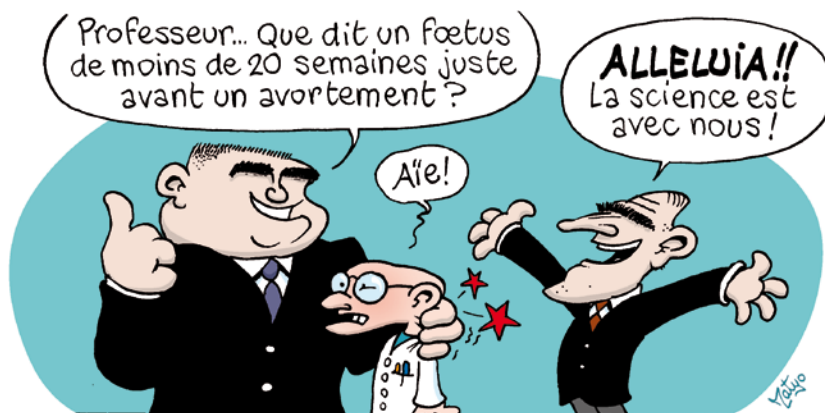




LA CHRONIQUE DE  
GÉRALD BRONNER

# QUAND L'IDÉOLOGIE DÉTOURNE LA SCIENCE

**Un corps qui réagit souffre-t-il forcément ? Les promoteurs d'un projet de loi américain limitant l'avortement semblent penser que oui, et sont ainsi victimes d'un sophisme.**



**I**l y a quelques semaines, aux  tats-Unis, la science a été prise une fois de plus en otage par des enjeux idéologiques. Sujet sensible s'il en est, un projet de loi visant l'interdiction totale de l'avortement (y compris pour des raisons thérapeutiques) après 20 semaines de grossesse a été présenté devant le sénat américain, sans être adopté.

Si la quasi-totalité des sénateurs républicains ont voté en faveur de cette motion, l'opposition démocrate a été non moins unanime à la repousser. Il a manqué 9 voix pour que cette mesure soit adoptée, et cela n'aurait pas été sans conséquence. En effet, l'échographie que l'on réalise entre la 18  et la 22  semaine est déterminante pour repérer certaines malformations telles que la myéloméningocèle (forme grave de spina-bifida).

La motivation du sénateur Lindsey Graham, auteur de la motion, venait du fait que, selon ses partisans, la science aurait établi qu'un f etus est capable de souffrir à partir de 20 semaines. La médecine la plus sérieuse s'est en effet intéressée à cette question, mais la littérature

qu'elle a produite n'a manifestement pas été consultée par ceux qui ont défendu le *Pain-Capable Unborn Child Protection Act*. Ainsi, l'un des arguments développés dans le texte est que le f etus réagit, notamment lors de l'échographie, par un retrait des membres. Les promoteurs du projet de loi en infèrent que le f etus a une sensibilité et qu'il peut donc souffrir.

## Les sénateurs ont invoqué des données scientifiques en les interprétant de façon erronée

Pourtant, l'un des plus robustes  tats de l'art sur cette question, publié en 2004 dans le *Journal of the American Medical Association* (DOI:10.1001/jama.294.8.947), souligne que les réactions du f etus comme la réponse hormonale aux procédures invasives, par exemple, ne prouvent pas qu'il souffre d'une quelconque façon.

 prouver de la souffrance nécessite notamment l'existence d'un réseau de connexions thalamocorticales fonctionnelles. Or ces fibres n'apparaissent qu'entre la 23  et la 30  semaine de gestation. Par ailleurs, l'électroencéphalographie suggère que la capacité de perception de la douleur chez les nouveau-nés prématurés n'existe probablement pas avant 29 ou 30 semaines.

Ceux qui veulent limiter le droit à l'avortement outre-Atlantique prétendent le faire au nom de données scientifiques qu'ils interprètent de façon erronée. On ne saurait distinguer ici la mauvaise foi de l'erreur sincère, mais il est probable que l'idéologie ait ici favorisé le sophisme bien connu sous le nom de l'« affirmation du conséquent ».

Cette erreur de raisonnement consiste à faire passer une condition suffisante pour une condition nécessaire. On pourrait dire ainsi, en étant trompé par ce sophisme: « L'eau est liquide à 10  C; or le vin est liquide à cette température, donc le vin est de l'eau. » Dans le cas qui nous intéresse, il faut distinguer une prémisses acceptable, à savoir: « Un corps qui souffre réagit » (la réaction est une condition nécessaire pour qu'il y ait souffrance), d'une conclusion abusive, à savoir: « Tout corps qui réagit souffre » (la réaction est une condition suffisante).

Ce sophisme est grossier, mais s'il est enseveli sous une masse de données (preuves que le f etus réagit à la lumière, à des sons, etc.) et qu'il s'adosse à des impératifs idéologiques, il peut aisément passer inaperçu. Il ne suffit donc pas que les données soient disponibles pour éclairer rationnellement le débat politique, il faut aussi qu'elles soient convoquées avec un peu d'honn t t  intellectuelle. Et dans cette affaire (qui n'est pas terminée, car ceux qui ont défendu la motion des 20 semaines promettent de revenir à la charge), on trouve une raison supplémentaire de réclamer que l'on distingue fermement la connaissance scientifique des compulsions politiques. ■

**GÉRALD BRONNER** est professeur de sociologie à l'université Paris-Diderot.



# Le progrès a-t-il un avenir?

15.26 mai 2018

**cité**

sciences  
et industrie

CONFÉRENCES

## Qu'est-ce que le progrès ?

Mai 2018 est à la fois le cinquante-nième de Mai 68 et le bicentenaire de la naissance de Karl Marx, un événement et une personnalité qui ont questionné la notion de progrès.

Depuis lors, l'idée de progrès a-t-elle vieilli? Le progrès a-t-il encore un avenir?

*Accès gratuit sur réservation*

Tous les après-midis

## Présentations des groupes de réflexion

AgroParisTech, École primaire Guadeloupe, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Conservatoire national supérieur de musique et de danse de Paris, L'Arbre des connaissances, Prix Design & Sciences Université Paris-Saclay, un groupe de citoyens,...

À partir de 18h30

## Tables rondes

Mardi 15 mai

MAI 68 Sous les pavés, la science

Mercredi 16 mai

INNOVATIONS Comment le Japon innove à l'ombre des traditions?

Jeudi 17 mai

SCIENCES ET TECHNIQUES Consommateurs ou participants?

Vendredi 18 mai

HISTOIRE Cours! Le progrès est derrière toi

Mardi 22 mai

ANTHROPOLOGIE Le progrès est-il le genre humain?

Mercredi 23 mai

ÉCONOMIE ET ENVIRONNEMENT On ne tombe pas amoureux d'un taux de croissance

Jeudi 24 mai

INÉGALITÉS Le progrès à tous les étages?

Samedi 26 mai

MUSIQUE Le progrès donne le "la"

Avec, entre autres: Delphine Batho, Ali Benmakhlouf, Bernadette Bensaude-Vincent, Catherine Bourgain, Lucas Chancel, Jean-Paul Demoule, Fabrice Flipo, Mark Hunyadi, Marylène Patou-Mathis, Catherine Portevin, Antonin Pottier, Sophie Roux, Stéphanie Ruphy, Jean-Philippe Uzan, Sophie Wahnich, ...

EN PARTENARIAT AVEC

PSL AgroParisTech Inserm

CAMPUS CONDORCET Paris-Auvergne

ined

AVEC LE SOUTIEN DE

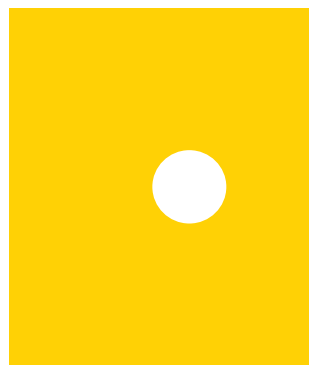
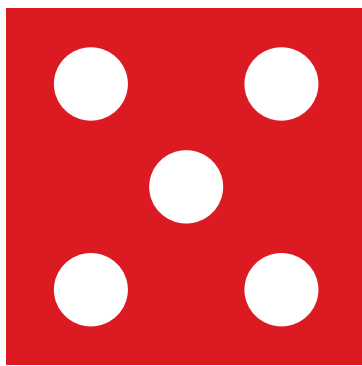
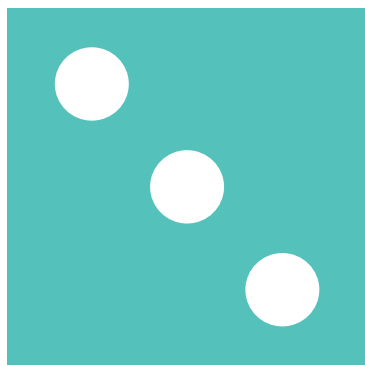
CNEWS THE CONVERSATION

philosophie SCIENCE

Cité des sciences et de l'industrie  
30, avenue Corentin-Cariou - 75019 Paris

Ⓜ Porte de la Villette Ⓜ 3b Cité des sciences et de l'industrie

Programme sur [cite-sciences.fr](http://cite-sciences.fr) rubrique Conférences



## L'ESSENTIEL

> Les matrices sont des ensembles de nombres rangés en lignes et colonnes. Elles représentent des transformations linéaires.

> Dans les matrices aléatoires, ces nombres sont tirés au hasard. On leur a découvert plusieurs

propriétés statistiques universelles – les mêmes quel que soit le type de hasard utilisé.

> De façon étonnante, on les retrouve dans quantité de situations. Et leur étude s'est révélée très féconde en mathématiques et en physique théorique.

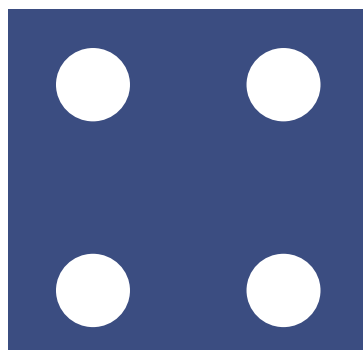
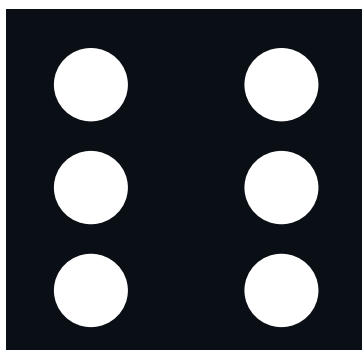
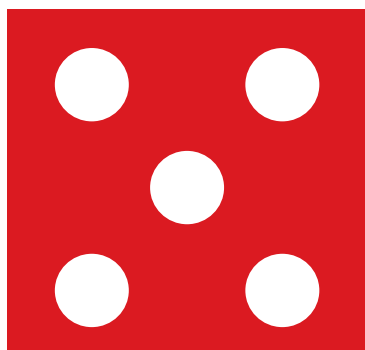
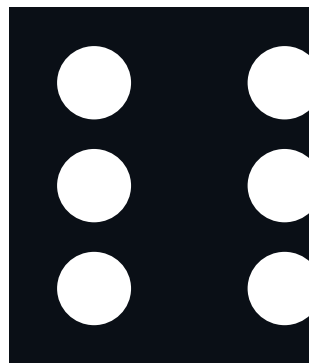
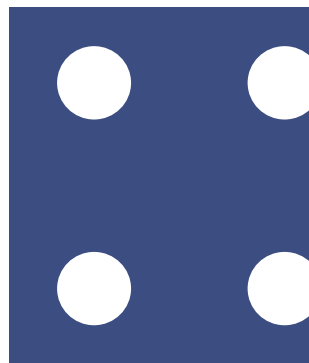
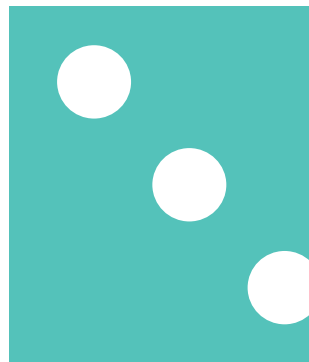
## L'AUTEUR



**BERTRAND EYNARD**  
chercheur à l'Institut de physique théorique du CEA, à Gif-sur-Yvette, ainsi qu'au Centre de recherches mathématiques de Montréal, au Canada

# L'universalité des matrices aléatoires

Les régularités tapies dans le hasard n'ont pas fini de nous étonner. Avec les matrices aléatoires, les scientifiques découvrent des lois statistiques fascinantes et universelles, c'est-à-dire indépendantes du type de hasard choisi, ainsi que des liens intimes et féconds avec la géométrie, la théorie des cordes...





**T**emps d'attente entre deux mètres, niveaux d'énergie des noyaux atomiques, nombres premiers, théorie des cordes, tsunamis, cours de la bourse, forme des protéines, antennes de téléphonie mobile, position des arbres dans une forêt, durée d'embarquement des passagers dans les avions, géométrie des surfaces, cristaux, conduction électronique... Qu'y a-t-il de commun dans cet inventaire à la Prévert? Dans tous ces phénomènes, que ce soit dans leur description ou leur modélisation, les chercheurs ont mis au jour des propriétés qui sont celles des matrices aléatoires...

Ces objets combinent un outil mathématique très répandu, les matrices, avec un phénomène lui aussi présent dans une multitude de situations, le hasard. Et bien que le hasard soit *a priori* un agent de désordre, d'irrégularité et d'imprévisibilité, les matrices aléatoires ont révélé des propriétés traduisant un surprenant ordre caché : elles se comportent de façon « universelle », c'est-à-dire qu'elles présentent des régularités statistiques identiques quel que soit le type de hasard mis en jeu, et donc quel que soit le phénomène aléatoire précis que la matrice est censée décrire.

L'étude des matrices aléatoires remonte au moins à 1928, époque où le mathématicien écossais John Wishart s'y est intéressé dans le cadre de l'analyse de données statistiques. Mais ce sont surtout les travaux du physicien théoricien d'origine hongroise Eugene Wigner sur les niveaux d'énergie des noyaux atomiques lourds, publiés en 1955, qui ont stimulé l'intérêt des scientifiques pour le sujet.

Plusieurs autres physiciens théoriciens ont ensuite contribué à la théorie de ces objets et à établir des liens avec divers problèmes de physique. Et les percées qu'ils ont réalisées dans les décennies 1970-1990 ont attiré vers le domaine de nombreux mathématiciens et chercheurs d'autres disciplines. Ces scientifiques ont découvert d'une part que les matrices aléatoires ont des propriétés fascinantes, d'autre part qu'elles interviennent dans maintes questions scientifiques ou techniques. La théorie de ces objets est ainsi devenue, depuis, un champ de recherche très actif.

Pour comprendre ce que sont les matrices aléatoires et leurs remarquables propriétés, expliquons d'abord ce qu'est, en mathématiques, une matrice.

Étant donnés deux entiers positifs  $m$  et  $n$ , une matrice de dimension  $m \times n$  est un tableau de  $m \times n$  nombres rangés sur  $m$  lignes et  $n$  colonnes, ce tableau étant délimité par des parenthèses (voir l'encadré ci-dessus). Ici, on considérera presque toujours des matrices carrées (des matrices  $n \times n$ ) et, le plus souvent, symétriques par rapport à leur diagonale.

## MATRICES CARRÉES, SYMÉTRIQUES, HERMITIENNES

**U**ne matrice est un tableau de nombres rangés en lignes et en colonnes, et qu'on délimite par des parenthèses de la taille appropriée. Les matrices carrées, qui ont autant de lignes que de colonnes, se rencontrent très fréquemment. Et parmi les matrices carrées, deux classes, celle des matrices symétriques et celle des matrices hermitiennes, jouent un rôle privilégié en physique.

Les matrices symétriques sont celles où les nombres se répètent symétriquement par rapport à la diagonale descendante de la matrice :

si  $a_{ij}$  désigne le nombre situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$ , alors, si la matrice est symétrique, on a  $a_{ij} = a_{ji}$  pour toutes les valeurs de  $i$  et de  $j$ .

Les matrices hermitiennes sont celles qui vérifient  $a_{ij} = (a_{ji})^*$  pour toutes les valeurs de  $i$  et de  $j$ , où  $a^*$  désigne le complexe conjugué du nombre  $a$  (si  $a = p + iq$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres réels et  $i$  est le symbole vérifiant  $i^2 = -1$ , alors  $a^* = p - iq$ ).

Exemple d'une matrice de dimension  $2 \times 4$  (c'est-à-dire ayant 2 lignes et 4 colonnes) :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice carrée de dimension  $3 \times 3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice symétrique de dimension  $3 \times 3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice hermitienne de dimension  $3 \times 3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 5 \\ 2-i & 3 & 1-i \\ 5 & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Si les matrices sont omniprésentes en mathématiques et dans leurs applications, c'est parce qu'elles permettent de représenter de façon très commode des opérateurs (ou applications) linéaires.

Au sens où on l'entend ici, un opérateur est un objet mathématique qui transforme une entrée (une liste de nombres) en une sortie (une autre liste de nombres). L'opérateur est dit linéaire si chaque nombre de la liste de sortie s'obtient en additionnant les nombres d'entrée pondérés par des coefficients multiplicatifs. Par exemple, si l'entrée est une liste de 4 nombres, et la sortie une liste de 2 nombres, l'opérateur est entièrement caractérisé par  $2 \times 4 = 8$  coefficients, car pour chacun des 2 nombres de la sortie, il faut 4 coefficients, qui multiplient chacun un nombre de l'entrée. Dans cet exemple, l'opérateur linéaire est alors représenté par une matrice  $2 \times 4$ , dont les éléments sont les coefficients en question (voir l'encadré page 39).

La liste d'entrée  $e$  et la liste de sortie  $s$  sont ce qu'on appelle des « vecteurs ». Si l'on note  $M$  la matrice qui transforme l'entrée  $e$  en la sortie  $s$ , on note l'opération  $s = Me$  et on dit que le vecteur  $s$  est égal à la multiplication du vecteur  $e$  par la matrice  $M$ . Cette matrice comporte  $m$  lignes et  $n$  colonnes si le vecteur  $e$  est de dimension  $n$  (c'est-à-dire qu'il a  $n$  composantes) et si le vecteur  $s$  est de dimension  $m$ .

Les matrices, dont l'étude générale a été entreprise au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle avec les mathématiciens anglais Arthur Cayley et James Sylvester, sont l'un des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Comme on l'a dit, c'est un outil mathématique omniprésent. Donnons-en quelques illustrations.

## LES MATRICES, DES OUTILS MULTITÂCHES

Un premier exemple est celui d'un comparateur de prix. Imaginons deux magasins qui vendent les mêmes quatre produits. Plaçons dans une matrice de dimension  $2 \times 4$  les prix de chaque produit pour chaque magasin. Comme vecteur d'entrée, considérons une liste de courses: un vecteur de dimension 4 contenant les quantités désirées de chacun des quatre produits. Le vecteur de sortie, de dimension 2, est le montant total à payer pour cette liste de courses dans chacun des deux magasins, ce qui permet de comparer les prix.

De la même façon, en finances, on peut représenter par une matrice un courtier qui gère  $m$  portefeuilles contenant  $n$  types d'actions: on range dans une matrice de dimension  $m \times n$  les nombres de chaque type d'action détenus dans chaque portefeuille. Le vecteur d'entrée étant choisi chaque jour comme la liste des valeurs des gains (éventuellement négatifs) de chaque action, le vecteur de sortie est la liste des gains de chaque portefeuille.

La transmission des ondes et des signaux est également souvent décrite par des matrices. Supposons, pour simplifier, qu'une onde parvenant au transmetteur soit composée de trois fréquences possibles,  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . On représente alors cette onde par un vecteur de dimension 3, qui est la liste des poids respectifs des trois fréquences. Par exemple, le vecteur  $(1/8, 1/2, 3/8)$

figurera une onde où la fréquence  $f_1$  est présente avec un poids de  $1/8$  (ou 12,5%),  $f_2$  avec un poids de  $1/2$  et  $f_3$  avec un poids de  $3/8$ .

L'action du transmetteur serait de modifier la répartition de l'énergie de l'onde sur les trois fréquences, c'est-à-dire de modifier les poids des fréquences. Une telle modification est généralement linéaire et se représente donc par une «matrice de transmission» de dimension  $3 \times 3$ . L'onde transmise sera par conséquent représentée par le vecteur égal au produit de cette matrice par le vecteur figurant l'onde incidente.

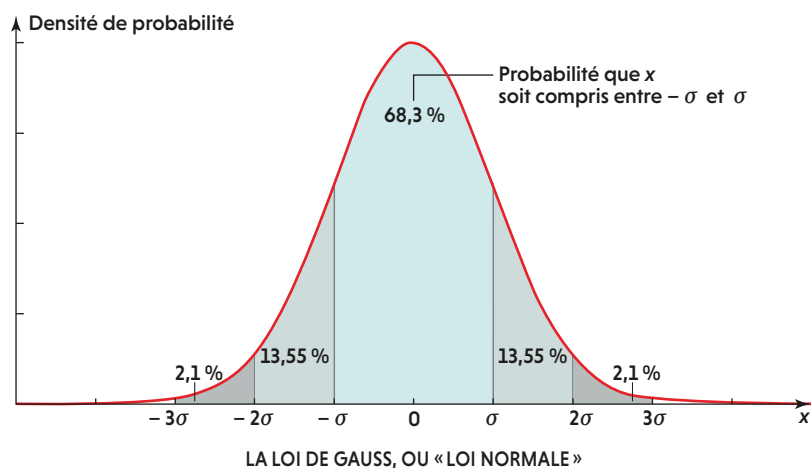
Dernier exemple, mais d'une grande importance: la mécanique quantique, dont la formulation qu'en avait donnée en 1925 le physicien allemand Werner Heisenberg a pour nom la «mécanique des matrices». Considérons un objet physique soumis à des interactions et pouvant occuper différents états de base (qui peuvent être des positions dans l'espace pour une particule, des orbites autour d'un noyau atomique pour un électron, des fréquences pour une onde lumineuse, etc.). Son état quantique se décrit par une «somme» des différentes possibilités, une superposition des états de base, chacun d'eux étant affecté d'un coefficient lié à la probabilité d'observer l'objet dans l'état de base en question lors d'une mesure.

Autrement dit, à chaque instant, l'état quantique de l'objet est une liste de nombres (en général, il s'agit de nombres complexes): les coefficients associés à la probabilité d'occuper l'état de base 1, l'état de base 2, l'état de base 3, etc. L'état quantique est donc représenté par un vecteur dont la dimension est le nombre d'états de base possibles (ce nombre est souvent très grand, voire infini).

Cet état quantique évolue au cours du temps sous l'effet des interactions. D'après les lois de la physique quantique, cette évolution temporelle est régie par un opérateur linéaire nommé hamiltonien; la matrice qui le représente caractérise l'ensemble des interactions agissant sur l'objet, et transforme à chaque instant l'état du système en un autre.

L'opérateur hamiltonien est par ailleurs lié à une grandeur cruciale: l'énergie du système. Plus précisément, les valeurs possibles de cette énergie – les niveaux d'énergie du système – sont données par le «spectre» du hamiltonien. De quoi s'agit-il? Ce n'est ni un fantôme ni une organisation secrète que combat James Bond. Le spectre d'une matrice est un ensemble de nombres nommés *valeurs propres* et qui lui sont caractéristiques.

Ces notions étant fondamentales pour la suite de notre propos, détaillons-les un peu. Donnons-nous une matrice carrée  $M$ , qui représente des transformations linéaires entre vecteurs de même dimension. Pour un vecteur d'entrée  $e$  arbitraire, le vecteur de sortie  $s = Me$  est généralement très différent de  $e$ . Mais pour



Cette loi de probabilité, proportionnelle à  $\exp(-x^2/2\sigma)$  où  $x$  est l'écart à la moyenne et  $\sigma$  est l'écart-type, décrit une multitude de phénomènes de nature aléatoire. C'est elle que, dans les années 1950, Eugene Wigner a choisie pour définir les matrices aléatoires et les étudier: les nombres qui les composent sont tirés au hasard selon la loi de Gauss centrée sur 0.



> certains vecteurs d'entrée particuliers, qu'on nomme alors *vecteurs propres*, la sortie est proportionnelle à l'entrée. En d'autres termes, pour certains vecteurs  $v$ , on a  $Mv = \lambda v$ , où  $\lambda$  (lambda) est un simple nombre. Ce facteur  $\lambda$  de proportionnalité est alors qualifié de *valeur propre* de la matrice, et  $v$  est un vecteur propre associé. Pour le vecteur propre  $v$  (et tous ceux qui lui sont proportionnels), tout se passe comme si l'on pouvait remplacer la matrice par la multiplication par le nombre  $\lambda$  (voir l'encadré page 41). C'est en ce sens qu'une valeur propre est caractéristique de la matrice.

On démontre qu'une matrice carrée  $M$  de dimension  $n \times n$  possède  $n$  valeurs propres (parfois non distinctes, auquel cas les valeurs propres identiques sont associées à des vecteurs propres différents), et le spectre de  $M$  est l'ensemble de ces  $n$  valeurs propres. On démontre aussi que les valeurs propres sont des nombres réels si la matrice est symétrique (et composée de nombres réels) ou si elle est hermitienne (voir l'encadré page 36). Sinon, ce sont souvent des nombres complexes.

Les spectres des opérateurs linéaires, et en particulier du hamiltonien associé à un système, jouent un rôle très important en physique (voir l'encadré page 42). Il est donc utile de les déterminer, et il existe des algorithmes ou des logiciels pour calculer numériquement le spectre de n'importe quelle matrice donnée. Cependant, la question qui nous intéresse dans le cadre des matrices aléatoires n'est pas le

calcul du spectre, mais la suivante: à quoi ressemble, en moyenne, le spectre d'une matrice?

C'est là qu'entrent en scène les travaux de Wigner du début des années 1950. À cette époque où il y avait une course à l'énergie nucléaire, on s'intéressait beaucoup aux niveaux d'énergie des noyaux atomiques, c'est-à-dire aux spectres de leurs hamiltoniens.

Les noyaux les plus légers, comme celui du deutérium, composé d'un proton et d'un neutron, ont un hamiltonien simple, et les physiciens savaient calculer leur spectre, au moins de façon approximative.

## DES NOYAUX LOURDS AUX MATRICES ALÉATOIRES

En revanche, les noyaux lourds, comme celui de l'uranium 238, composé de 238 protons et neutrons, ont un hamiltonien d'une trop grande complexité pour que l'on puisse calculer leur spectre. Cependant, ces spectres peuvent être déterminés expérimentalement en envoyant sur les noyaux des faisceaux de neutrons, et en mesurant à quelles énergies ces faisceaux sont fortement déviés. Ainsi, les expériences des années 1950 ont exploré de vastes gammes d'énergie et permis de trouver des centaines de pics de diffusion des neutrons, correspondant aux niveaux d'énergie excités des noyaux.

Pour chaque noyau, les positions de ces pics dessinaient un ensemble très complexe. Renonçant à comprendre les valeurs exactes des niveaux d'énergie, Wigner s'est intéressé à

Une étude sur la distribution statistique des temps d'attente entre deux métros successifs à New York a été publiée en 2017 par Aukosh Jagannath (université de Toronto) et Thomas Trogdon (université de Californie à Irvine). Elle montre que les statistiques des matrices aléatoires décrivent en partie cette distribution.

## MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Généralement, une matrice représente une application linéaire agissant sur des vecteurs. Une application linéaire  $f$  est une fonction qui vérifie  $f(a v_1 + b v_2) = a f(v_1) + b f(v_2)$  quels que soient les nombres  $a$  et  $b$  et les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$ . Si les vecteurs  $v$  considérés sont de dimension  $n$  et si les  $f(v)$  sont des vecteurs de dimension  $m$ , l'application linéaire  $f$  peut être représentée par une matrice de dimension  $m \times n$ . Une matrice carrée, de dimension  $n \times n$ , représente souvent une application linéaire qui transforme des vecteurs d'un certain espace en d'autres vecteurs du même espace.

Par exemple, la matrice de dimension  $2 \times 4$  :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

représente une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension 4 en vecteurs de dimension 2. Ainsi, le vecteur

$$e = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

est transformé en

$$s = Me = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Cette opération s'effectue en « multipliant » la première (respectivement deuxième) ligne de  $M$  par la colonne de  $e$  pour obtenir la première (respectivement deuxième) composante de  $s$ . Plus précisément, la première composante de  $s$  est égale à :

$$(-2) \times 4 + 0 \times 5 + (-1) \times 1 + (-1) \times 15 = -24,$$

tandis que la deuxième composante de  $s$  est égale à :

$$2 \times 4 + 2 \times 5 + 4 \times 1 + 1 \times 15 = 37.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

leur répartition statistique. En traçant l'histogramme des écarts entre pics successifs, il a découvert une propriété remarquable : cet histogramme était à peu près le même pour différents noyaux (uranium 238, thorium 232, cadmium 110, erbium 166...) et s'ajustait à une courbe, qui sera nommée plus tard GOE. Pour certains noyaux, l'histogramme correspondait à une courbe différente (nommée GUE), et pour d'autres, dotés de propriétés magnétiques, l'histogramme tendait vers une troisième courbe (nommée GSE).

Wigner eut une idée : puisque le hamiltonien d'un noyau lourd est une grande matrice très compliquée, peut-être son spectre est-il assez proche de celui d'une matrice de très grande dimension et dont les éléments sont tirés au hasard ? Il entreprit donc de calculer de façon théorique le spectre moyen et les écarts entre valeurs propres d'une telle matrice aléatoire.

Au préalable, il fallait préciser ce que signifie choisir au hasard les nombres qui composent la matrice. En effet, il existe de nombreuses sortes de hasard ou façons de faire des choix aléatoires. Wigner a considéré le type de hasard suivant :

chaque nombre du triangle supérieur de la matrice est choisi au hasard indépendamment des autres nombres, mais tous selon la même loi de probabilité, la loi de Gauss, ou « loi normale » (voir la figure page 37). Quant aux nombres qui remplissent le triangle inférieur de la matrice, ils sont déterminés par ceux du triangle supérieur, afin que la matrice soit symétrique.

Le physicien américain Freeman Dyson (un collègue de Wigner), et deux physiciens du CEA, Madan Lal Mehta et Michel Gaudin, purent alors calculer la courbe de répartition théorique des espacements entre valeurs propres d'une telle matrice aléatoire, dans la limite où la dimension de la matrice est grande et tend vers l'infini. Cette courbe est celle que Freeman Dyson nota GOE (pour *Gaussian Orthogonal Ensemble*) et qui s'accorde très bien avec l'histogramme des écarts d'énergie d'un noyau lourd, mesurés par diffusion de neutrons (voir la figure page 40).

C'est cette remarquable découverte qui donna le coup d'envoi à la théorie des matrices aléatoires. Depuis, des chercheurs ont repris la méthode de Wigner et l'ont étendue à toutes sortes de matrices (symétriques ou non, hermitiennes ou non, ou avec d'autres types de symétries) et de lois de probabilité (autres que la loi de Gauss), en vue d'applications à des problèmes de physique, de mathématiques, d'économie, de télécommunications, de biologie...

Dans tous les cas, il s'agit de choisir une classe de matrices de grande dimension, dont les éléments sont tirés au hasard selon une certaine loi de probabilité, et de déterminer la répartition statistique de leurs valeurs propres. L'un des résultats majeurs auxquels ont abouti ces recherches est ce qu'on appelle l'universalité.

## DES LOIS STATISTIQUES QUI NE DÉPENDENT QUE DES SYMÉTRIES

La propriété d'universalité est que la statistique des écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire de grande dimension ne dépend pas de la loi de probabilité utilisée pour choisir les nombres de la matrice ! Elle dépend seulement des symétries des matrices considérées (par exemple symétriques ou pas, hermitiennes ou pas...).

Démontrer l'universalité, pour une classe donnée de matrices aléatoires, est aujourd'hui l'une des principales activités des mathématiciens probabilistes du domaine. Les preuves ne sont jamais faciles, mais à chaque fois la statistique des écarts entre valeurs propres se révèle universelle. L'idée intuitive est que chaque valeur propre est une fonction très compliquée de tous les nombres qui composent la matrice, et, quand la dimension de la matrice tend vers l'infini, la complexité s'efface et fait apparaître une moyenne, un peu ➤

> comme un mélange d'un grand nombre de particules devient homogène si on le secoue bien.

Puisque la statistique est universelle, elle est la même que celle trouvée par Wigner avec la loi de Gauss. Eugene Wigner et Freeman Dyson ont en fait considéré trois cas: les matrices symétriques, les matrices hermitiennes et les matrices quaternioniques, ces dernières ayant des symétries correspondant à celles du magnétisme. Les trois distributions statistiques correspondantes et qui sont universelles sont désormais respectivement appelées les distributions GOE, GUE (pour *Gaussian Unitary Ensemble*) et GSE (pour *Gaussian Symplectic Ensemble*) de Wigner. Depuis, d'autres distributions universelles, correspondant à d'autres symétries, ont été découvertes.

De façon étonnante, les scientifiques ont retrouvé un peu partout ces distributions universelles. Un exemple concerne le temps d'attente, à un arrêt, entre deux bus successifs. En 2000, deux physiciens tchèques, Milan Krbálek et Petr Šeba, ont étudié ce temps d'attente à Cuernavaca, au Mexique. Dans cette localité, il n'y a pas de compagnie de transport: chaque chauffeur est propriétaire de son bus. Grâce à des observateurs auxquels il donne un pourboire, chaque chauffeur peut savoir si le bus qui le précède est passé depuis longtemps ou non; il peut donc décider d'accélérer ou ralentir, en vue de ramasser le plus de passagers possible. Or Milan Krbálek et Petr Šeba ont montré que l'histogramme des écarts de temps entre deux bus successifs obéit à la distribution d'écarts GUE de Wigner!

En 2007, Petr Šeba a également étudié la statistique de l'espacement entre voitures



## Les espacements entre voitures garées obéissent aussi à une distribution de Wigner



stationnées l'une derrière l'autre le long d'un trottoir. Son modèle théorique et les quelques données qu'il a recueillies dans Hradec Králové, la ville de son université, ont montré que ces espacements entre voitures obéissent eux aussi à une distribution de Wigner.

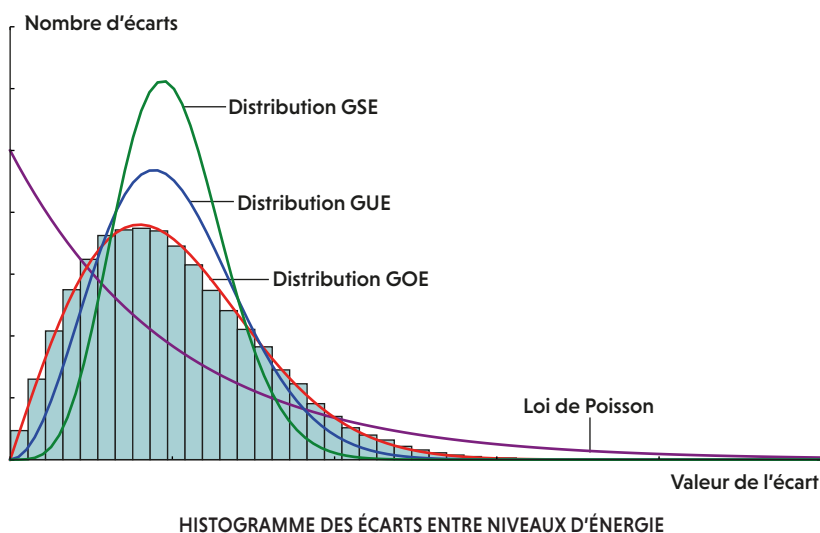
Et ces exemples ne sont pas les seuls. De telles distributions ont été mises en évidence par divers chercheurs dans la statistique des temps d'arrivée des métros à New York, dans celle des distances entre arbres d'une forêt primaire (non plantée par l'homme), dans celle des fluctuations des cours boursiers, dans celle des connexions entre neurones, etc.

Le plus souvent, on est loin de comprendre pourquoi une distribution statistique issue des matrices aléatoires intervient dans le phénomène étudié. Une illustration frappante de cette énigme est en rapport avec les nombres premiers (entiers qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes).

### UNE PISTE POUR PROUVER L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN ?

En 1891, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduisit une fonction aujourd'hui nommée fonction zêta de Riemann, définie sur le plan, et qui s'annule en un nombre infini de points, les «zéros» de la fonction. La connaissance de la répartition de ces zéros permet d'analyser avec une grande précision comment se distribuent les nombres premiers parmi les entiers. Riemann énonça la célèbre conjecture que tous ces zéros (hormis les zéros «triviaux», les entiers négatifs pairs) sont alignés sur une droite précise, mais il ne put jamais la prouver, ni personne depuis.

En 1972, à l'Institut d'études avancées de Princeton, aux États-Unis, Hugh Montgomery, mathématicien spécialiste des nombres premiers, eut une discussion fortuite avec Freeman Dyson. À cette occasion, les deux chercheurs remarquèrent que l'histogramme des distances entre les zéros non triviaux de la



Pour certains noyaux atomiques lourds, l'histogramme des écarts entre deux niveaux d'énergie successifs ressemble à celui montré ci-dessus. Il est très proche de la distribution GOE de Wigner, courbe qui correspond à l'histogramme des écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire (de type GOE) dont la dimension tend vers l'infini. Les distributions GUE et GSE de Wigner (également liées aux matrices aléatoires), ainsi que la loi de Poisson (une distribution statistique répandue), sont montrées à titre de comparaison.

## SPECTRE, VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Une matrice carrée  $M$  de dimension  $n \times n$  peut être vue comme une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension  $n$  en d'autres, de même dimension. Pour certains vecteurs  $v$ , la matrice  $M$  agit comme une simple multiplication par un nombre  $\lambda$ , c'est-à-dire  $Mv = \lambda v$ .

On dit alors que  $v$  est un vecteur propre de  $M$ , et  $\lambda$  est la valeur propre associée. On démontre qu'une matrice  $n \times n$  possède  $n$  vecteurs propres distincts (définis à un facteur de proportionnalité près), auxquels sont associées  $n$  valeurs propres (pas forcément toutes distinctes). L'ensemble des valeurs propres de  $M$  constitue le « spectre » de cette matrice.

À titre d'exemple, considérons la matrice  $3 \times 3$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on considère un vecteur quelconque, par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

l'application de  $M$  conduit à un résultat qui ne ressemble pas du tout au vecteur dont on est parti :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En revanche, on a :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ainsi d'ailleurs que tous ses multiples) est vecteur propre de  $M$  avec la valeur propre 3. On peut aussi vérifier que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de  $M$ , le premier avec la valeur propre 1, le second avec la valeur propre 5. Le spectre de  $M$  est ainsi constitué des valeurs propres 1, 3 et 5, et ce sont les seules valeurs propres, puisque la matrice est de dimension  $3 \times 3$ .

fonction zêta de Riemann (on en connaît aujourd'hui plusieurs milliers de milliards, calculés par ordinateur, et ils sont tous sur la droite conjecturée) est incroyablement bien décrit par la distribution GUE de Wigner.

À ce jour, cette extraordinaire concordance n'a pas reçu d'explication. L'énigme reste entière, et certains spécialistes considèrent d'ailleurs la piste des matrices aléatoires comme l'une des plus prometteuses pour prouver la conjecture de Riemann. Quel rapport y a-t-il entre la fonction zêta et une matrice ? Et de quelle matrice s'agirait-il ? À cette hypothétique et évasive matrice dont les valeurs propres seraient les zéros de la fonction zêta, les chercheurs ont donné le nom de « Riemannium », par analogie avec les noms des éléments ou noyaux atomiques. Mais à part son nom, on n'en sait pas beaucoup plus aujourd'hui...

L'universalité des propriétés des matrices aléatoires ne porte pas uniquement sur les espacements entre valeurs propres. Pour chaque tirage d'une matrice aléatoire, considérons sa plus grande valeur propre, et traçons l'histogramme des nombres ainsi obtenus. De nouveau, cet histogramme est universel pour les matrices de grande taille : il ne dépend pas de la loi de probabilité choisie pour remplir les matrices (mais il dépend de la classe de symétrie de ces matrices).

Cet histogramme s'ajuste sur une courbe dite de Tracy-Widom, introduite par les mathématiciens américains Craig Tracy et Harold Widom en 1993. Comme les distributions de Wigner sur les espacements des valeurs propres, celle de Tracy-Widom et ses variantes correspondant aux différentes classes de symétrie se retrouvent dans divers phénomènes étudiés en physique, en biologie, en économie... sans que l'on comprenne toujours bien pourquoi.

## UNE LOI NON UNIVERSELLE POUR LA DENSITÉ SPECTRALE

Une autre propriété intéressante des matrices aléatoires porte sur la densité de leurs valeurs propres, ou « densité spectrale ». Il s'agit d'une fonction  $p(x)$  qui indique la probabilité que  $x$  soit une valeur propre. Plus précisément, la probabilité qu'il y ait une valeur propre dans l'intervalle  $[x, x + \Delta x]$ , où  $\Delta x$  est très petit, est donnée par le produit  $p(x) \Delta x$ . Pour calculer en pratique cette densité  $p(x)$ , on peut procéder de la façon suivante. On prend un nombre  $x$  et un tout petit  $\Delta x$ , disons 0,01 ; on tire aléatoirement de nombreuses matrices, et pour chacune on compte combien de fois une valeur propre apparaît dans l'intervalle  $[x, x + 0,01]$  ; on divise ce nombre d'occurrences par le nombre total de matrices tirées, et par la taille de l'intervalle, ici 0,01 ; le résultat est  $p(x)$ . On peut le voir comme la hauteur de la barre d'histogramme correspondant à  $x$ .

Si la loi de probabilité avec laquelle les matrices sont choisies est la loi de Gauss (centrée sur 0 et convenablement normalisée), Wigner a prouvé que plus la dimension des matrices est grande, plus l'histogramme ressemble à un « demi-cercle » (si l'échelle de l'axe vertical est appropriée) de rayon 2 (voir la figure page 44). Ainsi, la densité spectrale  $p(x)$  est maximale en  $x=0$ , c'est-à-dire que beaucoup de valeurs propres sont proches de 0 ; plus  $x$  s'éloigne de 0, plus la densité diminue ; et la probabilité qu'il existe une valeur propre supérieure à 2 ou inférieure à -2 est à peu près nulle pour les matrices de grande taille.

Contrairement aux distributions de Wigner sur les écarts entre valeurs propres, le « demi-cercle de Wigner » n'est pas universel : si l'on choisit une autre loi de probabilité que la loi de Gauss, on obtient une autre forme limite pour la ➤

> densité spectrale. Cependant, Wigner, Dyson et d'autres ont progressivement découvert que pour toutes les lois cette forme limite est une courbe définie par des équations algébriques (équations ne faisant intervenir que des polynômes) et qu'il est possible de la prolonger en une surface (c'est l'unique surface qui a la même équation que la courbe, équation où les variables réelles sont remplacées par des variables complexes). Par exemple, pour la loi de Gauss, le demi-cercle se prolonge en une sphère, qui a la même équation. Cette courbe (ainsi que sa surface associée) est appelée la courbe spectrale. Elle n'est pas universelle: chaque loi de probabilité a sa courbe spectrale.

## UNIVERSALITÉ POUR LES CORRÉLATIONS

Mais la densité spectrale est une information bien maigre sur la statistique des valeurs propres. Il est intéressant de savoir aussi quelle est la probabilité que deux nombres donnés soient simultanément valeurs propres d'une même matrice, ou trois nombres, ou quatre, etc. Ces probabilités conjointes de plusieurs valeurs sont ce qu'on appelle des corrélations de densité.

Notons  $p_2(x, y)$  la densité de probabilité que  $x$  et  $y$  soient simultanément valeurs propres d'une même matrice,  $p_3(x, y, z)$  la densité de probabilité que  $x, y$  et  $z$  soient des valeurs propres, etc. Si les valeurs propres étaient indépendantes les unes des autres, on aurait simplement:

$$p_2(x, y) = p(x) \times p(y).$$

Mais ce n'est pas le cas. En effet, le fait de savoir qu'il existe une valeur propre positionnée en  $x$  affecte la probabilité qu'il y en ait une en  $y$ . La différence  $C(x, y) = p_2(x, y) - p(x)p(y)$  entre les deux expressions s'appelle la covariance. Elle indique à quel point les valeurs propres sont reliées: plus la covariance est petite, plus elles sont indépendantes; plus elle est grande, plus les valeurs propres sont liées. Or pour bien connaître la statistique des spectres de matrices aléatoires, il faut connaître non seulement la densité spectrale  $p(x)$ , mais aussi la covariance et toutes les covariances de corrélations, c'est-à-dire les généralisations de la covariance à 3, 4, 5... valeurs propres.

Nous avons vu que, quand la taille de la matrice augmente, la densité spectrale tend vers une limite qui n'est pas universelle. En revanche, le résultat remarquable est que les covariances des corrélations, elles, sont universelles dans un sens que l'on va expliquer et qui fait intervenir la géométrie.

Comme on l'a indiqué, chaque loi de probabilité d'une matrice aléatoire conduit à une courbe spectrale, qui se prolonge en une surface. Depuis les années 2000, mes collègues et moi avons établi que cela fonctionne aussi dans le sens inverse. Autrement dit, on sait partir

## LES ONDES AU FILTRE DU SPECTRE

**L**es valeurs propres et vecteurs propres des matrices jouent un rôle très important en physique ou en ingénierie. La raison est la suivante. Supposons que l'état du système étudié soit décrit par une onde ayant plusieurs composantes, comme c'est le cas en mécanique quantique ou dans le domaine des télécommunications. Cette onde peut être représentée par un vecteur, et son évolution temporelle dépend d'un opérateur qui est représenté par une matrice. Lorsque l'onde n'est pas un vecteur propre de la matrice régissant son évolution, elle ressort à chaque fois différente et se retrouve souvent en opposition de phase avec elle-même; quand l'opération se répète, le signal finit par se brouiller totalement. Au contraire, les ondes qui sont des vecteurs

propres ne se brouillent pas: elles ne font que se renforcer elles-mêmes et finissent par dominer le signal de sortie. Dans les systèmes physiques qui interagissent longtemps (pour un atome, « longtemps » peut signifier moins de un milliardième de seconde), seules les ondes constituant des vecteurs propres sont finalement observables: ce sont les seules qui s'amplifient, alors que les autres se brouillent. C'est pourquoi le spectre est si important en physique.

Prenons l'exemple d'une onde lumineuse incidente sur un atome. L'état de l'onde lumineuse est caractérisé par les fréquences (ou couleurs, de l'infrarouge à l'ultraviolet) qui la composent. Il est donc représenté par un vecteur indiquant la proportion de chacune de ces fréquences ou couleurs. L'interaction avec l'atome agit sur l'onde comme un opérateur linéaire, qui transforme à chaque instant le vecteur. Comme l'interaction dure tout le temps de passage de la lumière, les états qui ne sont pas des vecteurs propres vont se brouiller, contrairement aux vecteurs propres. En fin de compte, seules les couleurs correspondant au spectre de la matrice d'interaction subsisteront. Le sens mathématique du mot spectre rejoint ainsi son sens physique initial (au XVIII<sup>e</sup> siècle, le terme de spectre utilisé par Newton ou Goethe désignait les « illusions » lumineuses, des phénomènes de décomposition de la lumière incompris à l'époque).

d'une surface et déduire de sa géométrie la densité spectrale correspondante  $p(x)$ , ainsi que toutes les covariances de corrélations. Par ailleurs, il a été montré que si deux lois de probabilité ont des courbes spectrales (des surfaces) qui peuvent se déformer l'une en l'autre par des changements de coordonnées vérifiant certaines conditions (il s'agit de « transformations conformes »), alors les covariances associées à l'une se déduisent des covariances de l'autre par un simple changement de coordonnées: les covariances sont les mêmes à cette transformation près, et c'est en ce sens que les covariances des corrélations sont universelles.

## DES LIENS AVEC LA GÉOMÉTRIE, LA THÉORIE DES CORDES...

Les liens ainsi mis au jour entre matrices aléatoires et surfaces ont mené à de nombreuses découvertes récentes en géométrie et en physique théorique. C'est notamment le cas en théorie des cordes, qui a l'ambition de concilier la physique (quantique) des particules et la



La statistique des positions relatives des arbres dans les forêts non plantées par l'homme est similaire à celle des valeurs propres de matrices aléatoires – une constatation faite vers 1989 par le physicien français Gérard Le Caër.

relativité générale d'Einstein, et qui suppose que les particules ne sont pas ponctuelles, mais de minuscules cordes, dotées d'une longueur.

Dans ce cadre, l'une des principales questions est de calculer la probabilité d'une évolution de ces objets : étant donnée une position de départ d'une corde, quelle est la probabilité de telle ou telle position d'arrivée ? Ces probabilités dépendent de la géométrie de l'espace-temps où se déplacent les cordes. Or la théorie des cordes n'est mathématiquement cohérente que dans un espace-temps à 10 dimensions. Pour concilier cette contrainte théorique avec notre perception d'un espace-temps n'ayant que 4 dimensions, on suppose que les 6 dimensions supplémentaires nous sont invisibles parce qu'elles s'enroulent sur elles-mêmes à

une échelle extrêmement petite, de l'ordre de  $10^{-35}$  mètre.

Mais les calculs sont difficiles et dépendent du choix de la façon dont s'enroulent les 6 dimensions. Il en résulte autant de théories des cordes que de choix possibles pour la géométrie des 6 dimensions invisibles. Y aurait-il un moyen simple de calculer les probabilités d'évolution, pour chaque choix ? Entre 2002 et 2012, plusieurs travaux de recherche, dont ceux de Nicolas Orantin et moi, ont permis de montrer que pour certains choix – ceux pour lesquels les 6 dimensions supplémentaires s'enroulent autour d'une surface –, les probabilités sont les mêmes que celles calculées en théorie des matrices aléatoires, si l'on choisit comme courbe spectrale la surface autour de laquelle s'enroulent les 6 dimensions...

Un dernier exemple de l'intérêt des matrices aléatoires est leur lien avec l'« intégrabilité », propriété physicomathématique que l'on décrit souvent comme le contraire du chaos. Les systèmes physiques intégrables sont réguliers et prédictibles ; de tels systèmes, par exemple un ressort qui oscille, une toupie symétrique, une planète seule en orbite autour d'une étoile, une vague se propageant le long d'un canal (un modèle simple de tsunami), sont nombreux et très étudiés.

Dès que le système se complique (par exemple deux planètes ou plus autour d'une étoile), son comportement peut devenir chaotique et, en pratique, imprévisible. On pourrait penser que les systèmes intégrables sont rares ➤

## Pour certains choix en théorie des cordes, on retrouve les lois des matrices aléatoires

> dans la nature, mais c'est plutôt le contraire: ils sont assez fréquents, ou du moins ils décrivent les systèmes réels avec une assez bonne approximation. Intuitivement, cela tient au fait que la partie chaotique des systèmes complexes se moyenne; or ce que l'on observe à notre échelle, c'est la partie qui ne se moyenne pas, justement celle qui est régulière.

Pour en revenir aux matrices aléatoires, une découverte importante, due à Madan Lal Mehta et Michel Gaudin, ainsi qu'à Freeman Dyson et à des chercheurs de l'université de Kyoto, a été que les matrices aléatoires constituent des systèmes intégrables. Qu'est-ce que cela signifie?

## UNE QUANTITÉ QUI DÉTERMINE TOUTES LES AUTRES

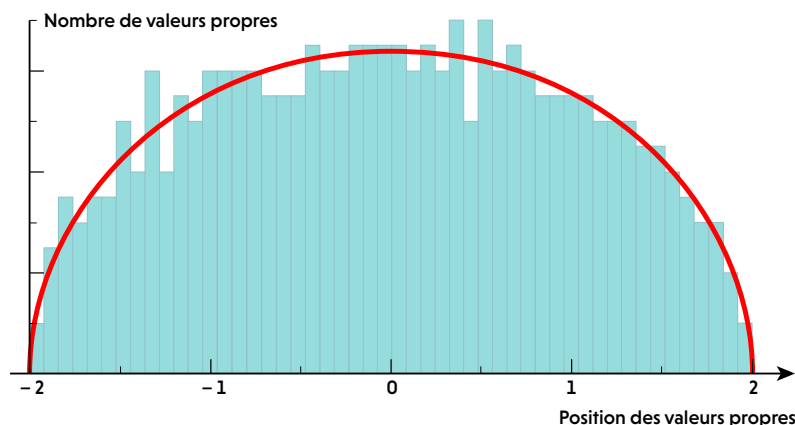
Lorsqu'on se donne une loi de probabilité à laquelle obéit une certaine variable (qui peut être un nombre, un vecteur, une matrice...), on peut calculer des moyennes. Prenons l'exemple d'un nombre  $x$  tiré au hasard un grand nombre de fois. On peut calculer la moyenne de  $x$ , qui est la somme des valeurs tirées, divisée par le nombre de tirages. On peut, de même, considérer la moyenne de  $x^2$ , de  $x^3$ , de  $x^4$ , etc.

L'exemple le plus simple est la loi de Gauss centrée sur 0 (voir la figure page 37). Comme cette loi est symétrique, la probabilité de tirer  $x$  est la même que celle de tirer son opposé  $-x$ . Il en résulte que la valeur moyenne de  $x$  est nulle, de même que la valeur moyenne de toute puissance impaire de  $x$ . En revanche, la valeur moyenne de  $x^2$  (ainsi que de toute puissance paire de  $x$ ) n'est pas nulle, car c'est une somme de nombres positifs.

Pour la loi de Gauss, il existe une remarquable relation entre les valeurs moyennes des puissances paires de  $x$ . Si l'on note  $S$  la moyenne de  $x^2$ , on calcule que la moyenne de  $x^4$  vaut  $3S^2$ , que celle de  $x^6$  vaut  $15S^3$ ... et que celle de  $x^{2k}$  vaut  $S^k$  fois le produit de tous les nombres impairs inférieurs à  $2k$ . Ainsi, toute cette loi de Gauss est caractérisée par un seul nombre,  $S$ , qui détermine toutes les valeurs moyennes possibles par une formule.

Les lois intégrables sont celles qui ont cette propriété: si l'on connaît une moyenne dénommée fonction à deux points (pour la loi de Gauss centrée sur 0, c'est la moyenne de  $x^2$ ), alors on retrouve toutes les autres moyennes par une formule (plus compliquée que la version simplifiée donnée plus haut), qui est la même pour toutes les lois intégrables. Autrement dit, les lois intégrables sont caractérisées par le fait que toutes les moyennes et toutes les corrélations sont engendrées par une seule donnée, la fonction à deux points.

Or les distributions statistiques des valeurs propres des matrices aléatoires ont cette propriété et sont un exemple de système intégrable. Quelle est ici la fonction à deux points?



LE «DEMI-CERCLE DE WIGNER»

L'histogramme de la densité de valeurs propres d'une matrice aléatoire (ici de dimension  $500 \times 500$ ) tend vers une courbe – la «courbe spectrale» – quand la dimension tend vers l'infini. Lorsque les nombres de la matrice sont tirés au hasard selon la loi de Gauss, la courbe spectrale tend vers un demi-cercle (moyennant des facteurs de normalisation appropriés). La courbe spectrale n'est pas universelle: si la loi de probabilité est différente, la courbe spectrale n'est pas la même.

Donnons-nous deux nombres  $x$  et  $y$ . Pour chaque tirage d'une matrice aléatoire de dimension  $n \times n$ , considérons son spectre, constitué de  $n$  valeurs propres  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . La fonction à deux points, que l'on notera  $K(x, y)$ , est la moyenne, sur l'ensemble des tirages, du rapport:

$$[(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)]/[(y-a_1)(y-a_2)\dots(y-a_n)].$$

On montre que cette fonction  $K(x, y)$  engendre toutes les corrélations. Par exemple, la covariance  $C(x, y)$  est directement reliée à  $[K(x, y)K(y, x) - 1]/(x-y)^2$ . De même, toutes les autres corrélations s'expriment par des formules simples en fonction de  $K(x, y)$ .

Dans l'étude des systèmes intégrables, une stratégie très efficace pour les chercheurs est de tester leurs idées sur les matrices aléatoires, en espérant (et cela marche très souvent) que des relations qui sont vraies pour les matrices aléatoires le sont aussi pour tous les systèmes intégrables. De nombreuses propriétés de ces derniers ont été découvertes ainsi.

En somme, les matrices aléatoires se sont révélées des objets d'étude fascinants. Leurs propriétés caractéristiques se manifestent dans une grande diversité de phénomènes sans liens connus ou directs avec les matrices. En mathématiques et en physique théorique, les recherches à leur sujet ont eu des impacts inattendus et considérables. La richesse de ce domaine a attiré et continue d'attirer de nombreux et brillants chercheurs, dont des lauréats de la médaille Fields comme l'Australien Terence Tao, le Franco-Russe Maxim Kontsevitch ou l'Américain Edward Witten. Il faut dire que le sujet est loin d'être épuisé, ne serait-ce que parce qu'il reste à comprendre l'ubiquité des matrices aléatoires et à répondre aux multiples questions que leur étude a soulevées, dont celle du lien avec l'hypothèse de Riemann n'est pas la moindre. ■

## BIBLIOGRAPHIE

**B. Eynard et al., Lecture on random matrices, 2015** (<https://arxiv.org/abs/1510.04430>).

**G. W. Anderson et al., An Introduction to Random Matrices, Cambridge University Press, 2009.**

**B. Eynard et N. Orantin, Algebraic methods in random matrices and enumerative geometry, 2008** (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00340602/>).

**M. L. Mehta, Random Matrices, Elsevier/Academic Press, 2004.**

**B. Hayes, Le spectre du Riemannium, Pour la Science, n° 312, octobre 2003.**

**H. Kunz, Matrices aléatoires en physique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.**

# Atos - Joseph Fourier Prize 2018

The international prize rewarding  
scientific excellence in  
High Performance Computing,  
Artificial Intelligence and  
Quantum Computing.

Register for the competition  
in France  
from March 21<sup>st</sup> to June 8<sup>th</sup> 2018

Go to:  
[atos.net/atos-joseph-fourier-prize](http://atos.net/atos-joseph-fourier-prize)

**Chercheurs, déposez votre dossier pour le Prix Joseph Fourier 2018 avec ATOS et GENCI, pour accélérer la recherche et l'innovation dans la simulation numérique, l'intelligence artificielle et le calcul quantique.**

A l'occasion du 250<sup>ème</sup> anniversaire de la naissance du célèbre mathématicien et physicien français dont les travaux ont largement contribué à la modélisation mathématique des phénomènes physiques, aujourd'hui au coeur des technologies du numérique, participez au Prix Atos Joseph Fourier 2018 !

Récompensant une personne ou une équipe pour l'excellence de travaux réalisés au sein d'un laboratoire français, public ou privé, le Prix Atos - Joseph Fourier 2018 vise à accélérer la recherche et l'innovation dans trois domaines clés pour la société :

- la simulation numérique
- l'intelligence artificielle
- le calcul quantique

**Le Prix Atos - Joseph Fourier 2018 dotera chaque domaine d'un lot de 10 000 euros** et distinguera les participants en leur accordant jusqu'à 200 000 heures de temps machine sur des supercalculateurs de GENCI.

Les dossiers seront évalués par un Jury de personnalités indépendantes, représentantes du monde scientifique et industriel français, qui désignera les lauréats du Prix Atos - Joseph Fourier 2018. **Les dossiers devront être déposés avant le 8 juin 2018. La remise des prix se tiendra en juillet 2018.**