

Tous les graphes ayant la propriété d'extension sont donc isomorphes entre eux; il n'y a donc qu'une seule sorte de graphe ayant la propriété d'extension, et cette structure est celle du graphe de Rado. **FIN**

On démontre aussi, par un procédé très proche du précédent, que tout graphe ayant la propriété d'extension contient tout graphe fini ou infini, autrement dit qu'il est universel.

TOUT GRAPHE ALÉATOIRE ET INFINI DONNE LE GRAPHE DE RADO

On construit un graphe aléatoire infini en se donnant un ensemble infini de nœuds $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ et en tirant à pile ou face pour chaque couple de nœuds $a_i a_j$ afin de déterminer si on les lie par une arête (par exemple oui si c'est pile, non si c'est face). On prouve qu'un tel graphe est isomorphe au graphe de Rado.

Les graphes finis aléatoires sont définis comme précédemment: un tirage aléatoire détermine si on place une arête entre deux nœuds. Leur étude conduit à une théorie importante qui donne lieu à une multitude de résultats délicats et profonds, dont une bonne partie est due au célèbre et prolifique mathématicien hongrois Paul Erdős.

Le résultat concernant l'unicité du graphe de Rado rend impossible une théorie analogue pour les graphes aléatoires infinis, qui sont tous isomorphes. Cette situation est inhabituelle, car en général le passage du fini à un infini fondé sur les mêmes idées donne naissance à une théorie plus complexe et difficile. Ici, c'est l'inverse: la théorie des graphes aléatoires finis est riche, difficile et complexe, tandis que la théorie des graphes aléatoires infinis se réduit à peu de choses et est au fond assez simple. Dans leur livre *Probabilistic Methods in Combinatorics* (1974), Erdős et Joel Spencer l'ont affirmé clairement: le résultat d'unicité des graphes infinis aléatoires «démolit la théorie des graphes infinis aléatoires».

UNE INVARIANCE EXTRÊME

Un peu comme les nombres universels, dont chacun contient tous les autres et qui sont résistants par modification finie, le graphe de Rado est lui aussi invariant par modification finie. Mais, cette fois, le résultat de la modification est plus spectaculaire, puisque le graphe d'une modification est le graphe lui-même: enlever des morceaux finis ne le change pas et le couper en deux le maintient intact. Mieux que les fractales, figures que l'on retrouve en plus petites en elles-mêmes, ici on retrouve le graphe de Rado en lui-même, exactement, sans la moindre modification.

AFFIRMATION. En enlevant un nombre fini de nœuds, ou en changeant un nombre fini d'arêtes, on ne change pas le graphe de Rado. En séparant en deux le graphe de Rado (on

sépare les nœuds en deux sous-ensembles disjoints et complémentaires), l'un des morceaux est le graphe de Rado.

À chaque fois, la démonstration se fonde sur la propriété d'extension dont on voit qu'elle persiste. Notons que la dernière pro-

On a un sentiment d'étrangeté et de magie face à cet objet mathématique singulier

priété n'est pas vraie pour les nombres universels: si l'on répartit les chiffres d'un nombre universel en deux, il se peut qu'aucun des deux nombres obtenus ne soit universel: il suffit de mettre tous les 0 dans l'un des morceaux et tous les 1 dans l'autre.

UN LIEN ENTRE NOMBRES UNIVERSELS ET GRAPHES UNIVERSELS

On pouvait s'attendre à ce qu'il existe un lien entre les nombres universels et le graphe universel de Rado. C'est le cas! On commence par associer un graphe infini G_r à chaque nombre réel r compris entre 0 et 1, en procédant de la façon suivante. On écrit r en base 2, $r = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, on prend comme ensemble de nœuds du graphe G_r l'ensemble des entiers relatifs $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ et on décide qu'il y a une arête entre deux nœuds n et m , avec $n > m$, si et seulement si le chiffre binaire en position $n - m$ dans r est 1. Le nombre de Champernowne en base 2, $Ch_2 = 0,01101100101110111\dots$, définit un tel graphe. On démontre que le graphe défini par un nombre universel en base 2 a la propriété d'extension et donc qu'il est toujours le même graphe infini: le graphe universel de Rado.

Nous n'avons pas évoqué certaines autres définitions inattendues du graphe de Rado; il en existe par exemple une fondée sur les nombres premiers. Elles accroissent encore le sentiment d'étrangeté et de magie ressentie face à cet objet mathématique singulier. Le monde de l'infini mathématique dépasse parfois l'entendement. Bien que tout se démontre et même quand on comprend chaque point des démonstrations, l'émerveillement persiste... ainsi que, peut-être, un certain doute. ■

BIBLIOGRAPHIE

Wikipedia, **Rado graph**, 2018.

C. Biró et U. B. Darji, **Generating infinite random graphs**, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 61(3), pp. 847-868, 2018 (arxiv.org/pdf/1205.3198.pdf).

R. Elwes, **Preferential attachment processes approaching the Rado multigraph**, *arXiv:1502.05618v3*, 2017.

M. S. Kurilić et S. Todorčević, **Copies of the random graph**, *Advances in Mathematics*, vol. 317, pp. 526-552, 2017.

P. J. Cameron, **The random graph**, dans *The Mathematics of Paul Erdős*, vol. II (éd. R. Graham et J. Nešetřil), pp. 333-351, Springer, 1997 ([arXiv:1301.7544](https://arxiv.org/abs/1301.7544), 2013).

J.-P. Delahaye, **Les nombres univers**, *Pour la Science* n° 225, pp. 104-107, juillet 1996.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

DES NANOBULLES MAGNÉTIQUES POUR L'INFORMATIQUE DE DEMAIN

Pour stocker efficacement l'information numérisée, l'idée d'utiliser de petits domaines magnétiques revient au goût du jour, avec une nouveauté: les skyrmions.



La chaîne de pendules et les bulles de savon présentent des analogies avec les « bulles » magnétiques dans des films minces.

Dans les années 1970, la technique d'avenir pour le stockage de l'information numérique était les mémoires à « bulles magnétiques ». Le développement des mémoires flash, fondées sur de l'électronique, a rendu ces dispositifs obsolètes. Mais plus récemment, de nouvelles entités de la même famille ont fait leur apparition dans les laboratoires: les skyrmions magnétiques. Comme les bulles magnétiques, les skyrmions sont de petites régions d'un mince film magnétique où l'aimantation est orientée de façon particulière. De taille nanométrique, manipulables par des courants électriques très faibles, stables grâce à des propriétés de nature topologique, ils constituent une alternative intéressante aux électrons pour les techniques numériques de demain.

Pour nous éclairer sur la physique à l'œuvre dans ces systèmes, commençons

par analyser un dispositif mécanique qui fournit une bonne analogie (*voir le dessin ci-contre*). Sur un long axe horizontal, sont fixés à égales distances de petits pendules lestés pouvant tourner librement autour de l'axe. Évidemment, abandonnés à eux-mêmes, tous ces pendules pendent verticalement.

UNE ANALOGIE AVEC UNE ONDE DE PENDULES

Mais ajoutons des ressorts (ou un fil élastique) reliant leurs extrémités, et faisons faire au pendule d'un des deux bouts un tour complet: il se crée une torsion qui reste localisée sur une petite zone (contrairement à ce que l'on observerait avec un ruban de tissu, par exemple).

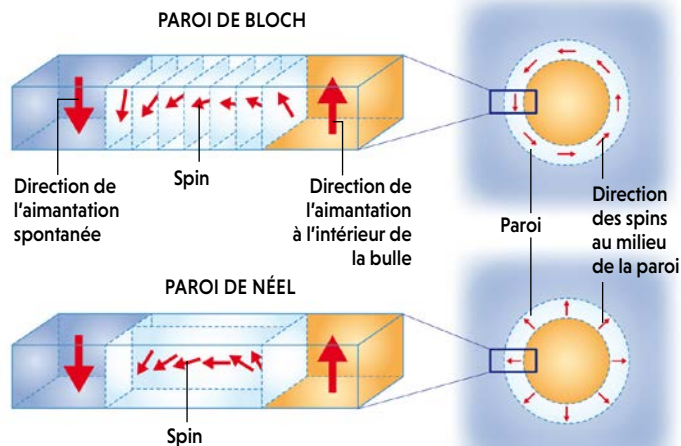
La largeur de cette zone résulte d'un compromis énergétique. Si elle est étroite, les ressorts sont très tendus et l'énergie élastique emmagasinée est importante. En revanche, peu de pendules sont

soulevés par rapport à leur position au repos: l'énergie gravitationnelle correspondante est faible. C'est l'inverse si la zone est étendue. Cette zone sera donc d'autant plus large que les ressorts sont rigides ou que les pendules sont légers.

Faisons tourner l'un des pendules de ce motif: la modification de la tension des ressorts induit une rotation des pendules voisins et ainsi de suite, de proche en proche, de sorte que le motif reprend sa forme initiale, mais en s'étant décalé le long de l'axe. Ce comportement est analogue à celui d'une onde qui se propage dans un milieu: les particules (ici les pendules) qui composent le milieu n'avancent pas avec l'onde, mais restent en place. Nous avons ainsi créé le motif d'une onde solitaire, aussi nommée soliton.

BULLES MAGNÉTIQUES SUR FILM

Un film mince ferromagnétique présente une aimantation spontanée perpendiculaire au film, par exemple dirigée vers le bas. En appliquant localement un champ magnétique intense, on peut y créer des domaines (en orange) où l'aimantation est de sens opposé. Les « parois » de ces bulles magnétiques sont des zones de transition où l'orientation des spins (les aimants microscopiques constitués par les atomes ou les molécules) passe progressivement d'une direction à son opposée. Selon le plan dans lequel l'orientation des spins tourne, on distingue les « parois de Bloch » et les « parois de Néel ». Cela dépend du matériau.



UNE STABILITÉ D'ORIGINE TOPOLOGIQUE

Ce soliton a une propriété remarquable: hormis aux extrémités du dispositif, il n'est pas possible de le détruire, à moins de briser un ressort. Il est protégé par un verrou topologique, sa torsion totale (le nombre de tours qu'on lui a fait faire) étant un invariant. C'est ce qui assure sa stabilité.

Quel est le rapport avec les skyrmions et les bulles magnétiques? Ces entités sont créées dans des films minces ferromagnétiques, qui présentent une aimantation spontanée perpendiculaire au film. L'aimantation résulte des fortes interactions entre les spins – des boussoles microscopiques – d'atomes voisins, interactions qui tendent à les orienter

dans la même direction. Ces forces sont analogues à nos ressorts. Et la gravité est remplacée par le rôle du réseau cristallin qui, en l'absence de perturbations, détermine que l'orientation est perpendiculaire au film.

Supposons que cette orientation soit vers le bas. Que se passe-t-il si l'on redresse des spins vers le haut en appliquant localement un champ magnétique intense, c'est-à-dire si l'on inverse l'aimantation d'une petite région? Le domaine ainsi créé de spins orientés vers le haut est instable, mais on le stabilise aisément en maintenant un tout petit champ magnétique. Ce domaine s'entoure alors d'une « paroi », plus ou moins épaisse, où l'orientation des spins passe progressivement d'une direction à son

opposée à mesure qu'on la traverse (voir la figure ci-dessus).

L'énergie nécessaire à la création de cette paroi est tout à fait analogue à la tension de surface d'une gouttelette d'eau ou d'une bulle de savon. C'est pourquoi le compromis énergétique fait émerger des domaines de forme circulaire, de la même façon que, à trois dimensions, les bulles et les gouttes sont sphériques.

Comme avec notre soliton mécanique, il est possible de déplacer la bulle magnétique le long du film en agissant sur >

Les auteurs ont récemment publié: **En avant la physique!**, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).

