

> figure de François Arago, personnalité montante de l'Observatoire. Le Tout-Paris se pressait pour assister à son cours public dans l'amphithéâtre de 800 places qu'il avait fait construire à l'Observatoire. Et 10000 lecteurs acquéraient l'*Annuaire du Bureau des longitudes* pour s'y délecter des notices sur la lune rousse, sur les comètes susceptibles de venir choquer la Terre ou encore sur la machine à vapeur. À l'Observatoire, Arago avait placé son clan familial et amical, qui travaillait et résidait sur place. L'arrivée d'Urbain Le Verrier au Bureau des longitudes ébranla cet équilibre avant de le détruire. En 1846, le découvreur de la planète Neptune fut accueilli en héros avant que les premières escarmouches ne surviennent à peine quelques semaines plus tard. Chacun des deux astronomes connut son heure de gloire politique, Arago devenant ministre après la révolution de 1848 et Le Verrier accédant au Sénat sous le Second Empire.

En 1854, Arago mort, Le Verrier prit le pouvoir sur l'Observatoire dont il obtint la séparation d'avec le Bureau des longitudes. Il chassa de l'Observatoire tous les fidèles d'Arago, qui étaient aussi pour la plupart membres du Bureau. Les réunions de celui-ci devinrent problématiques: Le Verrier «oubliait» de faire chauffer la salle, la clé était perdue, le courrier n'était pas transmis.

UNE PÉRIODE DE CRISE

Alors commença la première période d'errance pour nos archives. Plusieurs membres s'installèrent au 76 rue Notre-Dame-des-Champs, où une pièce était prévue pour abriter les personnes chargées de calculer les éphémérides – les calculateurs de la *Connaissance des temps*. Ainsi, nous ne possédons pas les originaux des procès-verbaux pour les deux décennies 1854-1874. Heureusement, des copies nous sont parvenues. Quant aux publications et courriers reçus des observatoires internationaux avec lesquels le Bureau a établi un réseau, ils étaient souvent emportés par le secrétaire de séance. Au décès de celui-ci, la famille restituait parfois les pièces, mais pas toujours. C'est aussi pendant cette période de crise que le Bureau confirma la diversification de son activité déjà perceptible pendant le premier demi-siècle. La géodésie, l'uniformisation de l'heure, les sciences physiques devinrent des champs dans lesquels le Bureau pouvait exercer son activité sans heurter de front le directeur de l'Observatoire, qui, bien que membre, ne siégeait pratiquement jamais.

La chute de l'Empire et l'avènement de la Troisième République favorisèrent le Bureau des longitudes, qui se vit enfin doté d'un lieu propre, quai de Conti, dans les bâtiments de l'Institut de France, où il réside encore aujourd'hui. Mais l'épopée des archives n'était pas terminée. En 1875, au cœur d'une ère de colonisation

triomphante, le Bureau des longitudes obtint l'ouverture de l'observatoire de Montsouris, dédié à la formation astronomique des explorateurs et voyageurs, tant militaires que civils. Lorsque Montsouris ferma ses portes en 1983 après un lent déclin, de nombreuses archives historiques, qui y avaient été entreposées au fil du temps, se retrouvèrent dans des bennes.

Quand Montsouris ferma en 1983, de nombreuses archives se retrouvèrent dans des bennes

Quelques-unes furent sauvées par des astronomes soucieux du patrimoine. D'autres firent le bonheur de collectionneurs privés. Le contenu de la cave du quai de Conti provient-il de cette époque? Cela reste un mystère.

Le Bureau des longitudes assure encore sa mission. Il participe à des instances internationales, partage son expertise dans diverses disciplines, publie des ouvrages et organise des conférences grand public. Ses archives ont aussi un rôle inestimable. Par exemple, Nicolas Pouvreau, qui travaille au service hydrographique et océanographique de la Marine, met en valeur le patrimoine français des séries marégraphiques. Des observations systématiques du niveau de la mer ont été menées à Brest à partir de 1806, sous la surveillance du Bureau, à l'initiative de Laplace et Lalande. Ces données mettent en évidence la montée régulière des eaux depuis les débuts de la mesure. Elles soulignent la nécessité du «plan de prévention des submersions marines» développé à la suite de la catastrophe Xynthia.

Et qu'en est-il des procès-verbaux et des documents trouvés dans les caves du quai de Conti? Pour les historiens des sciences, ils sont une possibilité unique de découvrir le Bureau des longitudes de l'intérieur, par son quotidien, comme en attestent quelques exemples (voir pages 76 et 77). Quant au lecteur curieux qui s'aventurera sur le site internet dédié aux procès-verbaux du Bureau (bdl.ahp-numerique.fr), il découvrira tous les mois de nouveaux récits qui, peu à peu, redonneront chair à cet étonnant petit monde. ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Schiavon et L. Rollet (dir.), **Pour une histoire du bureau des longitudes (1795-1932)**, Presses Universitaires de Nancy, 2017.

C. Le Lay, **L'Annuaire du Bureau des longitudes et la diffusion scientifique : enjeux et controverses (1795-1870)**, *Romantisme*, n° 166, pp. 21-31, 2014.

G. Boistel, **L'observatoire de la Marine et du Bureau des longitudes au Parc Montsouris, 1875-1914**, IMCCE e/dite, 2010.



D'évolutions en révolutions



9 € • 128 pages

Suivez-nous
sur les réseaux sociaux



quesaisje.com

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LES INDÉCIDABLES ABSOLUS EXISTENT-ILS?

En 1951, Kurt Gödel énonça que soit l'esprit humain n'est pas une machine, soit il existe des énoncés qui lui sont indécidables à jamais, soit les deux à la fois. Le débat ouvert sur cette question est toujours d'actualité.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Certaines questions philosophiques sont fondamentales. La nature, mécanique ou non, de l'esprit humain en fait partie. Que des résultats mathématiques contribuent à résoudre cette dernière est surprenant. Pourtant, Kurt Gödel, fin philosophe et génial logicien d'origine autrichienne, a fait avancer la question en 1951 en formulant ce que l'on dénomme la disjonction gödélienne. Cet énoncé indique que l'une au moins des deux affirmations suivantes est vraie :

- soit l'esprit mathématique humain ne peut pas être réduit à un algorithme, autrement dit l'homme n'est pas une machine.
- soit il existe des indécidables mathématiques absolus.

Expliquons les deux termes de la disjonction avant de présenter l'argument proposé par Gödel pour l'établir et les approfondissements apportés par de récents travaux.

Les mathématiciens ont élaboré des méthodes de raisonnement sûres et vérifiables, que l'on présente sous la forme d'axiomes et de règles de déduction ; ces méthodes leur permettent d'établir toutes les mathématiques connues. L'une des principales méthodes est le système formel de l'arithmétique de Peano, qu'on notera PEANO ; il permet de traiter les nombres entiers et de démontrer, par exemple, qu'il existe une infinité de nombres premiers ou que tout entier positif n est la somme de quatre carrés d'entiers ($n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, où a, b, c et d sont des entiers). D'autres systèmes formels autorisent la manipulation des nombres

réels et en particulier les calculs des décimales du nombre π , ou la résolution des équations différentielles.

Plus puissant, le système habituel de la théorie des ensembles, noté ZFC pour « système de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix », établit qu'il existe une infinité de types d'infinis et permet de concevoir des espaces à n dimensions, des espaces de fonctions, des espaces d'espaces, etc. D'autres systèmes formels, tels ceux évoqués dans un article précédent de cette rubrique à propos d'Alexandre Grothendieck (voir « Quand considère-t-on qu'un théorème est définitivement prouvé? », *Pour la Science* n° 475, mai 2017) sont encore plus puissants.

Cette hiérarchie de systèmes autorise non seulement la manipulation d'objets finis et infinis de plus en plus nombreux et variés, mais donne accès à un florilège de nouvelles démonstrations : ZFC « sait » par exemple plus de choses sur les entiers que PEANO. Cette progression vers des systèmes de plus en plus efficaces se poursuivra sans doute. La question évoquée par le premier terme de la disjonction de Gödel est celle de la nature de cet esprit inventif qui maîtrise un monde mathématique de plus en plus riche : peut-il être réduit à ce que donnerait un algorithme ?

Le second terme de la disjonction se réfère aux indécidables qui, d'après le premier théorème d'incomplétude de Gödel, existent dans tout système formel cohérent (on dit aussi « consistant », terme calqué de l'anglais *consistent*), c'est-à-dire non contradictoire, et assez puissant.

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

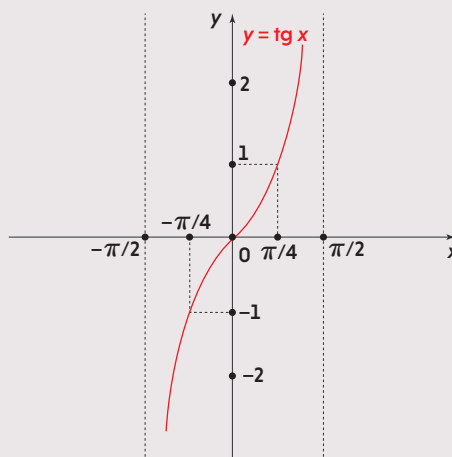
1

L'hypothèse du continu est un bon candidat au titre d'indécidable absolu. Expliquons en quoi elle consiste. Les sous-ensembles infinis de l'ensemble des nombres réels que les mathématiciens rencontrent sont de deux types. Il y a, d'une part, les sous-ensembles dénombrables, c'est-à-dire qui peuvent être mis en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. Contrairement à ce qu'on pense au premier abord, l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ est dénombrable : il peut être mis en correspondance un à un avec $\mathbb{N}$. Il suffit de procéder ainsi : $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow -1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow -2, 5 \rightarrow 3, 6 \rightarrow -3, 7 \rightarrow 4, 8 \rightarrow -4$, etc. Il en va de même pour les rationnels positifs (quotients de deux entiers positifs) : on place ces nombres dans un tableau que l'on parcourt en zigzag :

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

En associant les entiers positifs aux étapes du parcours et en sautant ceux déjà rencontrés (comme $2/4$, qui est égal à $1/2$), on définit une correspondance un à un entre les entiers et les rationnels positifs.

L'autre catégorie de sous-ensembles infinis rencontrés en mathématiques est celle des ensembles qu'on sait mettre en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Par exemple, l'intervalle I des nombres réels strictement compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ est mis en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{R}$ par la fonction $x \rightarrow \tan(x)$; à chaque nombre de l'intervalle I correspond un unique nombre réel et tous les réels sont atteints (parce qu'il y a deux asymptotes verticales).



Tous les sous-ensembles infinis de $\mathbb{R}$ qu'on rencontre se mettent ainsi en correspondance un à un soit avec $\mathbb{N}$, soit avec $\mathbb{R}$. Pourtant, on ne sait pas prouver que cela est vraiment le cas pour tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$. Dit un peu différemment, on ignore s'il existe un infini intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. L'hypothèse du continu, HC, formulée la première fois par Georg Cantor en 1878, affirme que oui. Kurt Gödel a prouvé en 1938 que les axiomes du système ZFC ne permettent pas de démontrer non-HC, et Paul Cohen a prouvé en 1963 que les axiomes de ZFC ne permettent pas de démontrer HC. En un mot, HC est un indécidable de ZFC. On pourrait donc, sans risque d'introduire de contradiction, ajouter HC ou non-HC aux axiomes. Cependant, les mathématiciens refusent de le faire, car aucune intuition claire ne les guide dans le choix ; opter pour HC ou pour non-HC serait une décision arbitraire.

Cela ne signifie pas que HC soit un indécidable absolu, car, comme l'espérait Gödel, on pourrait trouver un ou des axiomes naturels et évidents à ajouter à ZFC qui, parmi leurs conséquences, auraient HC ou non-HC. Bien qu'un énorme travail ait été fait dans cet objectif, celui-ci n'a pas été atteint à ce jour.

Un indécidable dans le système S est un énoncé E qui, bien que s'exprimant dans le langage de S , n'est pas démontrable dans S , pas plus que sa négation non- E . Le premier théorème d'incomplétude de 1931 établit de façon incontestable que tout système formel S cohérent et assez puissant est sujet à l'incomplétude (c'est-à-dire qu'il y existe des indécidables), et le second théorème d'incomplétude précise que l'énoncé Cohé(S) affirmant que S est cohérent est un indécidable de S .

Les énoncés d'un système donné S qui sont indécidables ne le sont pas nécessairement dans un autre système S' . On connaît ainsi des énoncés d'arithmétique qui sont indécidables dans PEANO et qui ne le sont pas dans la

théorie ZFC des ensembles : les indécidables évoqués par les théorèmes de Gödel dépendent du système formel envisagé.

INDÉCIDABLES RELATIFS OU ABSOLUS ?

Dans un certain sens, il n'existe pas d'indécidable absolu : si E est un indécidable d'un système cohérent S , en ajoutant à S l'axiome E on obtient le système S' qui est encore cohérent, mais où E n'est plus indécidable ! Ce n'est bien sûr pas dans ce sens que Gödel envisage les indécidables absolus dans sa disjonction. Même si, par jeu, on envisage le système S' , il n'est pas vrai que les mathématiciens envisageront sérieusement ce qu'indique S' du monde mathématique ; >

> ils n'accepteront de le faire que lorsqu'ils seront certains que les nouveaux systèmes sont conformes à la réalité mathématique. Or les indécidables absolus que Gödel envisageait sont des énoncés qui seraient mathématiquement vrais, mais dont l'esprit mathématique humain ne pourrait jamais vraiment comprendre qu'ils sont vrais. Expliquons cette délicate distinction avec un exemple.

D'après le second théorème d'incomplétude de Gödel, l'arithmétique de Peano peut exprimer l'énoncé Cohé(PEANO) affirmant qu'elle est cohérente, et cet énoncé est indécidable dans PEANO. Cela signifie qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome Cohé(PEANO) donnant un nouveau système PEANO', mais aussi qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome non-Cohé(PEANO) donnant un autre nouveau système PEANO". Ces deux extensions sont toutes deux cohérentes si PEANO l'est. Pourtant, le mathématicien n'envisage sérieusement que la première, PEANO', car la

compréhension qu'il a des nombres entiers est telle qu'il ne doute pas le moins du monde des axiomes de PEANO et des règles de raisonnement qui permettent de déduire des théorèmes dans PEANO; il est donc convaincu, même si PEANO ne peut pas le démontrer que Cohé(PEANO) est vrai.

Face à un indécidable E d'un système formel S, l'esprit du mathématicien sera parfois guidé (comme dans l'exemple) par la compréhension qu'il a des objets mathématiques. Dans de tels cas, il optera pour l'une des options E ou non-E, une seule de ces deux options correspondant à la réalité mathématique.

La question posée par Gödel est : face à un indécidable, le mathématicien pourra-t-il toujours opter (à plus ou moins long terme) pour l'une des deux éventualités E ou non-E? S'il ne le peut pas, E sera un indécidable absolu. L'encadré 1 présente un énoncé indécidable qui se trouve aujourd'hui dans cette délicate indétermination.

COMMENT GÖDEL A PROUVÉ LA DISJONCTION

Reprenons le raisonnement qu'a proposé Gödel pour établir la disjonction.

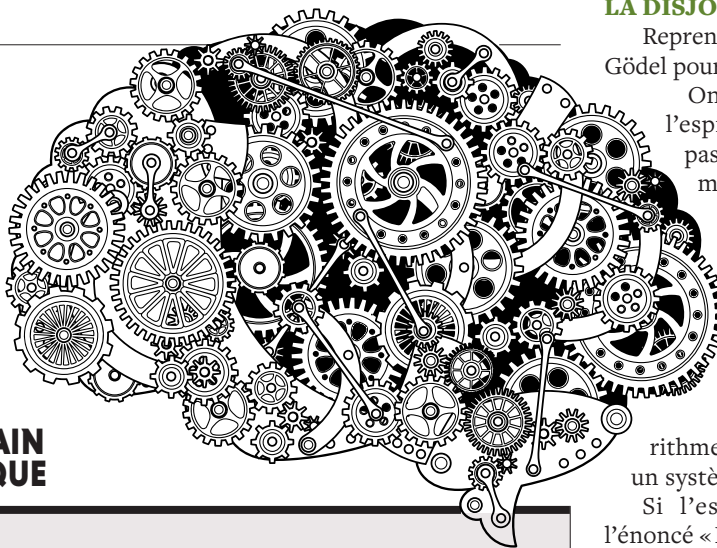
On part de l'alternative suivante. Soit l'esprit mathématique humain ne peut pas être réduit à un algorithme (autrement dit, l'homme n'est pas une machine). Soit l'esprit mathématique humain se réduit à un algorithme, auquel cas tout ce qui sera produit dans l'avenir comme nouveaux axiomes et systèmes formels plus puissants pourra s'exprimer dans un seul système formel, car à un algorithme donné on peut toujours associer un système formel.

Si l'esprit humain est mécanisable, l'énoncé «Le système S_H englobant toutes les vérités mathématiques humainement accessibles est cohérent» sera vrai, car la description d'une réalité est nécessairement cohérente. Pourtant, cette affirmation de cohérence ne sera pas démontrable par ce système, d'après le second théorème d'incomplétude : ce sera donc un indécidable absolu au sens où Gödel l'envisageait, une affirmation mathématique vraie définitivement, mais hors du champ de la pensée mathématique humaine. Il existera donc des indécidables absolus. Cela achève la démonstration de la disjonction de Gödel.

Notons que ce qu'affirme la disjonction est qu'au moins l'une des deux affirmations exprimées est vraie, mais qu'il n'est pas exclu que les deux soient vraies : il se peut qu'il existe des indécidables absolus et que l'esprit mathématique humain ne soit pas mécanisable.

2

L'ESPRIT HUMAIN ALGORITHMIQUE



Dans toute la discussion sur la disjonction de Gödel, on utilise comme acquises les équivalences entre les affirmations :

- (a) l'esprit humain est mécanisable ;
- (b) l'esprit humain est algorithmique ;
- (c) l'esprit humain se réduit à une machine ;
- (d) l'esprit humain est équivalent à un système formel comme les logiciens en considèrent pour définir la notion de démonstration mathématique.

Bien sûr, chaque affirmation demande une discussion et une justification détaillée. Cependant, et c'est aussi l'une des avancées de la philosophie des mathématiques, un accord à peu près unanime a été obtenu pour affirmer que, pour l'essentiel, les affirmations (a), (b), (c) et (d) signifient la même chose. L'un des points importants de la discussion

conduisant à cet accord est ce qu'on nomme la thèse de Church-Turing, selon laquelle la notion mathématique d'algorithme telle que l'informatique l'utilise capte parfaitement le concept de « mécanisable », ou de « faisable par machine ». Concernant les systèmes formels, l'idée que les preuves mathématiquement acceptables doivent être vérifiables mécaniquement justifie la dernière ligne.

Précisons toutefois que, dans toutes ces définitions, on envisage un esprit humain idéalisé disposant d'une mémoire potentiellement infinie et non limitée par le temps. Par exemple, un simple algorithme de multiplication entre deux entiers n et m exige une mémoire illimitée et un temps non borné si l'on veut qu'il s'applique à tout couple d'entiers n , m sans limitation de taille.

Tous ceux qui se sont penchés depuis 1951 sur la conclusion de Gödel ont reconnu que son raisonnement était imparable. Bien qu'il s'agisse d'une question de nature philosophique, elle est traitée avec suffisamment de rigueur, en s'appuyant sur des résultats indiscutables, pour que toutes les personnes qui comprennent le sens de la disjonction de Gödel l'approuvent.

La question posée est alors: comment déterminer quelle branche de la disjonction doit être considérée comme vraie et, éventuellement, a-t-on des raisons de croire que les deux termes de la disjonction sont vrais? L'affaire est d'importance, car prouver que l'esprit humain n'est pas mécanisable serait une grande avancée, de même qu'établir l'existence d'indécidables absolus.

POUR GÖDEL ET HILBERT, IL N'Y A PAS D'IGNORABIMUS

Gödel avait une préférence pour la solution: «L'esprit mathématique humain n'est pas mécanisable et il n'existe pas d'indécidables absolus.» Sa conception, qu'on désigne sous le terme de réalisme ensembliste, était que nous disposons d'une sorte d'aptitude à percevoir les vérités mathématiques concernant les ensembles et que cela nous donne accès à toutes les vérités mathématiques. Cette capacité à comprendre exige des efforts, mais Gödel pensait qu'à la longue, nous accéderions à toutes les vérités du monde mathématique.

Cette position était celle aussi du grand mathématicien allemand David Hilbert, qui a très explicitement défendu, lors du congrès des mathématiciens tenu en 1900 à Paris, l'idée qu'«il n'existe pas d'*ignorabimus* en mathématiques». En latin, la maxime *Ignoramus et ignorabimus* signifie *Nous ne savons pas et ne saurons jamais*. Hilbert comme Gödel pensaient que toute question mathématique bien posée finit par trouver une réponse.

Toutefois, Gödel, bien que préférant la première branche de l'alternative, reconnaissait qu'il ne disposait pas d'arguments concluants pour l'affirmer. Pour lui, la disjonction était sûre, mais rien ne permettait de préciser la bonne branche de la disjonction.

Depuis bientôt quatre-vingts ans, de nombreuses tentatives ont été menées pour décider entre les deux options. Un colloque réuni récemment à l'université de Bristol a fait le bilan des travaux de logique et des arguments traitant de la disjonction de Gödel. Un ouvrage publié sous la direction de Léon Horsten et Philip Welch en a résulté (voir la bibliographie). Nous en présenterons quelques aspects.

Le raisonnement assez simple suivant, dont diverses versions ont circulé, semble définitivement établir qu'il faut choisir l'option: >

3

L'HYPOTHÈSE DE COHÉRENCE

Dans les raisonnements présentés, on suppose que l'esprit humain, au moins quand on ne considère que les mathématiques, est cohérent, c'est-à-dire qu'il ne se contredit jamais. La justification de cette hypothèse est que, par exemple, nous n'avons aucun doute que les entiers existent et que le raisonnement par récurrence « Si [l'affirmation P_n est vraie pour $n = 0$] et si [P_n implique P_{n+1} pour tout entier n], alors [P_n est vraie pour tout entier positif n] » ne produira jamais aucune absurdité. En raisonnant à partir d'axiomes vrais de toute évidence et de règles de raisonnement sûres telles que le raisonnement par récurrence, nous sommes certains de ne jamais produire de contradiction.

L'hypothèse de cohérence est le plus souvent acceptable: notre compréhension intime des objets mathématiques garantit la non-contradiction de systèmes formels tels que celui de l'arithmétique de Peano. Il faut cependant noter que lorsqu'on s'élève dans la hiérarchie des systèmes formels, la certitude de la cohérence devient discutable. Il se peut parfois qu'on ait le sentiment de concevoir un monde mathématique solide et donc cohérent, alors qu'on est dans l'illusion et que les règles qu'on introduit, bien que cela nous échappe, produisent des contradictions.

C'est arrivé plusieurs fois en mathématiques. Quand Gottlob Frege a conçu pour la première fois un système d'axiomes pour parler des ensembles, il ne doutait pas de sa cohérence et pourtant on y a découvert une contradiction, le paradoxe de Russell (voir <https://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/>).

C'est arrivé aussi avec certains axiomes de grands cardinaux qui semblaient acceptables et dont pourtant Kenneth Kunen a montré en 1971 qu'ils produisaient des absurdités (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Kunen%27s_inconsistency_theorem).

Il faut donc se méfier de notre intuition et être extrêmement attentif avant de considérer comme une évidence que de nouveaux axiomes qu'on souhaite adjoindre aux théories acceptées n'y introduisent pas de contradiction.





L'APPROCHE DU MULTIVERS

4

Pour justifier qu'il existe des indécidables absolus, tout en préservant l'idée qu'il existe un univers mathématique indépendant de nous (position réaliste à laquelle nombre de mathématiciens sont attachés), les logiciens ont introduit le concept de « multivers ensembliste ». Le monde mathématique serait composé de parties indépendantes dont les propriétés seraient différentes. Les indécidables absolus seraient les propriétés qui ne sont pas vraies dans toutes les composantes du multivers. Ainsi, l'hypothèse du continu, HC, serait vraie dans certaines composantes et fausse dans d'autres.

Le débat au sujet de la philosophie réaliste des mathématiques a pris la forme d'une opposition entre la position « universiste » qui défend l'existence d'un unique monde ensembliste maximal (on accepte autant qu'on le peut tous les axiomes affirmant l'existence de grands ensembles) et la position « multiversiste » qui imagine une multitude de mondes ensemblistes maximaux différents. Pour

les universistes, dont Gödel aurait sans doute fait partie, il n'y a pas d'indécidable absolu. Pour les multiversistes, l'existence d'indécidables absolus n'est pas ennuyeuse (ce sont les énoncés dont la vérité change d'une composante à l'autre) et, surtout, n'est pas en contradiction avec l'idée d'un réel mathématique. L'incapacité des mathématiciens, depuis plus d'un siècle, à formuler des axiomes naturels qui aient pour conséquence HC ou non-HC est vue comme un argument en faveur du multiversisme.

Le grand logicien Hugh Woodin, de l'université Harvard, qui n'est pourtant pas un adepte du multiversisme, affirme à ce sujet : « Les raffinements de la méthode de forcing de Cohen depuis sa découverte initiale [pour établir que HC n'est pas démontrable dans ZFC] et la pléthore de problèmes dont on a prouvé grâce à cette méthode qu'ils sont [comme HC] impossibles à résoudre [dans ZFC], ont en pratique presque obligé à adopter la position multiversiste ».

» « L'esprit mathématique humain ne se réduit pas à un algorithme. »

- Si l'esprit humain était une machine, les vérités mathématiques qu'il accepte et acceptera seraient les théorèmes d'un système formel cohérent S_H (indice H pour *humain*). Mais l'être humain ne doute pas que sa conception mathématique est cohérente, car il n'accepte de n'y mettre que ce dont il est absolument certain. Il serait donc convaincu que $Cohé(S_H)$ est vrai. Cela signifierait que S_H est un système formel qui voit sa propre cohérence, ce qui est en contradiction avec le second théorème d'incomplétude de Gödel, dont la démonstration ne fait aucun doute. Cette contradiction montre que l'esprit humain n'est pas mécanisable.

DES RAISONNEMENTS POUR MONTRER QUE L'ESPRIT HUMAIN N'EST PAS UNE MACHINE

Ce type de raisonnement est assez convaincant et apparaît aussi rigoureux que celui conduisant à la disjonction de Gödel. L'argument a été formulé la première fois par le philosophe britannique John Randolph Lucas. Plus récemment, des variantes du raisonnement ont été défendues par le physicien et mathématicien britannique Roger Penrose. En utilisant deux formulations différentes, ce dernier maintient que des preuves incontestables démontrent que l'esprit humain n'est pas une machine. Pourquoi donc Gödel serait-il passé à côté de tout cela ?

Une explication de cette étrangeté a été proposée par le philosophe américain Paul Benacerraf. Pour que le mathématicien puisse produire l'indécidable affirmant sa propre cohérence, fait-il remarquer, il faudrait qu'il sache quel système formel exactement exprime la pensée mathématique humaine. Il faudrait donc qu'il dispose d'une capacité introspective parfaite, ce qui est difficile à imaginer.

Même si nous sommes équivalents à une machine, même si nous produisons une pensée mathématique claire sur laquelle nous n'avons pas de doute, nous faisons cela sans savoir quelles règles nous appliquons précisément, donc sans savoir quelle machine nous sommes. L'identification de nouveaux axiomes acceptables qui se produit de temps en temps ajoute de nouvelles règles et ce processus semble imprévisible, du moins pour nous, ce qui montre que nous ignorons quelle machine nous sommes, même si nous en sommes une. En conséquence, nous ne pouvons pas désigner précisément la formule qui affirme la cohérence de notre pensée mathématique. Il n'y a alors aucune contradiction entre le second théorème d'incomplétude et l'hypothèse que nous sommes mécanisables.

Aujourd'hui, une grande majorité des logiciens et philosophes des mathématiques s'accordent sur cette critique fatale aux raisonnements de type Lucas. Il est probable que Gödel ait analysé et éliminé les arguments de type Lucas, et c'est pourquoi il n'a jamais reconnu comme acquise la première option de sa disjonction, qu'il préférerait pourtant.

L'hypothèse du continu est un indécidable absolu, si l'on accepte la définition de Feferman



L'autre option que certains mathématiciens et philosophes considèrent bien plus sérieuse est que des vérités mathématiques nous seront toujours inaccessibles. Plusieurs énoncés candidats ont été discutés et certains pourraient être des indécidables absolus. L'un des principaux candidats est l'«hypothèse du continu», énoncée par Georg Cantor en 1878 (voir l'encadré 1).

Certains axiomes affirmant l'existence d'ensembles très grands (on appelle cela les axiomes de grands cardinaux) sont considérés comme naturels et les mathématiciens sont prêts à les ajouter à ceux de ZFC. Ces axiomes renforcent le pouvoir de démonstration de la théorie des ensembles usuelle et constituent un progrès conforme à ce que Gödel attendait: un enrichissement du monde mathématique accessible à l'esprit humain.

Malheureusement, le mathématicien américain Paul Cohen a montré en 1963 que ces axiomes de grands cardinaux n'ont pas d'effet sur l'hypothèse du continu, qui reste donc indécidable même s'ils sont pris en compte. D'autres travaux, menés il y a une dizaine d'années par l'Américain Hugh Woodin, laissent entrevoir que l'hypothèse du continu pourrait être fausse. Une logique d'un type nouveau, nommée Ω -logique, et une conjecture jugée plausible, la Ω -conjecture, conduisent en effet à la négation de l'hypothèse du continu. On ne peut cependant pas conclure que la question est réglée, puisque la méthode ne fait pas l'unanimité chez les théoriciens des ensembles et que, de plus, la Ω -conjecture n'est pas établie.

Au total, plus d'un siècle après la formulation de l'hypothèse du continu par Cantor, l'esprit mathématique est resté impuissant à savoir ce qu'il en est. Il est donc plausible que nous ayons là un indécidable absolu. De nouveaux arguments sérieux vont d'ailleurs dans ce sens.

En effet, en utilisant une logique de type intuitionniste, c'est-à-dire qui adopte une attitude prudente concernant les énoncés impliquant l'infini, le logicien américain Solomon Feferman (mort en 2016) a proposé en 2011 une définition précise de la notion d'énoncés mathématiques bien définis, c'est-à-dire dont l'esprit mathématique humain doit pouvoir décider de la vérité ou de la fausseté.

Cette approche autorise un traitement rigoureux de la notion de vérité mathématique accessible à l'esprit humain et fournit un outil pour une éventuelle démonstration qu'il existe des indécidables absolus. Moyennant cette notion, Feferman espérait prouver que l'hypothèse du continu est un indécidable absolu, mais il n'y parvint pas. C'est chose faite aujourd'hui: en 2016, Michael Rathjen, de l'université de Leeds, en Angleterre, a prouvé que si l'on admet la définition introduite par Feferman, l'hypothèse du continu est un indécidable absolu.

On ne peut considérer que le problème soit définitivement réglé (il faudrait pour cela que tous les mathématiciens acceptent l'analyse de la notion d'indécidable absolu proposée par Feferman). Toutefois, on constate encore une fois que, en réussissant à rendre précises et purement mathématiques des questions philosophiques, la logique permet de progresser.

DES MONDES MATHÉMATIQUES MULTIPLES?

Une autre approche se fonde sur l'idée du multivers (voir l'encadré 4) parfois prise très au sérieux en physique. Le monde mathématique, comme le monde physique, ne serait pas unique: il en existerait plusieurs versions. Par exemple, dans certains de ces univers mathématiques parallèles, l'hypothèse du continu serait vraie, tandis qu'elle serait fausse dans les autres. Notre intuition mathématique nous donnerait accès uniquement aux vérités communes à tous ces univers. Les indécidables absolus seraient alors les énoncés mathématiques dont le statut, vrai ou faux, change d'une branche du multivers à l'autre.

On a le plaisir de découvrir qu'au moins pour ce qui concerne sa partie relative aux mathématiques, la philosophie, grâce à Gödel et à ses successeurs, est une discipline en progrès où les énigmes, aussi profondes soient-elles, sont susceptibles d'être résolues... même si cela prend beaucoup de temps. ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Rathjen, **Indefiniteness in semi-intuitionistic set theories: On a conjecture of Feferman**, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 81(2), pp. 742-754, 2016.

L. Horsten et P. Welch (éd.), **Gödel's Disjonction**, Oxford University Press, 2016.

J. Väanänen, **Multiverse set theory and absolutely undecidable propositions**, 2014 (<http://bit.ly/2nTt2UT>).

J. D. Hamkins, **The set-theoretic multiverse**, *The Rev. of Symbolic Logic*, vol. 5(3), pp. 416-449, 2012.

S. Feferman, **Is the continuum hypothesis a definite mathematical problem?**, 2011 (<http://bit.ly/2CkzyIB>).

P. Dehornoy, **Au-delà du forcing: la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles**, dans *Logique, dynamique et cognition*, J.-B. Joinet (éd.), Éditions de la Sorbonne, 2007 (<http://bit.ly/2o72Pkr>).