exemple. Un ensemble de gyroscopes permet ainsi de déterminer à chaque instant l'orientation de la cabine. Ce dispositif a longtemps été au service des aviateurs, mais son efficacité avait un prix: un poids et un encombrement notables, problème que n'a pas

