

> entreprises qui extraient le minerai de nickel sont en train d'épuiser les gisements faciles d'accès, et se tournent vers des gisements dont l'exploitation exige plus d'énergie et davantage de traitements chimiques, et qui aura donc un plus fort impact environnemental.

L'impact des usines exploitant les nodules doit aussi être considéré. Si un nodule ne renferme que 30% de métaux intéressants, le reste constitue du déchet, généralement sous forme de boue. Aujourd'hui, les usines de traitement des minerais renvoient ces boues dans la mine d'où elles ont été tirées. Mais on ne saura pas quoi faire de celles produites par l'exploitation de millions de nodules océaniques. D'un autre côté, l'extraction minière marine présente l'avantage de ne laisser sur place aucune infrastructure lorsqu'un navire d'extraction quitte une zone pour une autre. Il n'en va pas de même à terre, où d'anciennes installations minières encombre partout le paysage...

Afin de diminuer les besoins en minerais et les impacts environnementaux associés, il est essentiel que la société développe à l'échelle planétaire un recyclage efficace des métaux. Pour autant, la récupération ne suffira pas à satisfaire la demande, qui est en augmentation constante. Il est aujourd'hui difficile de dire si, à quantité de minerai équivalente, l'exploitation du plancher océanique aura des conséquences environnementales plus graves que celles de l'extraction terrestre.

Bien entendu, la régulation des activités minières aura un effet sur ce bilan. L'AIFM ne dispose pas de navires pour inspecter les exploitations, de sorte qu'elle partage cette responsabilité avec les nations parrainant les entreprises minières. Elle ne peut que révoquer le permis d'un pays ou d'une entreprise, suspendre les opérations ou imposer une amende si elle parvient à la conclusion que les opérations minières menées dans une zone ne respectent pas les normes environnementales.

Quatorze des pays membres des Nations unies ont signé la CNUDM, mais ne l'ont pas ratifiée (dont les États-Unis), et 15 autres membres ne l'ont pas signée. Ces 29 États pourraient essayer d'exploiter les eaux internationales sans respecter les règles de l'AIFM, laquelle devrait alors s'en remettre à la diplomatie internationale pour régler le litige.

L'organisation a publié une ébauche de la réglementation qu'elle prévoit pour l'exploitation minière dans les eaux internationales. Les règles correspondantes visent à tout couvrir à terme, de l'émission d'un permis d'exploration et d'exploitation jusqu'aux mesures à prendre pour protéger l'environnement marin. L'AIFM prévoit l'entrée en application de ces règles d'ici à 2020. Quant à l'activité dans les usines terrestres de traitement des nodules, sa régulation relèvera des pays les accueillant.

Un autre aspect important de la problématique posée par l'émergence d'une industrie minière en mer est l'exploitation au sein des zones économiques exclusives des différents pays. Certains pays n'ont pas de mers profondes dans cette zone qui s'étend jusqu'à 200 milles nautiques (370 kilomètres) à partir de la côte. D'autres en ont beaucoup, en particulier les États insulaires du Pacifique. Certains pays, telle la République des Palaos, ont purement et simplement rejeté l'exploitation minière de leur plancher océanique. D'autres, tels les Tonga, les Kiribati et les Îles Cook, mettent une régulation en place et recherchent des partenaires industriels. Les Îles Cook ont par exemple signé un contrat avec la société américaine Ocean Minerals, qui accorde à l'entreprise la priorité quant à la prospection à la recherche de nodules cobaltifères de ses 23000 kilomètres carrés de zone économique exclusive.

L'EXPLOITATION MINIÈRE DES FONDS MARINS EST SUR LE POINT DE DEVENIR UNE RÉALITÉ

L'exploitation minière des grands fonds marins est ainsi sur le point de devenir une réalité. Étant donné son intérêt économique et stratégique croissant, certains États pourraient lancer une exploitation pilote dans les 5 à 10 prochaines années. Il est souhaitable dans cette perspective que toutes les parties concernées coopèrent, comme elles l'ont fait jusqu'à présent, les essais industriels à petite échelle se faisant conjointement aux indispensables recherches scientifiques.

De fait, une grande partie de ce que nous savons des écosystèmes et des ressources dans les zones économiques exclusives est le fruit d'études menées en conjonction avec les entreprises. Notre expédition de San Diego, par exemple, a été financée par le MIT (l'institut de technologie du Massachusetts), l'institut Scripps d'océanographie en collaboration avec l'Autorité internationale des fonds marins, l'institut d'études géologiques des États-Unis (USGS) et l'entreprise GSR. En 2019, le projet européen *JPI Oceans* effectuera une étude dans la zone de fracture de Clarion-Clipperton en collaboration avec l'AIFM et GSR.

Certaines des directives et normes à appliquer dans l'exploitation commerciale pourraient être inspirées des règles relatives à des industries existantes, et d'autres créées. Si les différents acteurs en présence parviennent à collaborer, l'exploitation minière du plancher océanique sera une référence éthique, puisque, jusqu'à présent, la réglementation n'a été établie qu'après la mise en exploitation d'une ressource naturelle. Nous pouvons cette fois réfléchir et réguler avant d'exploiter à tort et à travers. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Dymont et al. (coord.), **Les impacts environnementaux de l'exploitation des ressources minérales marines profondes**, Expertise scientifique collective, Synthèse du rapport, CNRS-Ifremer, 2014 (téléchargeable sur : www.cnrs.fr/fr/pdf/inee/SyntheseESCO/index.html#/1/).

Biodiversity, species ranges, and gene flow in the abyssal Pacific nodule Province : Predicting and managing the impacts of deep seabed mining, Étude technique de l'AIFM n°3, AIFM, 2008.

Site de l'AIFM :
www.isa.org.jm

Expérience Plumex de l'institut Scripps d'océanographie :
www.mod.ucsd.edu/plumex



L'ESSENTIEL

> Emmy Noether était une brillante mathématicienne allemande, dont la carrière a été entravée par divers facteurs.

> Ses importants apports à l'algèbre abstraite ont mis au second plan certains autres travaux, notamment deux théorèmes qu'elle a publiés en 1918.

> Ces théorèmes, dont le premier est davantage connu que le second, relient symétries d'un système physique et lois de conservation.

> Ils sont le résultat de recherches menées pour éclaircir des questions posées par la théorie de la relativité générale.

L'AUTEUR



DAVID E. ROWE
professeur émérite d'histoire
des sciences à l'université
Johannes-Gutenberg de Mayence,
en Allemagne

Emmy Noether le centenaire d'un théorème

Figure dominante de l'école allemande d'algèbre à Göttingen durant les années 1920-1933, Emmy Noether a aussi marqué le développement de la physique théorique en démontrant qu'à toute symétrie continue d'un système physique correspond une grandeur conservée.

Il y a cent ans, en 1918, la mathématicienne allemande Emmy Noether publiait un article intitulé «Invariantenprobleme» («Problèmes variationnels invariants»). Cet article et les théorèmes qu'il contenait sont aujourd'hui considérés comme l'un des grands jalons du développement de la physique théorique du xx^e siècle. Cependant, ces travaux ne sont devenus célèbres que de façon posthume. La condition de femme ainsi que l'opinion modeste qu'avait Emmy Noether de ses propres résultats ne sont que deux des facteurs qui expliquent pourquoi.

De son vivant et longtemps après sa mort en 1935, cette mathématicienne a eu son nom exclusivement associé à son rôle majeur dans le développement de l'algèbre abstraite moderne, dans les années 1920. En partie à cause de son influence et de son prestige en tant qu'algébriste, peu se souvenaient qu'Emmy Noether avait également joué un rôle éminent dans l'élucidation de certaines zones d'ombre mathématiques de la théorie de la relativité générale d'Einstein, et en particulier celles

entourant le statut des lois de conservation dans cette théorie.

Il convient cependant de souligner que le principal théorème qu'avait démontré Emmy Noether avait une grande généralité : il se rapportait tout autant à la mécanique classique qu'aux théories des champs (dont la théorie du champ électromagnétique ou celle de la relativité générale sont des exemples). En fait, le théorème de Noether fournit un éclairage profond sur les lois de conservation dans presque tout type de système physique, en les liant étroitement à des symétries – ou des invariances – du système.

En particulier, parmi les applications de ce théorème clé, on retrouve les lois de conservation usuelles portant sur la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie. Par exemple, le théorème de Noether fait apparaître la conservation de la quantité de mouvement totale d'un système physique isolé comme la conséquence de la symétrie ou invariance du système par des translations dans l'espace. Ici, «symétrie par des translations dans l'espace» signifie que les équations >

Portrait d'Emmy Noether peint (acrylique sur toile) par Jennifer Mondfrans, une artiste qui vit à San Francisco. Ce portrait est inspiré d'une photographie de la mathématicienne prise vers 1907, quand elle avait moins de 30 ans.

> décrivant la dynamique du système restent inchangées quand le système subit une translation (modification de l'origine du système de coordonnées utilisé ou, ce qui est équivalent, changement de la position occupée dans l'espace).

De la même façon, la conservation du moment cinétique traduit une symétrie du système par rotation (c'est-à-dire que le système n'est pas modifié si l'on change son orientation); et la conservation de l'énergie correspond à une symétrie par translation dans le temps (c'est-à-dire que le système n'est pas modifié si on décale l'origine de l'axe des temps).

NON PAS UN, MAIS DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX

De nos jours, le théorème de Noether occupe une bonne place dans les manuels de physique moderne. Pourtant, comme la mathématicienne française Yvette Kosmann-Schwarzbach l'a montré dans son ouvrage de 2006, qui fait référence, les physiciens ont mis du temps à se rendre compte pleinement de la signification de ce résultat. Même à ce jour, peu de commentateurs ont souligné que l'article originel d'Emmy Noether contient en fait non pas un, mais deux théorèmes fondamentaux.

Qui plus est, ces deux théorèmes sont essentiels pour comprendre la motivation initiale de ses travaux, à savoir la distinction entre ce qu'Emmy Noether appelait les lois de conservation «propres» et «impropres» de la physique. Ces recherches ont été menées dans le cadre de discussions complexes sur le statut de la conservation de l'énergie dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, cadre que je vais essayer de brièvement décrire ici.

Emmy Noether a été une mathématicienne dont la puissance et l'éclat ont mis du temps à s'affirmer. Certaines circonstances personnelles l'expliquent probablement en partie.

INVARIANTS EN MATHÉMATIQUES ET EN PHYSIQUE

La théorie classique des invariants a des liens étroits avec la géométrie projective analytique, domaine où l'on étudie les propriétés de figures qui restent inchangées sous l'effet de transformations linéaires des coordonnées. Un exemple simple est constitué par les courbes algébriques de degré 2; une telle courbe est l'ensemble de points de coordonnées (x, y) qui satisfont une équation de la forme : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Géométriquement, de telles courbes sont des coniques (intersections d'un plan avec un cône), et les quantités $a + c$ et $ac - b^2$ sont invariantes (à un facteur près commun aux deux quantités). Sauf cas particuliers, la courbe sera soit une ellipse, soit une hyperbole; son équation peut alors être transformée en $x^2/p^2 \pm y^2/q^2 = 1$, le signe $\pm$ permettant de distinguer le type de la conique. On peut alors aisément voir qu'on a $a + c = 1/p^2 \pm 1/q^2$ et $ac - b^2 = \pm 1/(p^2 q^2)$.

En physique aussi, l'existence d'invariants est très fréquente. Un exemple élémentaire porte sur les vecteurs. Tout vecteur dans l'espace est caractérisé par une longueur et une direction. Dans un système de coordonnées donné, le vecteur $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a pour longueur $\|v_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Cette longueur est un invariant : elle ne change pas si on translate le système de coordonnées ou si on le fait tourner. Pour deux vecteurs donnés v_1 et v_2 , on aura trois invariants par rapport aux mêmes transformations : les longueurs de chacun d'eux et leur produit scalaire $v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Tout autre invariant lié aux deux vecteurs donnés peut s'exprimer en fonction de ceux-là. En physique relativiste, les invariants fondamentaux font intervenir une quatrième coordonnée pour le temps, affectée d'un signe différent de celui des trois coordonnées de l'espace (une quantité invariante étant alors du type $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$, où c désigne la vitesse de la lumière).

En théorie de la relativité restreinte, il s'agit d'invariants par rapport à un groupe de transformations de coordonnées nommé groupe de Lorentz. En théorie de la relativité générale, on autorise des transformations arbitraires des coordonnées, qui n'altèrent pas certaines grandeurs particulières (des invariants différentiels). Les équations du champ gravitationnel d'Einstein, qui régissent le mouvement de la matière et de la lumière, s'expriment en fonction de telles entités. Ces équations sont dites généralement covariantes, car elles gardent la même forme sous l'action des transformations arbitraires mentionnées précédemment.

D. R.

Une mathématicienne dont la puissance et l'éclat ont mis du temps à s'affirmer



La rue de l'Université à Erlangen, en 1916. Emmy Noether est née dans cette ville et y est restée la plupart du temps jusqu'en 1915, année où elle est partie pour Göttingen à l'invitation de David Hilbert et Felix Klein.

Née en 1882 dans la petite ville d'Erlangen, en Franconie (dans le nord de la Bavière), elle est longtemps restée connue simplement en tant que la fille de Max Noether, un éminent géomètre algébriste. La famille Noether faisait partie de l'élite intellectuelle juive en Allemagne, et les mathématiques représentaient l'un des rares champs académiques où les jeunes hommes juifs avaient de réelles chances d'obtenir un poste de professeur d'université. Fritz, frère cadet d'Emmy, devint ainsi un professeur renommé de mathématiques appliquées, à Karlsruhe puis à Breslau (voir la photographie page 77).

Entre 1900 et 1902, on autorisa Emmy à assister, en tant qu'auditrice libre, à des cours de mathématiques et de langues modernes à l'université où exerçait son père. Elle fut l'une des deux seules femmes mêlées aux 984 hommes qui suivaient alors des cours à Erlangen. Toutefois, en 1903, la Bavière ouvrit ses universités aux femmes (les universités prussiennes firent de même en 1908). Emmy opta pour les mathématiques et suivit des cours donnés par son père et son collègue Paul Gordan. Après un semestre passé à Erlangen, elle partit pour Göttingen, alors en Prusse, où elle assista à des cours donnés par David Hilbert, Felix Klein, Hermann Minkowski, Otto Blumenthal et Karl Schwarzschild. Mais elle tomba malade et retourna donc à la tranquille Erlangen, où elle obtint en 1907 son doctorat avec les félicitations du jury (la mention *summa cum laude*).

Emmy Noether passa sa thèse de doctorat sous la direction de Paul Gordan, connu de ses contemporains comme le « roi de la théorie des invariants ». Gordan était l'un des derniers grands spécialistes en calculs algébriques compliqués et, sans surprise, la thèse d'Emmy Noether – qu'elle dénigra plus tard, car elle la considérait comme une œuvre de jeunesse trop immature – démontra sa capacité à manier de

LE CALCUL VARIATIONNEL EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

Le calcul des variations, ou calcul variationnel, a été développé afin de résoudre des problèmes de minimisation ou de maximisation d'une certaine grandeur qui dépend du chemin pris parmi une multitude de chemins possibles. En 1696, le Suisse Jean Bernoulli posa le problème suivant : deux points dans un plan vertical étant donnés, trouver la trajectoire de chute libre allant de l'un à l'autre et pour laquelle la durée de la chute est minimale. Il résolut lui-même ce célèbre problème dit de la brachistochrone en s'appuyant sur une analogie optique (le principe de Fermat, selon lequel la lumière suit le trajet le plus rapide) et en en déduisant l'équation différentielle vérifiée par le chemin qui assure la descente la plus rapide (ce chemin se trouve être une courbe appelée cycloïde).

Plus tard, Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange inventèrent des méthodes variationnelles pour résoudre

de tels problèmes, méthodes liées aux principes de l'« action » en physique. En mécanique classique, l'action A d'un système est donnée par une intégrale sur le temps t , entre deux instants t_1 et t_2 , d'une grandeur notée L et nommée lagrangien. Pour une particule, par exemple, le lagrangien L est une fonction de la position $x(t)$ et de la vitesse $v(t) = dx(t)/dt$. Le lagrangien correspond à la quantité $T - V$, où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle.

On peut alors obtenir les équations du mouvement du système en imposant que l'intégrale définissant l'action A soit minimale, ce qui représente une contrainte sur le chemin $x(t)$ adopté par le système. La formulation mathématique de cette contrainte mène aux équations dites d'Euler-Lagrange, qui sont équivalentes aux équations du mouvement obtenues par l'application directe des lois classiques de Newton.

Ces méthodes ont été utilisées pour formaliser le principe de moindre action, nommé plus tard principe de Hamilton, et pour le généraliser aux théories des champs comme l'électromagnétisme et la relativité générale.

D. R.

> tels calculs. En fait, la «mère de l'algèbre moderne» était elle-même une calculatrice de premier plan, même si c'est sa démarche conceptuelle qui l'a rendue célèbre.

Au cours des huit années suivantes, Emmy continua à mûrir en tant que mathématicienne, en particulier sous l'influence du successeur de Gordan, Ernst Fischer. Elle put finalement échapper à son isolement des débuts de la Première Guerre mondiale, quand les salles de cours de l'université se vidaient et que les tranchées se remplissaient. Au département de mathématiques de l'université de Göttingen, Hilbert et Klein étaient en effet continuellement à la recherche de nouveaux talents, et ils invitèrent ainsi Emmy Noether à venir les rejoindre au printemps de 1915.

Cette offre vint probablement avec l'assurance que la faculté de philosophie de Göttingen soutiendrait ensuite sa candidature pour son *Habilitation*, qualification nécessaire pour enseigner. Mais même l'appui de personnalités aussi influentes que Klein et Hilbert ne put garantir cette issue: cela ne vint qu'après la guerre, dans le climat plus libéral de la jeune république de Weimar.

LA CONDITION DE FEMME, OBSTACLE À LA CARRIÈRE

Déjà en 1907, des discussions avaient eu lieu sur la possibilité d'autoriser des femmes ayant les compétences requises à enseigner dans une université prussienne comme celle de Göttingen. Comme les professeurs s'y étaient opposés à la quasi-unanimité, le ministère de tutelle avait décidé de conserver, dans le règlement de l'*Habilitation*, la clause qui excluait explicitement les femmes. Lorsque le cas d'Emmy Noether se présenta à la faculté de Göttingen huit ans plus tard, la section des mathématiques et des sciences vota à 10 voix contre 7 pour une exemption au règlement. Tous les membres de la faculté participèrent alors à une réunion houleuse, au cours de laquelle Hilbert railla l'opposition en proclamant: «Nous sommes une université, pas un établissement de bains!»

En fin de compte, le ministère refusa de céder. Hilbert se rendit alors à Berlin pour négocier avec ses représentants, et réussit à obtenir d'eux une concession substantielle: à partir du semestre d'hiver 1916-1917, Hilbert put annoncer des cours donnés par «le Professeur Hilbert avec l'assistance de Mademoiselle le docteur Noether». En fait, seule Emmy Noether dispensa ces cours.

Un autre personnage d'envergure ayant apporté son soutien à Emmy Noether était Albert Einstein, qui avait de bonnes relations avec les mathématiciens de Göttingen. Tout comme Klein et Hilbert, Einstein appréciait clairement les talents d'Emmy. Après avoir lu

LES DEUX THÉORÈMES DE NOETHER

Comme Emmy Noether le faisait remarquer au début de son article de 1918, son approche mêlait méthodes du calcul variationnel et théorie de Lie des équations différentielles invariantes par transformations infinitésimales. Tôt dans sa carrière, au XIX^e siècle, le mathématicien norvégien Sophus Lie avait eu l'idée que pour intégrer (c'est-à-dire résoudre) une équation différentielle, il fallait trouver une petite perturbation des courbes solutions de l'équation qui laisse invariante la famille de ces courbes (autrement dit, en appliquant la transformation aux solutions de l'équation, on reste à l'intérieur de l'ensemble des solutions).

Ainsi, s'inspirant de la théorie de Lie, Emmy a énoncé et prouvé un premier théorème, selon lequel pour un système physique décrit par un lagrangien (voir l'encadré page 75), le nombre de grandeurs

physiques conservées est égal au nombre de variations infinitésimales indépendantes qui laissent invariante l'« action » du système (cette action s'exprime sous la forme d'une intégrale portant sur le lagrangien).

Ce premier théorème se rapporte à des groupes de transformations qui dépendent d'un nombre fini de paramètres (par exemple, le groupe des rotations dans le plan dépend d'un seul paramètre, qui est l'angle de la rotation).

Le second théorème de Noether porte sur des groupes de transformations qui dépendent d'un nombre fini de fonctions et de leurs dérivées. En suivant Lie, elle nomma « groupes finis continus » les groupes du premier type, et « groupes continus infinis » ceux du deuxième type.

Le second théorème montre que pour une invariance sous des transformations d'un groupe infini, les équations d'Euler-Lagrange obtenues ne sont plus indépendantes les unes des autres, mais satisfont au contraire certaines identités. Dans le cadre de la relativité générale, ce groupe infini est constitué des transformations induites par des changements arbitraires des coordonnées. Emmy Noether donnait ainsi une explication aux quatre identités que Hilbert avait remarquées en 1915. Plutôt que de leur attribuer une signification physique, elle souligna que ces relations sont des lois de conservation impropres, qui n'ont aucun parallèle avec les lois de conservation de la mécanique classique ou de la relativité restreinte.

D. R.

son article de 1918, il écrira à Hilbert: «Je suis impressionné que l'on puisse considérer ces choses d'un point de vue si général. Cela ne ferait pas de mal aux troupes de retour à Göttingen après le champ de bataille de suivre les cours de M^{lle} Noether. Elle semble très bien connaître son affaire!»

Ce n'est qu'au printemps 1915, peu de temps après l'arrivée d'Emmy Noether à Göttingen, qu'Einstein vint y donner une série de cours sur la théorie de la relativité générale. Cette visite eut lieu quelques mois seulement avant des avancées spectaculaires réalisées en novembre 1915. C'est en effet à ce moment que Hilbert et Einstein découvrirent, chacun de son côté, des équations du champ gravitationnel satisfaisant au principe généralisé de relativité, selon lequel les lois de la physique doivent garder la même forme quel que soit le référentiel

ou système de coordonnées dans lequel on se place.

Les deux versions étaient très voisines, bien que les travaux de Hilbert et ceux d'Einstein aient été guidés par des hypothèses physiques et des méthodes mathématiques très différentes. L'approche mathématique développée par Hilbert était fondée sur des méthodes variationnelles, qui avaient joué un rôle important en mécanique classique depuis les contributions de Joseph-Louis Lagrange, au XVIII^e siècle (voir l'encadré page 75).

DES IDENTITÉS REMARQUÉES PAR HILBERT ET MAL COMPRISES

Einstein avait aussi tenté une telle approche, mais Hilbert fut le premier à exploiter cette piste et à en déduire des équations du champ gravitationnel qui soient pleinement covariantes, c'est-à-dire qui gardent la même forme quel que soit le système de coordonnées adopté. Hilbert remarqua également que son système de quatorze équations satisfaisait quatre identités qu'il interpréta comme un lien entre gravité et électromagnétisme. Mais la nature précise de ces relations est restée obscure, jusqu'aux travaux d'Emmy Noether (voir l'encadré page 76).

Emmy Noether et Fritz, l'un de ses trois frères, en 1933. Cette année-là, avec l'arrivée des nazis au pouvoir, Emmy émigra aux États-Unis. Elle y mourut deux ans plus tard, à la suite de complications d'une opération chirurgicale. Fritz quitta aussi l'Allemagne en 1933. Après avoir occupé un poste de mathématicien à Tomsk, en Union soviétique, il fut arrêté en 1937 en raison de fausses accusations d'espionnage et fut finalement exécuté par les hommes de main de Staline en 1941.



Plus mystérieux encore était ce que Hilbert nomma son «équation de l'énergie invariante», fondée sur une construction complexe connue sous le nom de vecteur énergie de Hilbert. Emmy Noether commença à étudier les propriétés de cette grandeur un peu plus tard, même si elle ne publia rien à ce sujet. Ce qu'elle découvrit, cependant, est évoqué dans un échange tenu en janvier 1918 entre Klein et Hilbert sur le statut de la conservation de l'énergie en relativité générale, échange publié dans un volume (daté de 1917) de la revue *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.

Klein y faisait remarquer: «Comme vous le savez, M^{lle} Noether me conseille continuellement au sujet de mes travaux, et en fait, c'est uniquement grâce à elle que j'ai compris ces questions.» Klein avait été à l'initiative de cet échange, dans lequel il insistait sur le fait que l'équation de l'énergie invariante de Hilbert était une identité générale, et non une véritable loi de conservation au sens de la mécanique classique. Une telle loi de conservation classique ne pouvait être découverte qu'en invoquant des propriétés physiques de la matière, alors que l'équation de Hilbert était la conséquence des équations du champ gravitationnel et de considérations purement formelles. Klein soulignait en outre qu'Emmy Noether l'avait déjà remarqué et qu'elle s'était occupée des détails dans un manuscrit. Hilbert répondit à Klein:

«Je suis tout à fait d'accord avec la substance de vos affirmations sur les théorèmes d'énergie. Emmy Noether, à qui j'ai demandé de l'aide il y a plus d'un an pour clarifier ce genre de question analytique à propos de mon théorème d'énergie, a trouvé à cette époque que [...] les composantes d'énergie que j'avais proposées – ainsi que celles d'Einstein – pourraient être transformées formellement en expressions dont la divergence est identiquement nulle [...].» Traduite en termes simples, la dernière partie de cette citation signifie que la loi de conservation que Hilbert a trouvée pour son «vecteur énergie» résultait de manipulations mathématiques purement formelles et constituait donc une identité, une sorte de tautologie sans conséquences sur la physique.

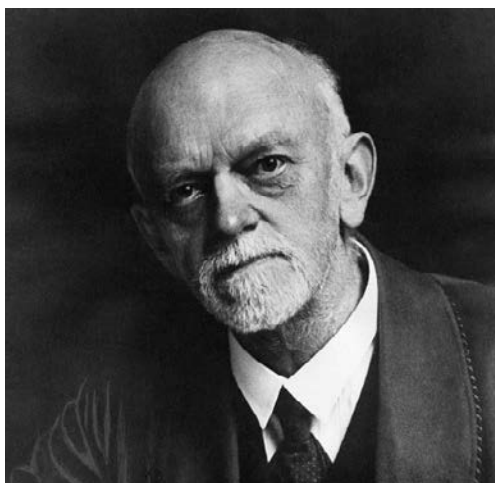
Ces mots échangés entre Klein et Hilbert, ainsi que des notes prises par Rudolf Himm, un étudiant suisse d'Emmy Noether, montrent que les résultats de la mathématicienne avaient de toute évidence anticipé les principaux arguments de Klein.

Hilbert n'était pas seulement d'accord, de façon générale, avec l'analyse de Klein concernant le statut des lois de conservation. Il alla plus loin en affirmant que l'absence d'analogie entre la conservation de l'énergie classique et sa propre équation d'énergie était une ➤

FELIX KLEIN, DAVID HILBERT ET GÖTTINGEN

Au début du XX^e siècle, le département de mathématiques de l'université de Göttingen était devenu un centre d'excellence mondial, jusqu'en 1933 (arrivée au pouvoir des nazis). C'est là notamment que s'est développée l'algèbre abstraite moderne, dont ont hérité plusieurs champs actuels de la recherche mathématique. L'essor de l'école de Göttingen est en grande partie dû aux efforts de deux mathématiciens brillants et influents, Felix Klein et David Hilbert. Klein, qui avait rejoint

Göttingen en 1886, est notamment connu pour son « programme d'Erlangen » de 1872, qui donnait de la géométrie une vision unifiée, axée sur la notion d'invariance sous des groupes de transformations. Hilbert, plus jeune, est arrivé à Göttingen en 1895. Considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de son époque, il a énoncé en 1900, lors d'un congrès international à Paris, une liste célèbre de 23 grands problèmes ouverts, qui a inspiré beaucoup de recherches du XX^e siècle.



À gauche :
Felix Klein (1849-1925).
À droite :
David Hilbert (1862-1943).

> caractéristique de la relativité générale. Il fit même l'hypothèse qu'il était possible de le prouver à titre de théorème. Klein répondit : « Je serais très intéressé de voir la preuve mathématique à laquelle vous faites allusion dans votre réponse. » Pour lui, il s'agissait d'expliquer clairement ce que signifiait une loi de conservation ayant un contenu physique réel, par opposition à l'expression d'une propriété purement formelle. Cela devint le principal problème auquel s'attela Emmy Noether au début de 1918 dans ses travaux sur les « problèmes variationnels invariants ».

Après divers échanges avec Klein, Emmy Noether acheva ces travaux et présenta le 23 juillet ses résultats (voir l'encadré page 76) à la Société mathématique de Göttingen.

Concernant les interprétations physiques, elle nota que son premier théorème généralisait le formalisme sous-tendant les résultats usuels relatifs aux « intégrales premières » (les grandeurs conservées) en mécanique classique.

Elle caractérisa son second théorème comme étant « la généralisation, en termes de théorie des groupes, la plus générale possible de la "relativité générale" ». Non seulement les résultats fondamentaux qu'elle obtint clarifiaient le statut de l'équation d'énergie de Hilbert, mais ils décrivaient aussi les modalités selon lesquelles les lois de conservation apparaissent, que ce soit en mécanique classique ou dans les théories modernes des champs. Quant à l'hypothèse de Hilbert selon laquelle

l'absence d'une loi propre de conservation de l'énergie constituait une caractéristique de la théorie de la relativité générale, Emmy Noether la commenta ainsi dans son article :

« Pour que cette assertion soit littéralement valide, il est nécessaire de comprendre le terme de "relativité générale" dans un sens plus large qu'habituellement, et de l'étendre aux groupes mentionnés précédemment qui dépendent de fonctions. »

DES RÉSULTATS CONFORTANT LA VISION DE FELIX KLEIN

Klein soumit cet article à la Société scientifique de Göttingen le 26 juillet avec beaucoup de satisfaction. En fait, il voyait dans les découvertes d'Emmy Noether une justification de son célèbre « programme d'Erlangen », écrit en 1872 et qui donnait de la géométrie une vision unifiée en tant qu'étude des propriétés qui restent inchangées par des groupes de transformations. Klein adapta plus tard ses principes fondés sur la théorie des groupes pour en faire une doctrine générale pour la nouvelle physique. D'après son programme d'Erlangen, il fallait ainsi comprendre au sens large la théorie de la relativité comme la théorie des invariants relatifs à un certain groupe de transformations. De toute évidence, Emmy Noether considérait que ses travaux sur les lois de conservation dérivées de principes variationnels s'inscrivaient dans ce programme général. ■

BIBLIOGRAPHIE

D. E. Rowe, **A Richer Picture of Mathematics. The Göttingen Tradition and Beyond**, Springer, 2018.

Y. Kosmann-Schwarzbach, **Les théorèmes de Noether. Invariance et lois de conservation au XX^e siècle**, École Polytechnique, 2006.

D. E. Rowe, **The Göttingen response to general relativity and Emmy Noether's theorems**, dans *The Symbolic Universe. Geometry and Physics, 1890-1930*, J. Gray (éd.), Oxford University Press, 1999, pp. 189-233.

R. Siegmund-Schultze, **Göttinger Felgräue, Einstein und die verzögerte Wahrnehmung [...]**, *Mitteilungen der DMV*, vol. 19, pp. 100-104, 2011.

**OFFRE
1 AN**

3 FORMULES AU CHOIX

BULLETIN D'ABONNEMENT

Pour la Science – Service abonnements – 19 rue de l'Industrie – BP 90053 – 67402 Illkirch Cedex – email : pourlascience@abopress.fr

☒ **OUI, je m'abonne**
pour 1 an à POUR LA **SCIENCE**

Groupe Pour la Science – Siège social: 170 bis, boulevard du Montparnasse, CS20012, 75680 Paris Cedex 14 – Sarl au capital de 32 000 € – RCS Paris B 311 797 393 - Siret : 311 797 393 000 23 – APE 5814 Z

PLUS SIMPLE, PLUS RAPIDE
ABONNEZ-VOUS SUR BOUTIQUE.POURLASCIENCE.FR

R

ENDEZ-VOUS

P. 80 Logique & calcul
 P. 86 Art & science
 P. 88 Idées de physique
 P. 92 Chroniques de l'évolution
 P. 96 Science & gastronomie
 P. 98 À picorer

CES GRILLES DE TIGES ARTICULÉES SONT-ELLES RIGIDES?

Comment savoir si un assemblage plan de tiges articulées est déformable ou rigide? En appelant à la rescousse la théorie des graphes, qui fournit des algorithmes efficaces.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal)

Pour éviter qu'une chaise ne s'écroule quand on s'y assied, on consolide les angles où se rejoignent les pieds et les barres délimitant la surface horizontale du siège. Il est prudent aussi d'ajouter quelques barreaux transversaux. Le problème de la rigidité prend une forme plus générale avec un échafaudage complexe (comme la Tour Eiffel) fait de tiges attachées par leurs extrémités. Les mathématiciens se sont intéressés à cette question et l'ont résolue en déterminant où et comment placer un minimum de barres transversales pour rigidifier un ensemble de tiges articulées.

Des exemples simples du problème constituent déjà de petites énigmes amusantes à laquelle nous vous invitons à réfléchir quelques secondes en observant l'encadré 1.

Imaginons un réseau de barres placées dans un plan dont elles ne peuvent s'échapper, toutes de la même longueur et attachées par leurs extrémités. Sur le schéma *b*, nous avons représenté un réseau formant un rectangle 2×3 où quelques tringles obliques, des diagonales, ont été ajoutées. Parmi les six assemblages de tringles figurés, certains rendent rigide l'assemblage, d'autres non. Saurez-vous identifier les assemblages rigides? Saurez-vous aussi déterminer si le réseau *c* est rigide ou non? Comment formulerez-vous vos arguments? Autre question: combien faut-il au minimum de tringles transversales pour rigidifier un réseau rectangulaire de ce type ayant *a* carrés de haut et *b* carrés de large?

Bien sûr, une méthode pour découvrir la solution à ce type de problèmes consiste à prendre son Meccano, à fabriquer les structures et à les secouer! L'encadré 2 montre quelles structures de l'encadré 1 se déforment. Mais ce n'est guère satisfaisant et nous imaginons qu'un raisonnement doit donner la réponse sans nous obliger à prendre un tournevis.

Une idée naturelle, mais fautive, est de croire que, s'il y a au moins une tringle oblique dans chaque colonne et dans chaque ligne, alors la structure sera rigide. On verra plus loin qu'il peut même y avoir deux tringles obliques dans chaque ligne et dans chaque colonne, et que pourtant l'assemblage se déforme.

REGROUPEZ LES BARRES NÉCESSAIREMENT PARALLÈLES

Découvrir la solution générale à ces problèmes de grilles rigides demande qu'on réfléchisse aux contraintes de parallélisme qui s'imposent aux barres du réseau. Considérons un réseau composé de 16 carrés comme celui de l'encadré 3, dessin *a*. La mécanique de l'assemblage indique qu'il existe 8 séries de cinq tringles telles que, dans chaque série, toutes les barres sont nécessairement parallèles, qu'on y ait ajouté des tringles obliques ou qu'il n'y en ait pas. En effet, quand le réseau se déforme, les carrés restent des carrés ou deviennent des losanges (quatre côtés égaux) et donc des parallélogrammes. Cela signifie que leurs côtés opposés sont et seront toujours parallèles. De proche en proche, dans une même ligne ou une même colonne, ces contraintes de parallélisme



Jean-Paul Delahaye a récemment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).